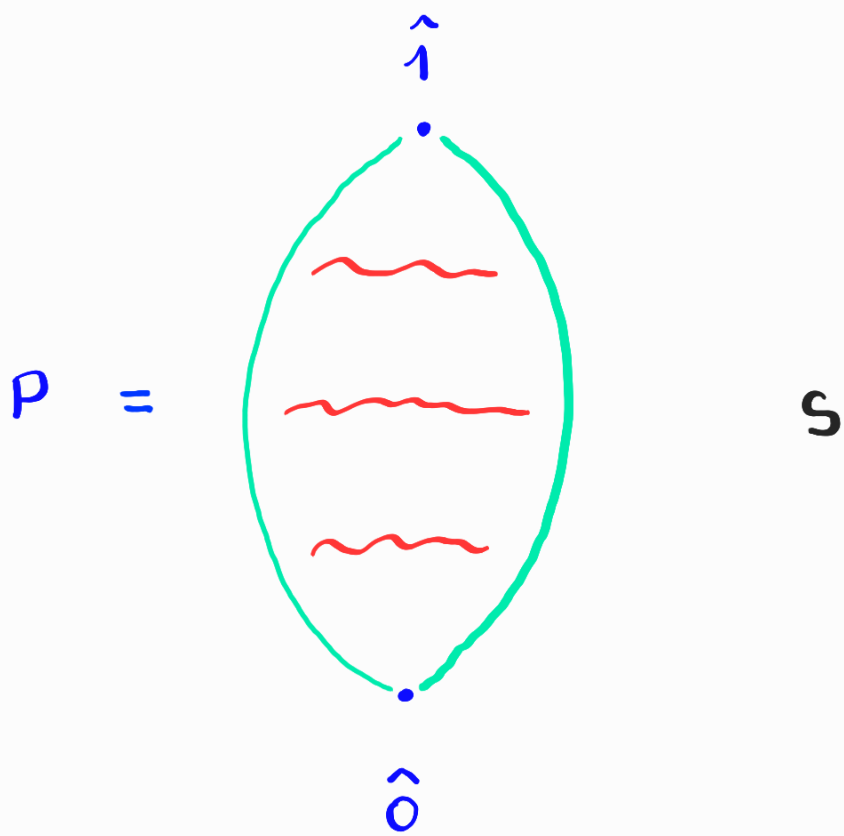
19. Επιλογή τάξης

Έστω διαβαθμισμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P τάξης n, με μέγιστο στοιχείο $\hat{1}$ και ελάχιστο $\hat{0}$, και συνάρτηση τάξης $\rho : P \to \{0,1,\ldots,n\}$.



Για $S \subseteq [n-1]$ συμβολίζουμε με $\alpha_P(S)$ το πλήθος των αλυσίδων

$$\hat{0} < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \hat{1}$$

του P με $\{\rho(t_i) : i \in [k]\} = S$. Π.χ.

- $\alpha_P(\emptyset) = 1$
- $\alpha_P(\{i\}) = \#\{t \in P : \rho(t) = i\}$
- $\alpha_P([n-1]) = \#$ μεγιστικών αλυσίδων του P

Επίσης, θέτουμε

$$\beta_P(T) = \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|T \setminus S|} \alpha_P(S) \qquad (19.1)$$

για $T \subseteq [n-1]$ ή, ισοδύναμα,

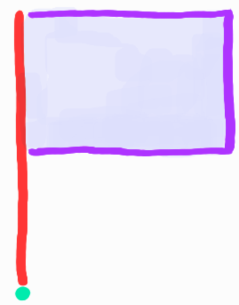
$$\alpha_P(T) = \sum_{S \subseteq T} \beta_P(S) \qquad (19.2)$$

για $T \subseteq [n-1]$.

Ορολογία. Τα

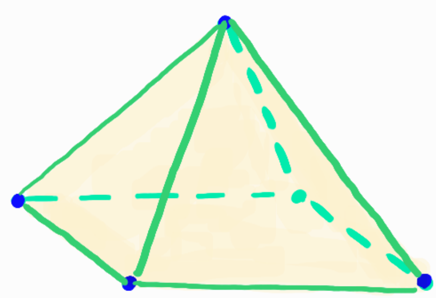
- $(\alpha_P(S))_{S \subseteq [n-1]}$
- $(\beta_P(S))_{S \subseteq [n-1]}$

λέγονται flag f-διάνυσμα και flag h-διάνυσμα του P, αντίστοιχα.



flag

π.χ. αν P είναι ο σύνδεσμος των πλευρών της τετραγωνικής πυραμίδας, τότε



S	∅	1	2	3	12	13	23	123
$\alpha_P(S)$	1	5	8	5	16	16	16	32
$\beta_P(S)$	1	4	7	4	4	7	4	1

Παρατήρηση 19.1. Θεωρώντας την υποδιάταξη

$$P_S = \{ t \in P : \rho(t) \in S \} \sqcup \{ \hat{0}, \hat{1} \} \qquad (19.3)$$

της P έχουμε

- $\alpha_P(S) = \#$ μεγιστικών αλυσίδων του P_S

- $\beta_P(S) = (-1)^{|S|-1} \mu_{P_S}(\hat{0}, \hat{1})$

(λόγω του Θεωρήματος 10.10).

