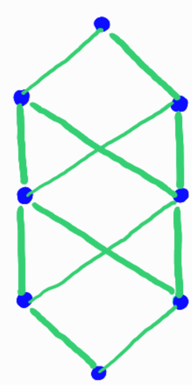
18. Μερικές διατάξεις του Euler (συνέχεια)

Θα δείξουμε το εξής:

<u>Πρόταση 18.6.</u> Το

$$\widehat{P(C)} = P(C) \sqcup \{\hat{0}, \hat{1}\}$$

είναι μερική διάταξη του Euler για κάθε κανονική CW-σφαίρα C.



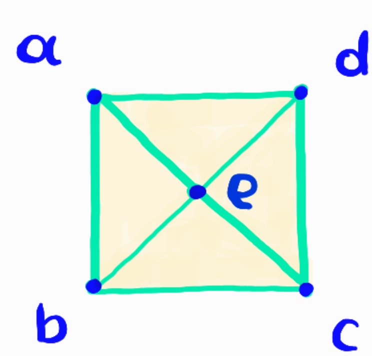
Θα χρειαστούμε ένα λήμμα από την τοπολογία.

Ορισμός 18.7. Έστω (αφηρημένο) μονοπλεκτικό σύμπλεγμα Δ και πλευρά του $F \in \Delta$. Το υποσύμπλεγμα

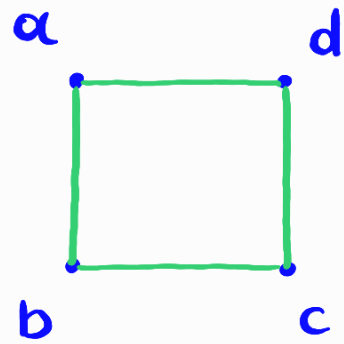
$$\operatorname{link}_{\Delta}(F) = \{ G \setminus F : F \subseteq G \in \Delta \}$$

του Δ λέγεται ζεύγμα της F στο Δ.

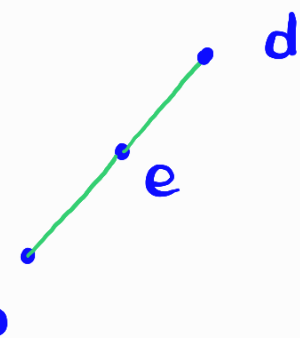
Π.χ. $\operatorname{link}_{\Delta}(\varnothing) = \Delta$ και για

$\Delta =$ 

$\mathrm{link}_\Delta(\{e\}) =$



$\mathrm{link}_\Delta(\{a\}) =$



$\mathrm{link}_\Delta(\{a,e\}) =$

Ορισμός 18.8. Το Δ λέγεται σύμπλεγμα του Euler αν

$$\tilde{\chi}(\mathrm{link}_\Delta(F)) = (-1)^{\dim \mathrm{link}_\Delta(F)}$$

για κάθε $F \in \Delta$.

Λήμμα 18.9. Έστω ότι το $\|\Delta\|$ είναι ομοιομορφικό με τη σφαίρα $\mathbb{S}^{d-1}$ (λέμε επίσης ότι το Δ είναι τριγωνοποίηση αυτής της σφαίρας). Τότε,

$$\tilde{H}(\mathrm{link}_\Delta(F); \mathbb{Q}) \cong \tilde{H}(\mathbb{S}^{d-1-|F|}; \mathbb{Q})$$

για κάθε $F \in \Delta$. Ειδικότερα, το Δ είναι σύμπλεγμα του Euler.

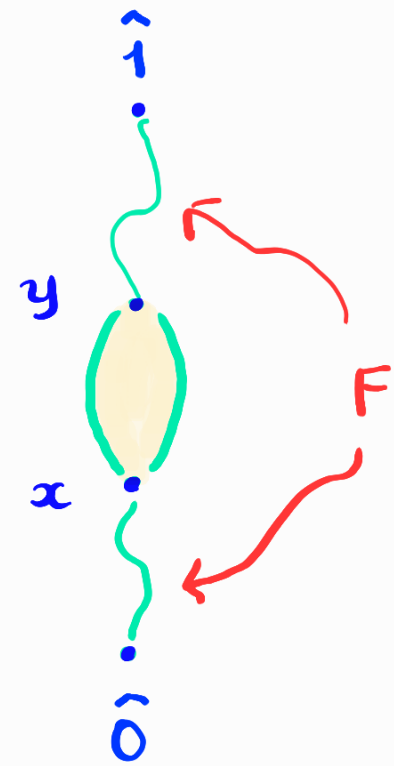
Απόδειξη της Πρότασης 18.6. Το $P(C)$ είναι διαβαθμισμένο με συνάρτηση τάξης $\rho(\sigma) = \dim(\sigma)$, για κάθε $\sigma \in C$ (λόγω του

Ορισμού 18.4) και συνεπώς το $\widehat{P(C)}$ εί-
ναι επίσης διαβαθμισμένο.

