## 17. Αποφλοιώσιμες μερικές διατάξεις (συνέχεια)

Υπενθυμίζουμε ότι ένα διαβαθμισμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P, με ελάχιστο στοιχείο $\hat{0}_P$ και μέγιστο $\hat{1}_P$, λέγεται EL-αποφλοιώσιμο αν υπάρχει επιγραφή ακμών (EL-επιγραφή)

$$\lambda : C(P) \longrightarrow \Lambda$$

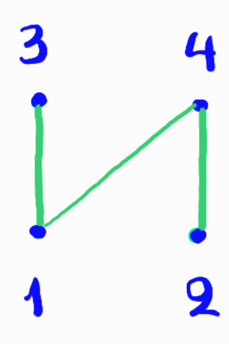
τέτοια ώστε για κάθε κλειστό διάστημα $[x, y]$ του P (με $x < y$):

(i) υπάρχει μοναδική αύξουσα μεγιστική αλυσίδα $c_{x,y}$ στο $[x,y]$

(ii) η $c_{x,y}$ είναι λεξικογραφικά μικρότερη από οποιαδήποτε άλλη μεγιστική αλυσίδα του $[x,y]$.

Έστω τώρα τυχαία μερική διάταξη $Q$ με $n$ στοιχεία και έστω $P = J(Q)$ ο επιμεριστικός σύνδεσμος των ιδεωδών του $Q$.

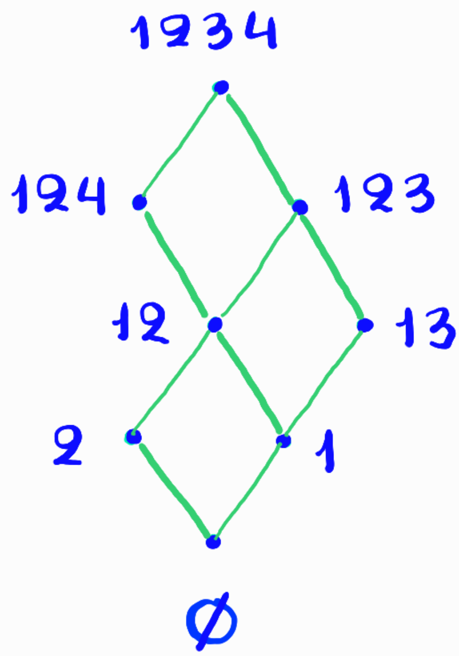
$(Q,\omega)$ =




$i = \omega^{-1}(q)$

Θεωρούμε μια 1-1 αντιστοιχία $\omega : Q \to [n]$ που διατηρεί τη διάταξη, δηλαδή $x <_Q y \Rightarrow \omega(x) < \omega(y)$.

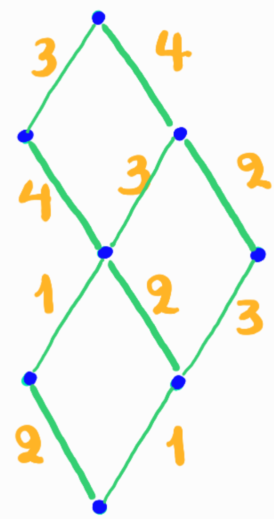
$J(Q) =$




Για ιδεώδη $I, I' \in P = J(Q)$, το $I'$ καλύπτει το $I$ εάνν $I' = I \cup \{x\}$ για κάποιο $x \in Q \setminus I$. Θέτοντας

$$\lambda(I, I') = \omega(x) \qquad (17.1)$$

ορίζεται μια $\Lambda$-επιγραφή (ακμών) $\lambda$: $C(P) \longrightarrow \Lambda = n$.

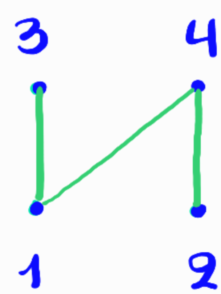



Έστω $\mathcal{L}(Q, \omega)$ το σύνολο των αναδιατάξεων $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ του $[n]$ με την ιδιότητα

$$\omega^{-1}(a_i) <_Q \omega^{-1}(a_j) \Rightarrow i<j$$

για $i,j \in [n]$. Το $\mathcal{L}(Q,\omega)$ λέγεται σύνολο Jordan-Hölder του $(Q,\omega)$. Για το

$(Q,\omega) =$




έχουμε $\mathcal{L}(Q,\omega) = \{1234, 1243, 2134, 2143, 1324\}$.