Παρατήρηση 19.2. Θέτοντας $\bar{P} = P \setminus \{ \hat{0}, \hat{1} \}$, για το σύμπλεγμα της διάταξης $\Delta(\bar{P})$

έχουμε

$$f_{i-1}(\Delta(\bar{P})) = \sum_{\substack{S \subseteq [n-1] \\ \# S = i}} \alpha_p(S) \qquad (19.4)$$

και συνεπώς

$$\sum_{i=0}^{n} h_i(\Delta(P))\, x^i = \sum_{i=0}^{n} f_{i-1}(\Delta(\bar{P}))\, x^i (1-x)^{n-i}$$

$$= \sum_{T \subseteq [n-1]} \alpha_p(T)\, x^{|T|} (1-x)^{n-|T|}$$

$$= \sum_{S \subseteq T \subseteq [n-1]} \beta_p(S)\, x^{|T|} (1-x)^{n-|T|}$$

$$= \sum_{S \subseteq [n-1]} \beta_P(S)\, x^{|S|}$$

οπότε

$$h_i(\Delta(\bar{P})) = \sum_{\substack{S \subseteq [n-1] \\ \# S = i}} \beta_P(S). \qquad (19.5)$$

Ερώτημα:

(α) Για ποια P έχουμε $\beta_P(S) \geq 0$ για κάθε $S \subseteq [n-1]$;

(β) Για ποια P έχουμε

$$\beta_P(S) = \beta_P([n-1] \setminus S)$$

για κάθε $S \subseteq [n-1]$;

Ορισμός 19.3. Μια επιγραφή ακμών $\lambda : C(P) \longrightarrow \Lambda$ λέγεται R-επιγραφή αν κάθε διάστημα $[x,y]$ του P με $x<y$ έχει μοναδική αύξουσα μεγιστική αλυσίδα (ως προς τη λ).

Πρόταση 19.4. Αν $\lambda : C(P) \to \Lambda$ είναι R-επιγραφή, τότε το $\beta_P(S)$ ισούται με το πλήθος των μεγιστικών αλυσίδων m του P με $\mathrm{Des}_\lambda(m) = S$ για κάθε $S \subseteq [n-1]$. Ειδικότερα,

$$\beta_P(S) = (-1)^{|S|-1} \mu_{P_S}(\hat{0},\hat{1}) \geq 0.$$

για κάθε $S \subseteq [n-1]$.

Απόδειξη Έστω $\gamma_P(S)$ το πλήθος των μεγιστικών αλυσίδων m του P με σύνολο καθόδων $\mathrm{Des}_\lambda(m) = S$. Αφού η λ είναι R-επιγραφή, κάθε αλυσίδα

$$\hat{0} < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = \hat{1}$$

του P με $\{\rho(t_i) : i \in [k]\} = T$ επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο σε μεγιστική αλυσίδα m του P με $\mathrm{Des}_\lambda(m) \subseteq T$. Έπεται ότι

- $\alpha_P(T) = \#$ μεγιστικών αλυσίδων m του P με $\mathrm{Des}_\lambda(m) \subseteq T$

$$= \sum_{S \subseteq T} \gamma_P(S)$$

για κάθε $T \subseteq [n-1]$. Από αυτές τις ισότητες και τις (19.2) έπεται ότι $\beta_P(S) = \gamma_P(S)$ για κάθε $S \subseteq [n-1]$. ■

Εφαρμόζοντας την πρόταση στην EL-επιγραφή της Πρότασης 16.10 προκύπτει το εξής αποτέλεσμα.

Πόρισμα 19.5. Έστω μερική διάταξη Q με n στοιχεία, έστω 1-1 αντιστοιχία $\omega : Q \to [n]$ που διατηρεί τη διάταξη και έστω $P = J(Q)$ ο επιμεριστικός σύνδεσμος των ιδεωδών του Q. Τότε,