Έστω $x, y \in \widehat{P(C)}$ με $x < y$ και έστω $\Delta = \Delta(P(C))$. Το Δ είναι ομοιομορφικό με το C και συνεπώς με σφαίρα της ίδιας διάστασης, και

$$\mu_{\widehat{P(C)}}(x, y) = \tilde{\chi}(\Delta(x, y))$$

από την Πρόταση 15.3. Αν F είναι η ένωση μιας μεγιστικής αλυσίδας του $[\hat{0}, x]$ και μιας του $[y, \hat{1}]$, τότε



$\Delta(x,y) = \mathrm{link}_\Delta(F)$. Από αυτό και το Λήμμα 18.9 συμπεραίνουμε ότι

- $$\mu_{\widehat{P(C)}}(x,y) = \tilde{\chi}(\Delta(x,y))$$
$$= \tilde{\chi}(\mathrm{link}_\Delta(F))$$
$$= (-1)^{\dim \mathrm{link}_\Delta(F)}$$

$$= (-1)^{\dim \Delta(x,y)}$$

$$= (-1)^{\rho(x,y)}. \quad \blacksquare$$

Πόρισμα 18.10. Για κάθε κανονική CW-σφαίρα C διάστασης d

$$\sum_{i=0}^{d} (-1)^i f_i(C) = 1 + (-1)^d$$

όπου $f_i(C)$ είναι το πλήθος των πλευρών διάστασης i της C.

Απόδειξη. Έπεται από την Πρόταση 18.6 και τη βασική ιδιότητα της συνάρτησης Möbius

$$\sum_{x \in \widehat{P(C)}} \mu_{\widehat{P(C)}}(\hat{0}, x) = 0.$$ ■

Π.χ.

- $f_0 - f_1 = 0$, για $d=1$
- $f_0 - f_1 + f_2 = 2$, για $d=2$
- $f_0 - f_1 + f_2 - f_3 = 0$, για $d=3$
- $f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + f_4 = 2$, για $d=4$

κ.ο.κ.

Ας επικεντρωθούμε τώρα στην περίπτωση στην οποία η σφαίρα C είναι simplicial (π.χ. είναι συνδυαστικά ισοδύναμη με μονοπλεκτικό σύμπλεγμα

Δ). Ποιες άλλες σχέσεις συνδέουν τους αριθμούς f_i;

Ορισμός 18.11. Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο Q με ελάχιστο στοιχείο $\hat{0}_Q$ λέγεται μονοπλεκτικό (simplicial) αν το κλειστό διάστημα $[\hat{0}_Q, x]$ του Q είναι ισόμορφο με την άλγεβρα Boole κατάλληλης τάξης για κάθε $x \in Q$. Θέτουμε

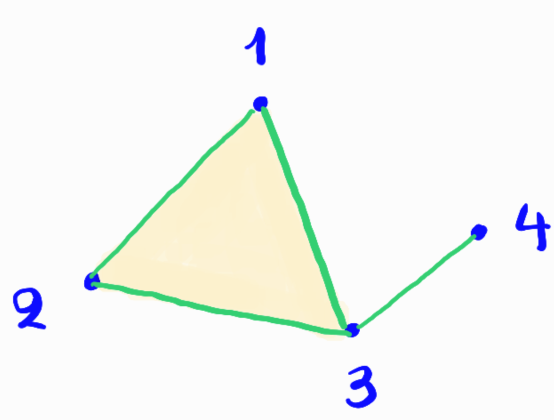
$$f_{k-1}(Q) = \# \{ x \in Q : [\hat{0}_Q, x] \cong B_k \}$$

για $k \in \mathbb{N}$.