Σε κάθε μεγιστική αλυσίδα $m: \emptyset \subset I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n = Q$ του $P$ αντιστοιχεί η

$$\lambda(m) = (\lambda(I_0,I_1), \lambda(I_1,I_2), \dots, \lambda(I_{n-1},I_n)).$$

## Πρόταση 16.10

(α) Η απεικόνιση

$$m \rightsquigarrow \lambda(m)$$

είναι 1-1 αντιστοιχία από το σύνολο των μεγιστικών αλυσίδων του $P = J(Q)$ στο $\mathcal{L}(Q,\omega)$.

(β) Η $\lambda : C(P) \longrightarrow n$ είναι EL-επιγραφή.

**Απόδειξη.** (α) Είναι φανερό ότι για κάθε μεγιστική αλυσίδα $m$ του $P$, η $\lambda(m)$ είναι αναδιάταξη του $[n]$. Αντιστρόφως, μια αναδιάταξη $\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ του $[n]$ είναι της μορφής $\lambda(m)$ εάνν το

$$\{\omega^{-1}(a_1), \omega^{-1}(a_2), \dots, \omega^{-1}(a_j)\}$$

είναι ιδεώδες του $Q$ για κάθε $j \in [n]$. Αυτό ισχύει εάνν $\omega^{-1}(a_i) <_Q \omega^{-1}(a_j) \Rightarrow i<j$ για $i,j \in [n]$, δηλαδή εάνν $\sigma \in \mathcal{L}(Q,\omega)$.

(β) Παρατηρούμε ότι $(1,2,\dots,n) \in \mathcal{L}(Q,\omega)$. Η μεγιστική αλυσίδα $c$ του $J(Q)$ με $\lambda(c) = (1,2,\dots,n)$ είναι η μοναδική αύξουσα μεγιστική αλυσίδα του $P$ και προηγείται λεξικογραφικά των υπολοίπων, αφού αυτές είναι αναδιατάξεις του $[n]$. Για τυχαίο διάστημα $[I,I']$ του $P$ έχουμε $[I, I'] \cong J(I' \setminus I)$, όπου το $I' \setminus I$ έχει την επαγόμενη μερική διάταξη από το $Q$. ■

**Πόρισμα 17.11.** Για $I \leq I'$ στο $P = J(Q)$,

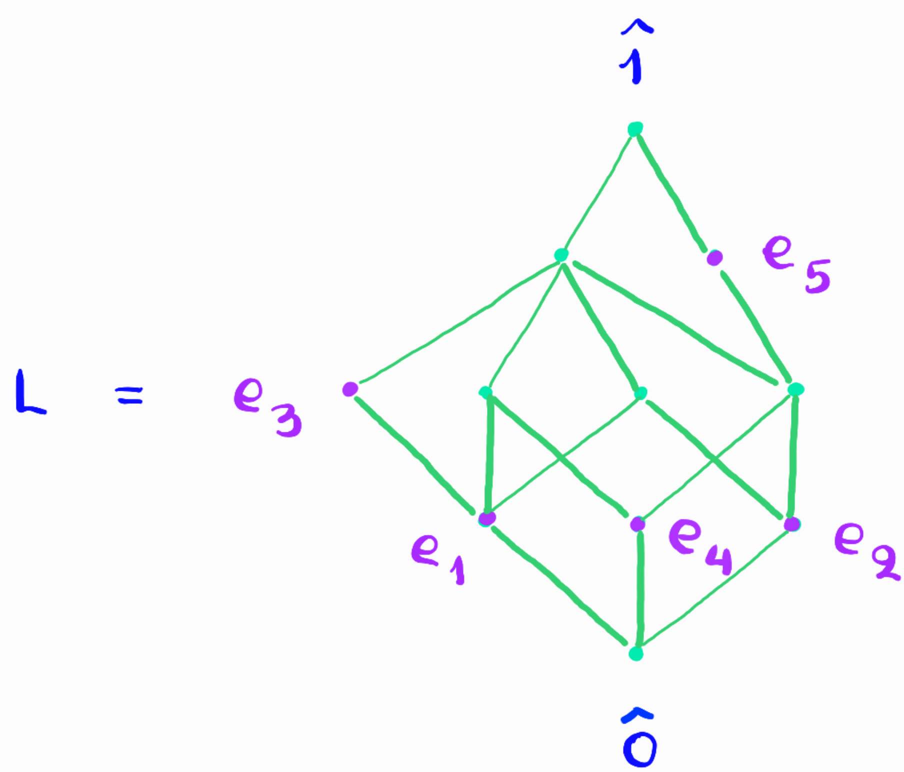
$$\mu_P(I, I') = \begin{cases} (-1)^{|I' \setminus I|}, & \text{αν το } I' \setminus I \text{ είναι αντιαλυσίδα στο } Q, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

**Απόδειξη.** Προκύπτει από την Πρόταση 17.10 και το Πόρισμα 17.8, με την παρατήρηση ότι $(n, n-1, \ldots, 2, 1) \in \mathcal{L}(Q, \omega)$