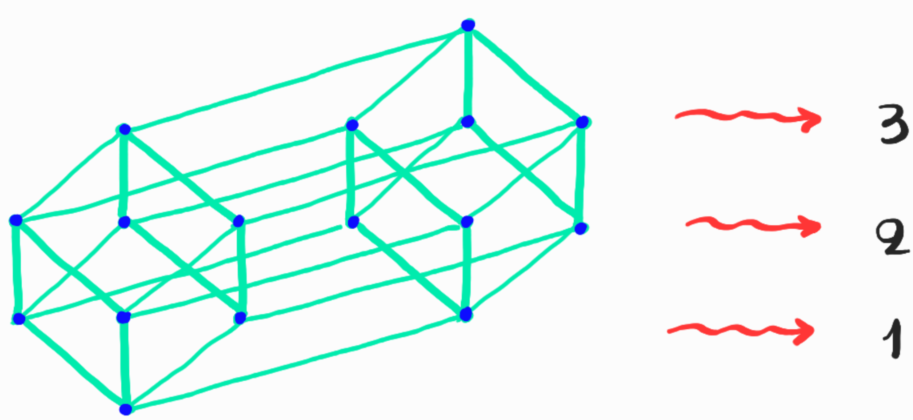
$$\beta_P(S) = \#\{\sigma \in \mathcal{L}(Q,\omega) : \mathrm{Des}(\sigma) = S\}$$

για κάθε $S \subseteq [n-1]$. Ειδικότερα, για $P = B_n$,

$$\beta_P(S) = \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \mathrm{Des}(\sigma) = S\}$$

για κάθε $S \subseteq [n-1]$.

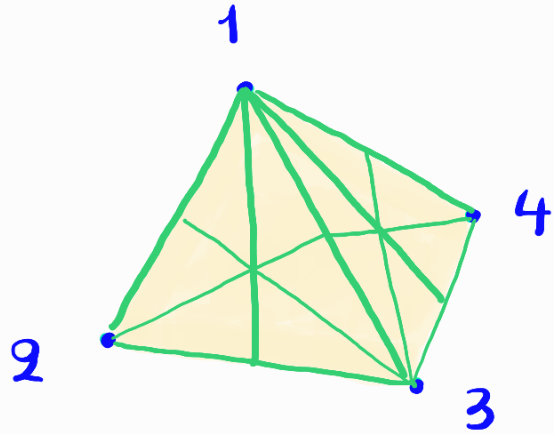
Παράδειγμα 19.6. Για $P = B_4$



υπολογίζουμε ότι

S	$\emptyset$	1	2	3	12	13	23	123
$\alpha_p(S)$	1	4	6	4	12	12	12	24
$\beta_p(S)$	1	3	5	3	3	5	3	1

Παράδειγμα 19.7 Ας συμβολίσουμε με Δ_n τη βαρυκεντρική υποδιαίρεση του συμπλέγματος των γνήσιων πλευρών του μονόπλοκου $2^{[n]}$.



$n = 4$

Έχουμε $\Delta_n = \Delta(\bar{P})$, όπου $P = B_n$ είναι το (μερικώς διατεταγμένο) σύνολο όλων των πλευρών του $2^{[n]}$. Από την (19.5) και το Πόρισμα 19.5 παίρνουμε

- $$h_k(\Delta_n) = \sum_{\substack{S \subseteq [n-1] \\ \# S = k}} \beta_P(S)$$

$$= \sum_{\substack{S \subseteq [n-1] \\ \# S = k}} \# \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \mathrm{Des}(\sigma) = S\}$$

$$= \# \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \mathrm{des}(\sigma) = k\}$$

για κάθε $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ και συνεπώς

- $$h(\Delta_n, x) = \sum_{k=0}^{n-1} h_k(\Delta_n) x^k = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x^{\operatorname{des}(\sigma)} = A_n(x)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. ∎

<u>Πρόταση 19.8.</u> Αν το P είναι αποφλοιώσιμο, τότε το ίδιο ισχύει για το P_S για κάθε $S \subseteq [n-1]$. Ειδικότερα,

$$\beta_P(S) = (-1)^{|S|-1} \mu_{P_S}(\hat{0}, \hat{1}) \geq 0$$

για κάθε $S \subseteq [n-1]$.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια αποφλοίωση $m_1, m_2, \ldots, m_t$ του P. Οι μεγιστικές αλυσίδες του P είναι οι

$$m_1 \cap P_S, \; m_2 \cap P_S, \ldots, m_t \cap P_S.$$

Για δύο τέτοιες, έστω c και c', θέτουμε $c <_\omega c'$ αν $i < i'$, όπου i και i' είναι οι μικρότεροι ακέραιοι τέτοιοι ώστε

$$m_i \cap P_S = c \quad \text{και} \quad m_{i'} \cap P_S = c',$$

αντίστοιχα. Η $<_\omega$ είναι μια ολική διάταξη των μεγιστικών αλυσίδων του P_S. Θα δείξουμε ότι είναι αποφλοίωση επα-

ληθεύοντας τη συνθήκη της Παρατή-
ρησης 17.2 (β).