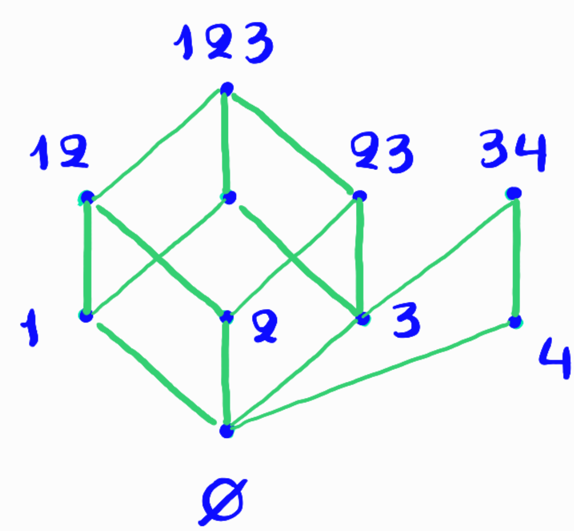
Μια μερική διάταξη του Euler, έστω P, λέγεται μονοπλεκτική (simplicial) αν το $P \setminus \{\hat{1}_P\}$ είναι μονοπλεκτικό μερικώς διατεταγμένο σύνολο.

Παράδειγμα 18.12.

(α) Το $Q = P(\Delta) \sqcup \{\hat{0}\}$ είναι μονοπλεκτικό για κάθε μονοπλεκτικό σύμπλεγμα Δ και $f_{k-1}(Q) = f_{k-1}(\Delta)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

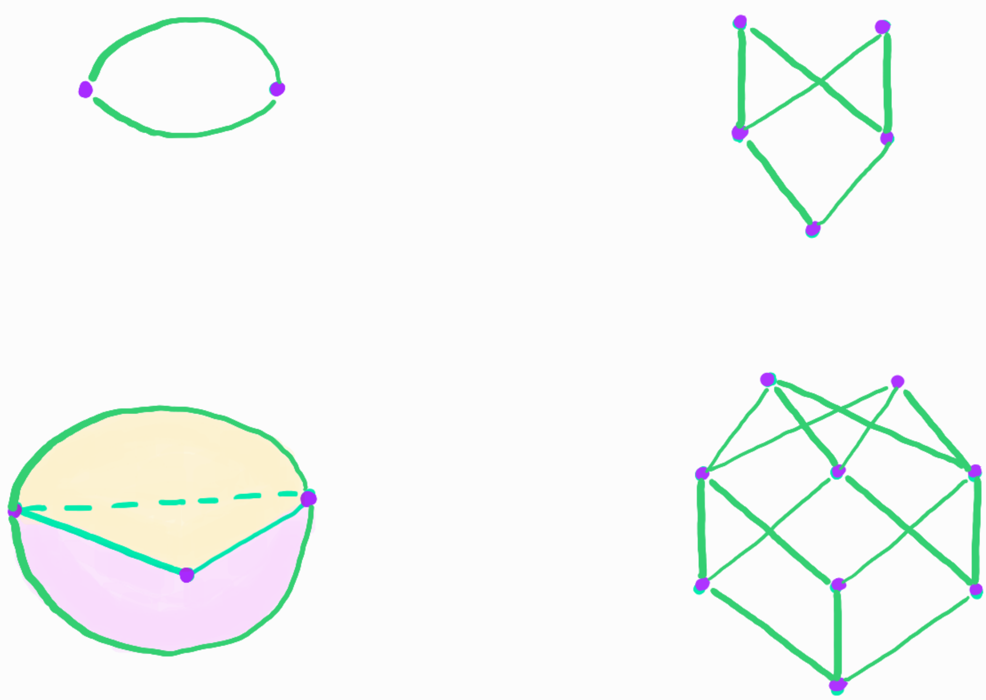


Δ



Q

Γενικότερα, ένα κανονικό CW-σύμπλεγμα C λέγεται μονοπλεκτικό αν το $P(C) \sqcup \{\hat{0}\}$ είναι μονοπλεκτικό, δηλαδή αν κάθε πλευρά του C είναι συνδυαστικά ισοδύναμη με μονόπλοκο.



simplicial σφαίρες και διατάξεις

(β) Το $\widehat{P(C)}$ είναι μονοπλεκτική μερική διάταξη του Euler για κάθε μονοπλεκτική σφαίρα C.

Θεώρημα 18.13 (εξισώσεις Dehn-Somerville)

Έστω μερική διάταξη του Euler τάξης $d+1$. Αν το $Q = P \setminus \{\hat{1}_P\}$ είναι μονοπλεκτικό, τότε

$$\sum_{i=0}^{d} f_{i-1} (x-1)^{i} = \sum_{i=0}^{d} (-1)^{d-i} f_{i-1} x^{i}, \quad (18.1)$$

όπου $f_{i-1} = f_{i-1}(Q)$ για $0 \leq i \leq d$.

