20. Το πολυώνυμο της διάταξης

Θεωρούμε μερικώς διατεταγμένο σύνολο P με $n \geq 1$ στοιχεία και την αλυσίδα $\mathbf{m} = \{1 < 2 < \cdots < m\}$. Συμβολίζουμε με $\Omega(P, m)$ το πλήθος των απεικονίσεων

$$f : P \longrightarrow \mathbf{m}$$

που διατηρούν τη διάταξη, δηλαδή $x \leq_P y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Έχουμε $\Omega(P, 0) = 0$.

Παράδειγμα 20.1.

(α) Αν το P είναι αλυσίδα με n στοιχεία, τότε

$$\Omega(P,m) = \left(\!\!\binom{m}{n}\!\!\right) = \binom{m+n-1}{n}.$$

κατά συνέπεια,

$$\sum_{m \geq 0} \Omega(P,m)\, x^m = \frac{x}{(1-x)^{n+1}}.$$

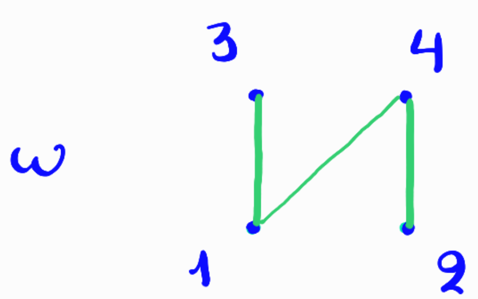
(β) Αν το P είναι αντιαλυσίδα με n στοιχεία, τότε $\Omega(P,m) = m^n$ και

$$\sum_{m \geq 0} \Omega(P,m)\, x^m = \frac{x A_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$$

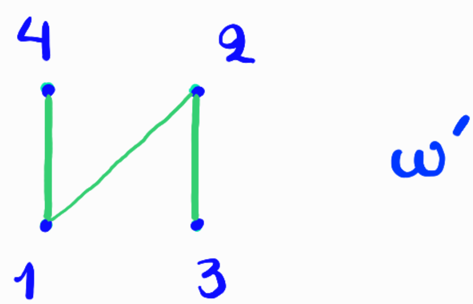
(Πρόταση 4.9), όπου $A_n(x) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{\mathrm{des}(w)}$ είναι το n-στό πολυώνυμο Euler. ∎

Ερώτημα. Τι συμβαίνει για τυχαίο P;

Έστω μια 1-1 αντιστοιχία (επιγραφή του P) $\omega : P \to [n]$. Λέμε ότι το ζεύγος (P,ω) είναι επιγεγραμμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο (labeled poset). Η ω λέγεται φυσική επιγραφή αν διατηρεί τη διάταξη.



φυσική επιγραφή



όχι

Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο Jordan-Hölder $\mathcal{L}(P,\omega)$ αποτελείται από τις αναδιατάξεις $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ του $[n]$ με

$$\omega^{-1}(a_i) < \omega^{-1}(a_j) \Rightarrow i < j.$$

Π.χ. για τα προηγούμενα παραδείγματα

- $\mathcal{L}(P,\omega) = \{1234, 1243, 2134, 2143, 1324\}$
- $\mathcal{L}(P,\omega') = \{1324, 1342, 3124, 3142, 1432\}$

Το $e(P) := \# \mathcal{L}(P,\omega)$ είναι ανεξάρτητο του ω και ισούται με το πλήθος των αναδιατάξεων $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ του P που έχουν την ιδιότητα $p_i <_P p_j \Rightarrow i < j$. Αυτές λέγονται γραμμικές επεκτάσεις του P.

