21. (P,ω)-διαμερίσεις

Θεωρούμε μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(P, \leq_P)$ με $\# P = n$ και τυχαία επιγραφή (1-1 αντιστοιχία) $\omega : P \to [n]$.

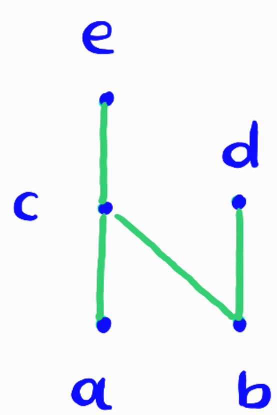
Ορισμός 21.1. Μια απεικόνιση $f : P \to \mathbb{N}$ λέγεται (P,ω)-διαμέριση αν

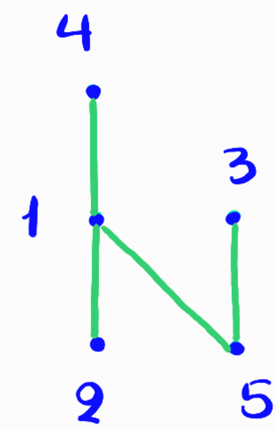
(i) $s <_P t \Rightarrow f(s) \geq f(t)$

(ii) $s <_P t$ και $\omega(s) > \omega(t) \Rightarrow f(s) > f(t)$.

Συμβολίζουμε με $A(P,\omega)$ το σύνολο των (P,ω)-διαμερίσεων $f : P \to \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 21.2. Αν

$P =$ 

$(P,\omega) =$ 

τότε το $A(P,\omega)$ αποτελείται από τις απεικονίσεις $f : \{a, b, c, d, e\} \to \mathbb{N}$ με

- $f(a) > f(c)$ $\qquad$ $f(b) > f(d)$
- $f(b) > f(c)$ $\qquad$ $f(c) \geq f(e)$.

Στο $A(P,\omega)$ αντιστοιχούμε τη γεννήτρια συνάρτηση

$$F_{P,\omega}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{f \in A(P,\omega)} \prod_{s \in P} x_{\omega(s)}^{f(s)}$$

$$(21.1) \quad = \sum_{f \in A(P,\omega)} x_1^{f(\omega^{-1}(1))} x_2^{f(\omega^{-1}(2))} \cdots x_n^{f(\omega^{-1}(n))} .$$

Στο Παράδειγμα 21.2 έχουμε

$$F_{P,\omega}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} x_4^{a_4} x_5^{a_5}$$

όπου το άθροισμα διατρέχει τις πεντάδες $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{N}^5$ με

- $a_2 > a_1$ $\qquad a_5 > a_3$
- $a_5 > a_1$ $\qquad a_1 \geq a_4$.

Επίσης, αν

$(Q,\omega) =$ 

$(Q,\bar{\omega}) =$ 

τότε

- $$F_{Q,\omega}(x_1,x_2) = \sum_{a_1 \geq a_2 \geq 0} x_1^{a_1} x_2^{a_2}$$

$$= \sum_{a_1 \geq a_2 \geq 0} (x_1 x_2)^{a_2} \, x_1^{a_1 - a_2}$$

$$= \frac{1}{(1-x_1)(1-x_1x_2)}$$

και

- $$F_{Q,\bar{\omega}}(x_1,x_2) = \sum_{a_2 > a_1 \geq 0} x_1^{a_1} x_2^{a_2}$$

$$= \sum_{a_2 > a_1 \geq 0} (x_1 x_2)^{a_1} \, x_2^{a_2 - a_1}$$

$$= \frac{x_2}{(1-x_2)(1-x_1x_2)} .$$

Υπενθυμίζουμε ότι το $\mathcal{L}(P,\omega)$ αποτελείται από τις αναδιατάξεις $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ του $[n]$ για τις οποίες

$$\omega^{-1}(\sigma_i) < \omega^{-1}(\sigma_j) \Rightarrow i < j.$$

Θεώρημα 21.3.