Μαζί με την $f_{-1}=1$, η (18.1) δίνει ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων στα f_i οι οποίες λέγονται εξισώσεις Dehn-Sommerville (μια από αυτές είναι η σχέση Euler-Poincaré του Πορίσματος 18.10).

$d=2$ $\qquad f_0 - f_1 = 0$

$d=3$ $\qquad \begin{cases} f_0 - f_1 + f_2 = 2 \\ 2f_1 - 3f_2 = 0 \end{cases}$

$d=4$ $\qquad \begin{cases} f_0 - f_1 + f_2 - f_3 = 0 \\ f_2 - 2f_3 = 0 \end{cases}$

$d=5$ $\qquad \begin{cases} f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + f_4 = 2 \\ 2f_1 - 3f_2 + 4f_3 - 5f_4 = 0 \\ 2f_3 - 5f_4 = 0. \end{cases}$

Οι (18.1) μπορούν να εκφραστούν απλούστερα ως προς το h-διάνυσμα ως εξής. Το h-διάνυσμα $(h_0, h_1, \dots, h_d)$ του $Q = P \setminus \{1_P\}$ ορίζεται από την ισότητα

$$\sum_{i=0}^{d} h_i x^i = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1} x^i (1-x)^{d-i}. \qquad (18.2)$$

Θέτοντας όπου x το $1/x$ στη (18.1) και πολλαπλασιάζοντας με x^d παίρνουμε

$$\sum_{i=0}^{d} f_{i-1} x^{d-i} (1-x)^{i} = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1} (-x)^{d-i}.$$

Θέτοντας όπου x το $1/x$ παίρνουμε

$$\sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(x-1)^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1} x^i (1-x)^{d-i},$$

ισότητα η οποία γράφεται $x^d h(Q, 1/x) = h(Q, x)$, όπου

- $$h(Q,x) := \sum_{i=0}^{d} f_{i-1} x^i (1-x)^{d-i}$$
$$= \sum_{i=0}^{d} h_i x^i$$

και μεταφράζεται στις ισότητες $h_i = h_{d-i}$ για $0 \leq i \leq d$.

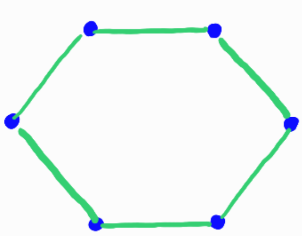
Πόρισμα 18.14. Για κάθε μονοπλεκτική CW-σφαίρα C διάστασης $d-1$ έχουμε

$$h_i(C) = h_{d-i}(C), \qquad 0 \le i \le d$$

όπου

$$\sum_{i=0}^{d} h_i(C)\, x^i = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(C)\, x^i (1-x)^{d-i}.$$

Ειδικότερα, $h_i(\Gamma) = h_{d-i}(\Gamma)$ για $0 \le i \le d$ για κάθε γεωμετρικό μονοπλεκτικό σύμπλεγμα Γ που τριγωνοποιεί τη σφαίρα διάστασης $d-1$.

$\Gamma =$  $h(\Gamma, x) = 1 + 4x + x^2$

Υπενθυμίζουμε ότι το πολυώνυμο ζήτα $Z(P, m)$ απαριθμεί τις ασθενείς αλυσίδες $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{m-1}$ στο P.

Πρόταση 18.15. Αν P είναι μερική διάταξη του Euler τάξης n, τότε $Z(P, -m) = (-1)^n Z(P, m)$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m \in \mathbb{N}$. Τότε, όπως βρήκαμε στην απόδειξη της Πρότασης 14.2 (γ),

- $Z(P, -m) = \zeta_P^{-m}(\hat{0}, \hat{1}) = \mu_P^m(\hat{0}, \hat{1})$

$$= \sum_{\hat{0} \leq x_1 \leq \cdots \leq x_m = \hat{1}} \mu_P(\hat{0}, x_1) \cdots \mu_P(x_{m-1}, x_m)$$

$$= \sum_{\hat{0} \le x_1 \le \cdots \le x_m = \hat{1}} (-1)^{\rho(\hat{0}, x_1)} \cdots (-1)^{\rho(x_{m-1}, x_m)}$$

$$= \sum_{\hat{0} \le x_1 \le \cdots \le x_m = \hat{1}} (-1)^n = (-1)^n Z(P, m).$$

$\blacksquare$

Πρόταση 18.16. Αν Q είναι μονοπλεκτική μερική διάταξη, τότε

$$Z(Q, m) = \sum_{i \ge 0} f_{i-1}(Q)\,(m-1)^i.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in Q$, οπότε $[\hat{0}, x] \cong$