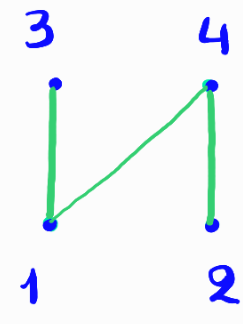
Θεώρημα 20.2. Έχουμε

(20.1)

$$\sum_{m \geq 0} \Omega(P,m)\, x^m = \frac{\sum_{w \in \mathcal{L}(P,\omega)} x^{des(w)+1}}{(1-x)^{n+1}}$$

για κάθε φυσική επιγραφή ω του P.

Π.χ. αν

$(P,\omega) =$ 

τότε $\displaystyle\sum_{w \in \mathcal{L}(P,\omega)} x^{des(w)} = 1 + 3x + x^2$ και

$$\sum_{m \geq 0} \Omega(P,m)\, x^m = \frac{x(1+3x+x^2)}{(1-x)^5}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\Omega(P,m) = \binom{m+1}{4} + 3\binom{m+2}{4} + \binom{m+3}{4}.$$

Πόρισμα 20.3 Η συνάρτηση $\Omega(P,m)$ του m είναι πολυωνυμική βαθμού $n = \#P$, με μεγιστοβάθμιο όρο

$$(e(P)/n!)\; m^n.$$

Απόδειξη. Η (20.1) γράφεται ισοδύναμα

$$\Omega(P,m) = \sum_{w \in \mathcal{L}(P,\omega)} \binom{m+n-des(w)-1}{n} \quad (20.2)$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο. ■

Ορισμός 20.4. Το

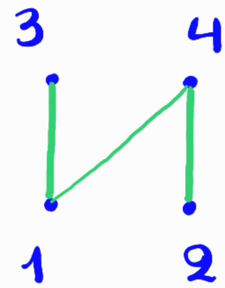
$$W_P(x) = \sum_{w \in \mathcal{L}(P,\omega)} x^{des(w)}$$

λέγεται πολυώνυμο Euler του P.

Απόδειξη του Θεωρήματος 20.2. Έστω $\Lambda(m,n)$ το σύνολο των αναδιατάξεων των $1,2,\dots,n$ και $m-1$ αντιτύπων του συμβόλου $\bigcirc$. Έστω $\Gamma(m,n)$ το υποσύνολο του $\Lambda(m,n)$ που αποτελείται από τις αναδιατάξεις $\sigma \in \Lambda(m,n)$ με τις εξής ιδιότητες:

- αν $\omega^{-1}(i) <_p \omega^{-1}(j)$, τότε το i εμφανίζεται στα αριστερά του j στην σ,
- για $1 \leq i < j \leq n$, το i δεν είναι το αμέσως δεξιά στοιχείο του j στην σ.

π.χ. αν

$(P, \omega) =$ 

και $m=5$, οι αναδιατάξεις

$$1\ 3\ 0\ 0\ 2\ 0\ 4\ 0$$

$$0\ 2\ 0\ 1\ 4\ 0\ 0\ 3$$

ανήκουν στο $\Gamma(m,n)$, αλλά όχι οι

$$2\ 1\ 0\ 0\ 4\ 0\ 3\ 0$$

$$0\ 3\ 0\ 1\ 2\ 0\ 0\ 4.$$

Έστω μορφισμός $f: P \to \mathbf{m}$. Θεωρούμε τα $m-1$ σύμβολα $\circ$ τοποθετημένα σε γραμμική διάταξη. Έστω $\varphi(f)$ το στοιχείο του $\Lambda(m,n)$ στο οποίο:

- κάθε $i \in [n]$ έχει ακριβώς $f(i)-1$ σύμβολα $\circ$ στα αριστερά του και
- οι ακέραιοι που βρίσκονται μεταξύ διαδοχικών συμβόλων $\circ$ είναι τοποθετημένοι σε αύξουσα διάταξη από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Τότε, $\varphi(f) \in \Gamma(m,n)$ και η φ είναι 1-1 αντιστοιχία από το σύνολο των μορφισμών $f : P \to \mathbf{m}$ στο $\Gamma(m,n)$. Δείξαμε ότι