Έστω ότι $c <_\omega c'$ και έστω $c = m_i \cap P_S$ και $c' = m_{i'} \cap P_S$, με $1 \leq i < i' \leq t$ όπως προηγουμένως. Τότε, υπάρχει $1 \leq j < i'$ τέτοιο ώστε

$$m_i \cap m_{i'} \subseteq m_j \cap m_{i'} = m_{i'} \setminus \{x\}$$

για κάποιο $x \in m_{i'}$. Από τον ορισμό του i' έπεται ότι $x \in P_S$ (διότι διαφορετικά θα είχαμε $m_j \cap P_S = m_{i'} \cap P_S$ με $j < i'$). Επομένως, θέτοντας $c_0 = m_j \cap P_S$ έχουμε

- $c_0 <_\omega c'$
- $c \cap c' \subsetneq c_0 \cap c'$
- $c_0 \cap c' = c' \setminus \{x\}$ με $x \in c'$

και η $<_\omega$ είναι αποφλοίωση του P_S. Ο τελευταίος ισχυρισμός της πρότασης έπεται από την Πρόταση 17.3. ■

Επιστρέφουμε τώρα στις μερικές διατάξεις του Euler.

Θεώρημα 19.9. Αν το P είναι μερική διάταξη του Euler, τότε

$$\beta_P(S) = \beta_P([n-1] \setminus S)$$

για κάθε $S \subseteq [n-1]$.

Λήμμα 19.10. Για κάθε $x \in \bar{P} = P \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$

$$\mu_{P-x}(\hat{0}, \hat{1}) = \mu_P(\hat{0}, \hat{1}) - \mu_P(\hat{0}, x)\, \mu_P(x, \hat{1}),$$

όπου $P-x$ είναι η επαγόμενη μερική διάταξη στο $P \setminus \{x\}$.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 10.10 αρκετές φορές βρίσκουμε ότι

- $$\mu_P(\hat{0}, \hat{1}) = \sum_{C \in \Delta(\bar{P})} (-1)^{|C|-1}$$

$$= \sum_{\substack{C \in \Delta(\bar{P}) \\ x \notin C}} (-1)^{|C|-1} + \sum_{\substack{C \in \Delta(\bar{P}) \\ x \in C}} (-1)^{|C|-1}$$

$$= \sum_{C \in \Delta(\bar{P} \setminus x)} (-1)^{|C|-1} + \sum_{\substack{C_1 \in \Delta(\hat{0}, x) \\ C_2 \in \Delta(x, \hat{1})}} (-1)^{|C_1| + |C_2|}$$

$$= \mu_{P-x}(\hat{0}, \hat{1}) + \mu_P(\hat{0}, x)\, \mu_P(x, \hat{1}).$$

■

Πρόταση 19.11. Για κάθε $Q \subseteq P$ που περιέχει τα $\hat{0}$ και $\hat{1}$, εφοδιασμένο με την επαγόμενη μερική διάταξη από το P,

$$\mu_Q(\hat{0}, \hat{1}) = \sum (-1)^k \mu_P(\hat{0}, x_1)\, \mu_P(x_1, x_2) \cdots \mu_P(x_k, \hat{1})$$

όπου το άθροισμα διατρέχει όλες τις αλυσίδες $\hat{0} < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < \hat{1}$ του P με $x_i \notin Q$ για $1 \leq i \leq k$.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 19.10 με επαγωγή στο $\#(P \setminus Q)$. $\blacksquare$

Απόδειξη του Θεωρήματος 19.9. Θέτουμε $\bar{S} = [n-1] \setminus S$. Από την Παρατήρηση 19.1 έχουμε

- $\beta_P(S) = (-1)^{|S|-1} \mu_{P_S}(\hat{0}, \hat{1})$
- $\beta_P(\bar{S}) = (-1)^{|\bar{S}|-1} \mu_{P_{\bar{S}}}(\hat{0}, \hat{1})$

όπου

- $P_S = \{ t \in P : \rho(t) \in S \} \sqcup \{\hat{0}, \hat{1}\}$
- $P_{\bar{S}} = \{ t \in P : \rho(t) \in \bar{S} \} \sqcup \{\hat{0}, \hat{1}\}$.

Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mu_Q(\hat{0}, \hat{1}) = (-1)^{n-1} \mu_{\bar{Q}}(\hat{0}, \hat{1}), \qquad (19.6)$$

όπου $\bar{Q} = (P \setminus Q) \sqcup \{\hat{0}, \hat{1}\}$. Πράγματι, αφού η P είναι μερική διάταξη του Euler, έχουμε

$$\mu_P(\hat{0}, x_1)\, \mu_P(x_1, x_2) \cdots \mu_P(x_k, \hat{1}) = (-1)^n$$

για κάθε αλυσίδα $\hat{0} < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < \hat{1}$ στο P. Κατά συνέπεια, η (19.6) προκύπτει από την Πρόταση 19.11 και το Θεώρημα 10.10 για το $\bar{Q}$. $\blacksquare$