$\cong B_i$ για κάποιο $i \in \mathbb{N}$. Από το Παράδειγμα 14.3 γνωρίζουμε ότι το πλήθος των ασθενών αλυσίδων $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{m-1}$ στο Q με $x_{m-1} = x$ ισούται με $(m-1)^i$. Αθροίζοντας για $x \in Q$ προκύπτει το ζητούμενο. ■

<u>Απόδειξη</u> του <u>Θεωρήματος 18.13.</u> Για κάθε ασθενή αλυσίδα $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_m$ στο P έχουμε $x_m < \hat{1}$, ή $x_m = \hat{1}$. Κατά συνέπεια

$$Z(P, m+1) = Z(Q, m+1) + Z(P, m)$$

ή, ισοδύναμα,

$$Z(Q, m+1) = Z(P, m+1) - Z(P, m).$$

Από την Πρόταση 18.16 συμπεραίνουμε ότι

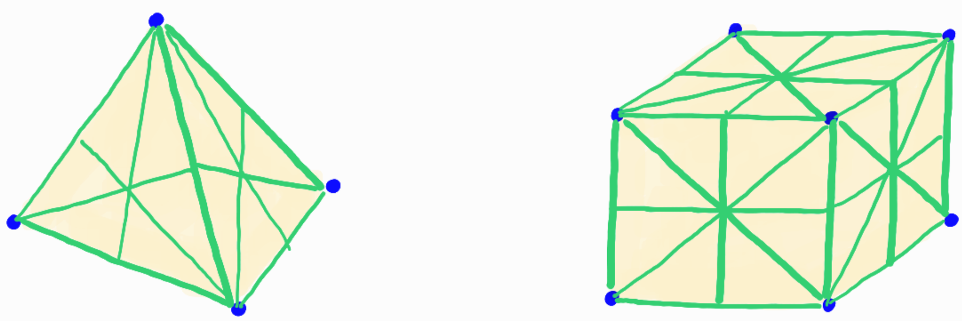
$$Z(P, m+1) - Z(P, m) = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(Q)\, m^i \quad (18.3)$$

Από την ισότητα $Z(P, -m) = (-1)^{d+1} Z(P, m)$ της Πρότασης 18.15 παίρνουμε

$$Z(P, -m+1) - Z(P, -m) =$$
$$= (-1)^d \{ Z(P, m) - Z(P, m-1) \}.$$

Από αυτήν και τη (18.3) έπεται το ζητούμενο. ■

Άσκηση 18.17. Αν Δ και Δ' είναι οι βαρυκεντρικές υποδιαιρέσεις του συμπλέγματος των γνήσιων πλευρών του μονόπλοκου και κύβου διάστασης 3, αντίστοιχα, δείξτε ότι



- $h(\Delta, x) = 1 + 11x + 11x^2 + x^3$
- $h(\Delta', x) = 1 + 23x + 23x^2 + x^3$.

Γενικεύστε σε κάθε διάσταση.

Παρατήρηση 18.18. Οι εξισώσεις (18.1) ισχύουν για κάθε μονοπλεκτικό σύμπλεγμα του Euler. Πράγματι, έστω τέτοιο σύμπλεγμα Δ διάστασης $d-1$ και έστω $Q = P(\Delta) \sqcup \{\hat{0}\}$ και $P = Q \sqcup \{\hat{1}\}$ (οπότε (η Q είναι μονοπλεκτική). Θα δείξουμε ότι η P είναι μερική διάταξη του Euler (οπότε εφαρμόζεται το Θεώρημα 18.13).

Έστω $x, y \in P$ με $x < y$. Θα δείξουμε ότι

$$\mu_P(x, y) = (-1)^{\rho(x, y)}.$$

Αυτό ισχύει για $y \neq \hat{1}$ αφού τότε το διάστημα $[x, y]$ είναι άλγεβρα του Boole.

Για $y = \hat{1}$ και $x = F \in \Delta$.

- $$\mu_P(x, \hat{1}) = \tilde{\chi}(\Delta(x, \hat{1})) = \tilde{\chi}(\mathrm{link}_\Delta(F))$$

αφού το $\Delta(x, \hat{1})$ είναι η βαρυκεντρική υποδιαίρεση του $\mathrm{link}_\Delta(F)$. Αφού το Δ είναι σύμπλεγμα του Euler, έπεται ότι

$$\mu_P(x, \hat{1}) = (-1)^{\dim \mathrm{link}_\Delta(F)} = (-1)^{\rho(x, \hat{1})}.$$