$$\Omega(P,m) = \# \, \Gamma(m,n).$$

Έστω τώρα $\sigma \in \Gamma(m,n)$ και έστω w η αναδιάταξη του $[n]$ που προκύπτει διαγράφοντας τα σύμβολα $\circ$ από τη σ. Τότε $w \in \mathcal{L}(P,\omega)$ και συνεπώς

$$\# \, \Gamma(m,n) = \sum_{w \in \mathcal{L}(P,\omega)} \# \, \Gamma_w(m,n),$$

όπου $\Gamma_w(m,n)$ είναι το σύνολο των $\sigma \in \Gamma(m,n)$ στις οποίες αντιστοιχεί η w. Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 4.9 βρίσκουμε ότι

$$\sum_{m\geq 1} \#\Gamma_w(m,n)\, x^{m-1} = \frac{x^{\operatorname{des}(w)}}{(1-x)^{n+1}}$$

για $w \in \mathcal{L}(P,\omega)$. Από τα προηγούμενα έπεται το ζητούμενο. ■

Πόρισμα 20.5. Το πολυώνυμο

$$W_P(x) = \sum_{w\in \mathcal{L}(P,\omega)} x^{\operatorname{des}(w)}$$

είναι ανεξάρτητο της φυσικής επιγραφής ω του P. Ο βαθμός του είναι ίσος με $n-r(P)-1$, όπου $r(P)+1$ είναι το μέγιστο πλήθος στοιχείων μιας αλυσίδας του P.

Απόδειξη. Η πρώτη πρόταση είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 20.2. Εναλλακτικά, από το Πόρισμα 19.5 παίρνουμε

$$\#\{w \in \mathcal{L}(P,\omega) : \mathrm{des}(w) = S\} = \beta_{J(P)}(S)$$

και συνεπώς ο συντελεστής

$$\#\{w \in \mathcal{L}(P,\omega) : \mathrm{des}(w) = k\} = \sum_{\#S=k} \beta_{J(P)}(S)$$

του x^k στο $W_P(x)$ είναι ανεξάρτητος της ω. Για το δεύτερο ισχυρισμό έχουμε να δείξουμε ότι

$$\max_{w \in \mathcal{L}(P,\omega)} \mathrm{des}(w) = n - r(P) - 1. \quad (20.3)$$

Έστω $r = r(P)$ και έστω αλυσίδα

$$x_0 <_P x_1 <_P \cdots <_P x_r.$$

Τότε, $\omega(x_0) < \omega(x_1) < \cdots < \omega(x_r)$ και συνεπώς για κάθε $w \in \mathcal{L}(P,\omega)$ τα $\omega(x_0)$, $\omega(x_1), \ldots, \omega(x_r)$ σχηματίζουν μια αύξουσα υποακολουθία της w. Αυτό δείχνει ότι $\mathrm{asc}(w) \geq r$, άρα και ότι $\mathrm{des}(w) \leq n - r - 1$.

Για να δείξουμε ότι είναι δυνατή η ισότητα, αρκεί να διαμερίσουμε το P σε $r+1$ μέρη $B_0, B_1, \dots, B_r$ έτσι ώστε

- αν $x <_P y$, $x \in B_i$ και $y \in B_j$, τότε $i < j$.

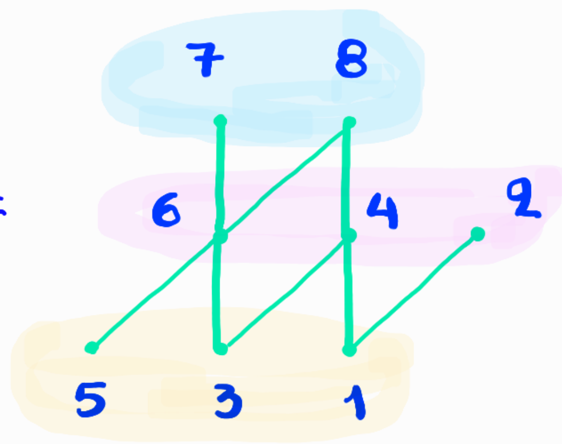
Πράγματι, αν τότε η w παραθέτει πρώτα τα στοιχεία του B_0 σε φθίνουσα διάταξη ως προς την ω, έπειτα εκείνα του B_1 σε φθίνουσα διάταξη κ.ο.κ., τότε $w \in \mathcal{L}(P, \omega)$ και $\mathrm{des}(w) \geq n-r-1$.