$$F_{P,\omega}(x_1,\dots,x_n) = \sum_{w\in\mathcal{L}(P,\omega)} \frac{\prod_{j\in Des(w)} x_{w(1)}\cdots x_{w(j)}}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_{w(1)}\cdots x_{w(i)})}.$$

Στο Παράδειγμα 21.2 έχουμε

- $\mathcal{L}(P,\omega) = \{25134, 25314, 52134, 52314, 53214, 25143, 52143\}$

και συνεπώς $F_{P,\omega}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) =$

$$\frac{x_2x_5}{(1-x_2)(1-x_2x_5)(1-x_1x_2x_5)(1-x_1x_2x_3x_5)(1-x_1x_2\cdots x_5)} +$$

$$\frac{x_2^2 x_3 x_5^2}{(1-x_2)(1-x_2x_5)(1-x_2x_3x_5)(1-x_1x_2x_3x_5)(1-x_1x_2\cdots x_5)}$$

$+\cdots$

Για την απόδειξη χρειαζόμαστε την εξής κρίσιμη ειδική περίπτωση.

<u>Λήμμα 21.4.</u> Αν (P,ω) είναι η αλυσίδα $w(1) <_P w(2) <_P \cdots <_P w(n)$ για κάποια μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_n$, τότε

$$F_{P,\omega}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\prod_{j \in \mathrm{Des}(w)} x_{w(1)} \cdots x_{w(j)}}{\prod_{i=1}^{n} (1 - x_{w(1)} \cdots x_{w(i)})}.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$(P,\omega) = \begin{array}{c} \sigma_n \\ | \\ \vdots \\ | \\ \sigma_2 \\ | \\ \sigma_1 \end{array}$$

όπου $\sigma_i = w(i)$, οπότε

$$F_{P,\omega}(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\substack{a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq 0\\ \sigma_i>\sigma_{i+1}\Rightarrow a_i>a_{i+1}}} x_{\sigma_1}^{a_1} x_{\sigma_2}^{a_2}\cdots x_{\sigma_n}^{a_n}.$$

Θέτοντας

$$c_i = \begin{cases} a_i - a_{i+1}, & \text{αν } \sigma_i < \sigma_{i+1} \\ a_i - a_{i+1} - 1, & \text{αν } \sigma_i > \sigma_{i+1} \end{cases}$$

για $i \in [n]$, όπου $a_{n+1} := 0$ και $\sigma_{n+1} = n+1$, έχουμε

- $$x_{\sigma_1}^{a_1} x_{\sigma_2}^{a_2} \cdots x_{\sigma_n}^{a_n} = \prod_{i=1}^{n} (x_{\sigma_1} x_{\sigma_2} \cdots x_{\sigma_i})^{c_i}.$$

$$\prod_{\sigma_j > \sigma_{j+1}} (x_{\sigma_1} x_{\sigma_2} \cdots x_{\sigma_j})$$

οπότε

- $F_{P,\omega}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$

$$= \prod_{\sigma_j > \sigma_{j+1}} (x_{\sigma_1} x_{\sigma_2} \cdots x_{\sigma_j}) \sum_{c_1, \dots, c_n \geq 0} \prod_{i=1}^{n} (x_{\sigma_1} \cdots x_{\sigma_i})^{c_i}$$

$$= \prod_{\sigma_j > \sigma_{j+1}} (x_{\sigma_1} x_{\sigma_2} \cdots x_{\sigma_j}) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_{\sigma_1} x_{\sigma_2} \cdots x_{\sigma_i}} . \blacksquare$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 21.3. Παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{A}(P, \omega) = \bigsqcup_{w \in \mathcal{L}(P, \omega)} \mathcal{A}(P_w, \omega)$$

όπου P_w είναι η γραμμική επέκταση της P στην αλυσίδα $w \in \mathcal{L}(P, \omega)$. Κατά συνέπεια,

$$F_{P,\omega}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{w \in \mathcal{L}(P,\omega)} F_{P_w,\omega}(x_1, \ldots, x_n)$$