Για την κατασκευή της διαμέρισης αρκεί να θέσουμε $B_i = \{x \in P : h(x) = i\}$

για $i \in \{0,1,\dots,r\}$, όπου

- $h(x)$ = μέγιστο μήκος μιας αλυσίδας $x_0 < x_1 < \cdots < x_h = x$ στο P. ■

$(P,\omega) =$



$w = (5,3,1,6,4,2,8,7)$

<u>**Πόρισμα 20.6.**</u> Για το πολυώνυμο $\Omega(P,m)$

έχουμε $\Omega(P,0) = \Omega(P,-1) = \cdots = \Omega(P,-r) = 0$ όπου $r = r(P)$.

Απόδειξη. Προκύπτει από την (20.2) και την ανισότητα $n - des(w) - 1 \geq r$ για κάθε $w \in \mathcal{L}(P,\omega)$. ■

Συμβολίζουμε τώρα με $\bar{\Omega}(P,m)$ το πλήθος των απεικονίσεων $f : P \to \mathbf{m}$ που διατηρούν αυστηρά τη διάταξη, δηλαδή

$$x <_P y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Προφανώς, $\bar{\Omega}(P,m) = 0$ για $0 \leq m \leq r(P)$.

Παράδειγμα 20.7. (α) Αν το P είναι αλυσίδα με n στοιχεία, τότε $\bar{\Omega}(P,m) = \binom{m}{n}$ και

$$\sum_{m\geq 0} \bar{\Omega}(P,m)\, x^m = \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}.$$

(β) Αν το P είναι αντιαλυσίδα με n στοιχεία, τότε $\bar{\Omega}(P,m) = \Omega(P,m) = m^n$ και

$$\sum_{m\geq 0} \bar{\Omega}(P,m)\, x^m = \frac{x\, A_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

Θεώρημα 20.8.

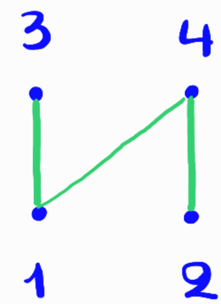
$$\sum_{m\geq 0} \bar{\Omega}(P,m)\, x^m = \frac{\displaystyle\sum_{w\in \mathcal{L}(P,\omega)} x^{1+\mathrm{asc}(w)}}{(1-x)^{n+1}}$$

όπου $\mathrm{asc}(w) = n-1-\mathrm{des}(w)$ για $w \in \mathfrak{S}_n$.

<u>Απόδειξη</u> (ΣΧΕΔΙΟ). Θεωρούμε τη συλλογή $\Lambda(m,n)$ της απόδειξης του Θεωρήματος 20.2 και συμβολίζουμε με $\bar{\Gamma}(m,n)$ το σύνολο των $\sigma \in \Lambda(m,n)$ με τις εξής ιδιότητες:

- αν $\omega^{-1}(i) <_p \omega^{-1}(j)$, τότε το i εμφανίζεται στα αριστερά του j στη σ και ανάμεσά τους παρεμβάλλεται ένα τουλάχιστον σύμβολο $\circ$,
- για $1 \leq i < j \leq n$, το j δεν είναι το αμέσως δεξιά στοιχείο του i στη σ.

Π.χ. αν $m=5$ και

$(P,\omega) =$ 

τότε η

$$0 \; 1 \; 0 \; 3 \; 2 \; 0 \; 4 \; 0$$

ανήκει στη $\bar{F}(m,n)$, αλλά όχι οι

$$0 \; 1 \; 0 \; 2 \; 3 \; 0 \; 4 \; 0$$
$$0 \; 2 \; 0 \; 3 \; 1 \; 0 \; 4 \; 0 \, .$$

Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 20.2 βρίσκουμε ότι $\bar{\Omega}(P,m) = \# \bar{F}(m,n)$,

$$\# \bar{\Gamma}(m,n) = \sum_{w \in \mathcal{L}(P,\omega)} \# \bar{\Gamma}_w(m,n)$$

και

$$\sum_{m \geq 0} \# \bar{\Gamma}_w(m,n)\, x^{m-1} = \frac{x^{asc(w)}}{(1-x)^{n+1}}. \blacksquare$$

Θεώρημα 20.9 (Θεώρημα αντιστροφής για το πολυώνυμο της διάταξης).

$$\Omega(P,-m) = (-1)^n\, \bar{\Omega}(P,m) \qquad (20.4)$$

για κάθε $m \in \mathbb{Z}$.

Π.χ. αν το P είναι αλυσίδα, αυτό σημαίνει ότι $\binom{-m}{n} = (-1)^n \binom{m+n-1}{n}$.

Λήμμα 20.10. Αν για την $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$

$$F(x) := \sum_{m \geq 0} f(m)\, x^m = \frac{h_0 + h_1 x + \cdots + h_d x^d}{(1-x)^{n+1}}$$

για κάποιο $d \leq n$, τότε το $f(m)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ στο m και

$$(20.5) \quad \sum_{m \geq 1} f(-m)\, x^m = -F(1/x)$$

$$= \frac{(-1)^n \, x^{n-d+1} \, (h_d + h_{d-1} x + \cdots + h_0 x^d)}{(1-x)^{n+1}}.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 20.9. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 20.10 στην Πρόταση 20.2

$$\sum_{m\geq 0} \Omega(P,m)\, x^m = \frac{x W_P(x)}{(1-x)^{n+1}}$$

παίρνουμε

$$\sum_{m\geq 1} \Omega(P,-m)\, x^m = -\frac{\frac{1}{x} W_P(1/x)}{(1-\frac{1}{x})^{n+1}}$$

$$= \frac{(-x)^n}{(1-x)^{n+1}} \sum_{w\in \mathcal{L}(P,\omega)} x^{-\mathrm{des}(w)}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(1-x)^{n+1}} \sum_{w \in \mathcal{L}(P,\omega)} x^{1+\operatorname{asc}(w)}$$

$$= (-1)^n \sum_{m \geq 0} \bar{\Omega}(P,m)\, x^m,$$

όπου η τελευταία ισότητα οφείλεται στο Θεώρημα 20.8. ∎

Ένα πολυώνυμο

$$p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_d x^d$$

λέγεται παλινδρομικό (με κέντρο $d/2$) αν $p_i = p_{d-i}$ για $i \in \{0,1,\ldots,d\}$.

Πόρισμα 20.11. Το $W_P(x)$ είναι παλινδρομικό εάνν

$$\Omega(P,-m-r) = (-1)^n\,\Omega(P,m) \qquad (20.6)$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$, όπου $r = r(P)$.

Ειδικότερα, αυτό ισχύει για κάθε διαβαθμισμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P τάξης r.

Απόδειξη. Η πρώτη πρόταση προκύπτει εφαρμόζοντας την (20.5) στο $f(m) = \Omega(P,m)$. Για τη δεύτερη πρόταση παρατηρούμε ότι, λόγω του Θεωρήματος

20.9, η (20.6) γράφεται ισοδύναμα

$$\bar{\Omega}(P, m+r) = \Omega(P, m)$$

και είναι φανερή για διαβαθμισμένο P τάξης r. ∎