και το ζητούμενο προκύπτει από το Λήμμα 21.4. ∎

Θέτοντας $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ στην (21.1) παίρνουμε

$$F_{P,\omega}(x, x, \ldots, x) = \sum_{f \in \mathcal{A}(P,\omega)} x^{|f|}$$

όπου

$$|f| := \sum_{s \in P} f(s).$$

Ορισμός 21.5. Ο πρωτεύων δείκτης (major index) της $w \in \mathfrak{S}_n$ ορίζεται ως

- $$\mathrm{maj}(w) = \sum_{i \in \mathrm{Des}(w)} i$$

$$= \sum_{\substack{i \in [n-1] \\ w(i) > w(i+1)}} i \, .$$

Π.χ. αν $n = 7$ και $w = 4216573$, τότε $\mathrm{maj}(w) = 1+2+4+6 = 13$. Για $n = 3$

w	123	$1\bar{3}2$	$\bar{2}13$	$\bar{3}12$	$2\bar{3}1$	$\bar{3}\bar{2}1$
$\mathrm{maj}(w)$	0	2	1	1	2	3

Πρόταση 21.6.

$$\sum_{f \in \mathcal{A}(P,\omega)} x^{|f|} = \frac{\displaystyle\sum_{w \in \mathcal{L}(P,\omega)} x^{maj(w)}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)}$$

Απόδειξη. Προκύπτει από το Θεώρημα 21.3 θέτοντας $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$. ■

π.χ. για το Παράδειγμα 21.2

$$\sum_{f \in \mathcal{A}(P,\omega)} x^{|f|} = \frac{x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + 2x^6 + x^7}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

Αν

$$(P,\omega) = \begin{array}{c} n \\ | \\ n-1 \\ \vdots \\ 2 \\ | \\ 1 \end{array} \qquad\qquad (P,\bar{\omega}) = \begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \\ | \\ n \end{array}$$

τότε

- $$\sum_{f \in A(P,\omega)} x^{|f|} = \sum_{a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0} x^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)}$$

και

• $$\sum_{f \in \mathcal{A}(P,\bar{\omega})} x^{|f|} = \sum_{a_1 > \cdots > a_n \geq 0} x^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

$$= \frac{x^{\binom{n}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)}.$$

Πόρισμα 21.7.

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{\mathrm{maj}(w)} = (1+x)(1+x+x^2)\cdots(1+x+\cdots+x^{n-1}).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε αντιαλυσίδα P με n στοιχεία και τυχαία επιγραφή $\omega : P \to [n]$. Τότε, $\mathcal{L}(P,\omega) = \mathfrak{S}_n$ και

- $$\sum_{f \in A(P,\omega)} x^{|f|} = \sum_{a_1,\dots,a_n \geq 0} x^{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^n}.$$

Από αυτό και την Πρόταση 21.6 προκύπτει ότι

- $$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{\mathrm{maj}(w)} = \frac{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)}{(1-x)^n}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (1+x+\cdots+x^{k-1}). \quad \blacksquare$$

Άσκηση 21.8. Αποδείξτε ευθέως το Πόρισμα 21.7 (με επαγωγή στο n, ή με άλλο τρόπο).

Ορισμός 21.9. Μια απεικόνιση $f: P \to \mathbb{N}$ λέγεται αυστηρή (P,ω)-διαμέριση αν

(i) $s <_P t \Rightarrow f(s) \geq f(t)$

(ii) $s <_P t$ και $\omega(s) < \omega(t) \Rightarrow f(s) > f(t)$.

Συμβολίζουμε με $\bar{A}(P,\omega)$ το σύνολο των αυστηρών (P,ω)-διαμερίσεων και θέτουμε

- $$\bar{F}_{P,\omega}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{f \in \bar{A}(P,\omega)} \prod_{s \in P} x_{\omega(s)}^{f(s)}$$

$$(21.2) \quad = \sum_{f \in \bar{A}(P,\omega)} x_1^{f(\bar{\omega}^{-1}(1))} \, x_2^{f(\bar{\omega}^{-1}(2))} \cdots x_n^{f(\bar{\omega}^{-1}(n))}$$

π.χ. αν

$(Q,\omega) =$  $\qquad (Q,\bar{\omega}) =$ 

τότε

- $$\bar{F}_{Q,\omega}(x_1,x_2) = \sum_{a_1 > a_2 \geq 0} x_1^{a_1} x_2^{a_2}$$

$$= \frac{x_1}{(1-x_1)(1-x_1x_2)}$$

και

- $$\bar{F}_{Q,\bar{\omega}}(x_1,x_2) = \sum_{a_2 \geq a_1 \geq 0} x_1^{a_1} x_2^{a_2}$$

$$= \frac{1}{(1-x_2)(1-x_1x_2)}.$$

<u>Θεώρημα 21.10</u> (αντιστροφής για (P,ω)-διαμερίσεις).

- $$F_{P,\omega}\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right) = (-1)^n x_1 x_2 \cdots x_n \, \bar{F}_{P,\omega}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Το θεώρημα αυτό είναι συνέπεια του

Θεωρήματος 21.3 και του ανάλογου του για αυστηρές (P,ω)-διαμερίσεις (απόδειξη παρόμοια).

Θεώρημα 21.11.

$$\bar{F}_{P,\omega}(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{w \in \mathcal{L}(P,\omega)} \frac{\prod_{j \in Asc(w)} x_{w(1)} \cdots x_{w(j)}}{\prod_{i=1}^{n} (1 - x_{w(1)} \cdots x_{w(i)})}$$

όπου $Asc(w) = \{ i \in [n-1] : w(i) < w(i+1) \}$

$= [n-1] \setminus Des(w)$.

Θέτοντας $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$ παίρνουμε:

Πόρισμα 21.12.

$$\sum_{f \in \bar{A}(P,\omega)} x^{|f|} = \frac{\sum_{w \in \mathcal{L}(P,\omega)} x^{\mathrm{maj}'(w)}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)}.$$

όπου $\mathrm{maj}'(w) = \sum_{j \in \mathrm{Asc}(w)} j$ για $w \in \mathfrak{S}_n$.

Πόρισμα 21.13. Έστω ότι η $\omega : P \to [n]$ είναι φυσική επιγραφή. Τα πολυώνυμα

- $U_P(x) = \sum_{w \in \mathcal{L}(P,\omega)} x^{\mathrm{maj}(w)}$

- $\bar{U}_P(x) = \sum_{w \in \mathcal{L}(P,\omega)} x^{maj'(w)}$

είναι ανεξάρτητα της ω και

$$x^{\binom{n}{2}} U_P\left(\frac{1}{x}\right) = \bar{U}_P(x). \qquad (21.3)$$

<u>Απόδειξη.</u> Ο πρώτος ισχυρισμός έπεται από τα Πορίσματα 21.6 και 21.12, αφού τα $A(P,\omega)$ και $\bar{A}(P,\omega)$ δεν εξαρτώνται από τη φυσική επιγραφή ω. Αφού

- $$F_{p,\omega}(x,x,\dots,x) = \frac{U_p(x)}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)}$$

- $$\bar{F}_{p,\omega}(x,x,\dots,x) = \frac{\bar{U}_p(x)}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)}$$

η (21.3) έπεται από το Θεώρημα 21.10. ■

Οι ακόλουθες ιδιότητες του $U_p(x)$ είναι αντίστοιχες με ανάλογες ιδιότητες του $\Omega(P,m)$.

Πρόταση 21.14.

(α) Το $U_p(x)$ είναι μονικό πολυώνυμο

βαθμού $\binom{n}{2} - \delta(P)$, όπου

$$\delta(P) = \sum_{s \in P} h_P(s)$$

και $h_P(s)$ είναι το μέγιστο $k \in \mathbb{N}$ για το οποίο υπάρχει αλυσίδα $s_0 <_P s_1 <_P \cdots <_P s_k = s$ στο P.

(β) Αν το P είναι διαβαθμισμένο, τότε

$$U_P(x) = x^{\binom{n}{2} - \delta(P)} \, U_P(1/x).$$