εάνν το Q είναι αντιαλυσίδα. ■

Έστω τώρα πεπερασμένος σύνδεσμος L με ελάχιστο στοιχείο $\hat{0}$ και μέγιστο $\hat{1}$. Το $x \in L \setminus \{\hat{0}\}$ λέγεται ανάγωγο (join irreducible) αν για $a, b \in L$

$$x = a \vee b \Rightarrow x = a \text{ ή } x = b$$



## Παρατήρηση 17.12.

**(α)** Κάθε $x \in L \setminus \{\hat{0}\}$ γράφεται στη μορφή $x = x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k$ για κάποια ανάγωγα $x_1, x_2, \ldots, x_k \in L$.

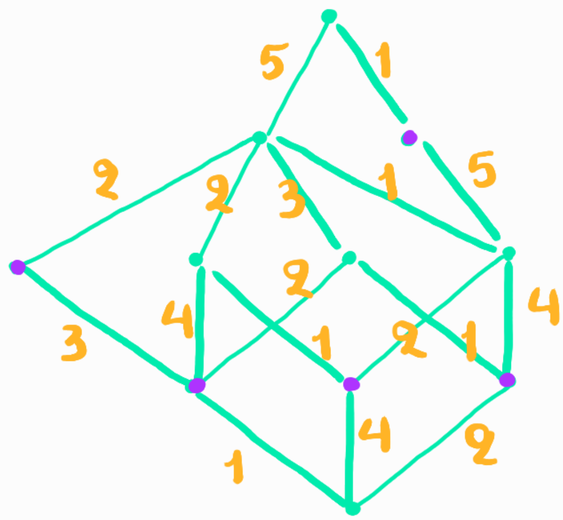
**(β)** Αν το $x \in L$ είναι ανάγωγο και $x = y_1 \vee y_2 \vee \cdots \vee y_k$ για κάποια $y_1, y_2, \ldots, y_k \in L$, τότε $x = y_i$ για κάποιο $i \in [k]$.

**(γ)** Αν το $x$ καλύπτεται από το $y$ στο $L$, τότε $y = x \vee e$ για κάποιο ανάγωγο στοιχείο $e \in L$. Πράγματι, από το (α) έχουμε $y = e_1 \vee e_2 \vee \cdots \vee e_k$ για κάποια ανάγωγα $e_1, e_2, \ldots, e_k \in L$ και προφανώς $e_i \nleq x$ για κάποιο $i$ (διαφορετικά θα είχαμε $y = e_1 \vee e_2 \vee \cdots \vee e_k \leq x$. Τότε, $x < x \vee e_i \leq y$ και συνεπώς $x \vee e_i = y$. ■

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο $L$ είναι διαβαθμισμένος με συνάρτηση τάξης $\rho : L \to \mathbb{N}$. Θεωρούμε αναδιάταξη $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ των ανάγωγων στοιχείων του με την ιδιότητα $e_i <_L e_j \Rightarrow i < j$. Θεωρούμε τη $\mathbb{Z}$-επιγραφή ακμών $\lambda : C(L) \to \mathbb{Z}$ με

$$\lambda(x, y) = \min\{ i : x \vee e_i = y \} \qquad (17.2)$$

για $(x, y) \in C(L)$.




**Θεώρημα 17.13** Αν ο L είναι semimodular σύνδεσμος, τότε η $\lambda$ είναι EL-επιγραφή. Ειδικότερα, κάθε semimodular σύνδεσμος είναι EL-αποφλοιώσιμος.

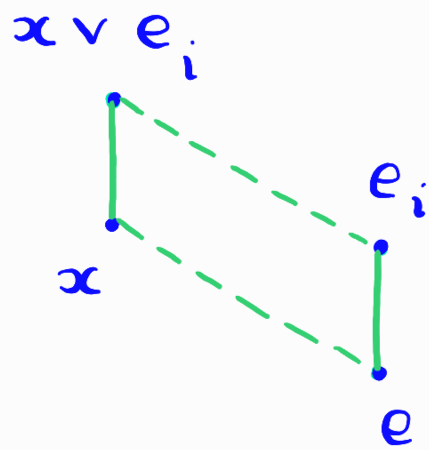
**Λήμμα 17.14** Έστω semimodular σύνδεσμος L και έστω $x <_L y$. Αν $i$ είναι ο ελάχιστος δείκτης με $e_i \not\leq x$ και $e_i \leq y$, τότε το $x \vee e_i$ καλύπτει το $x$.

Απόδειξη. Η ύπαρξη τέτοιου δείκτη προκύπτει από το (γ) της Παρατήρησης 17.12.

Αφού είναι ανάγωγο, το $e_i$ καλύπτει μοναδικό στοιχείο $e \in L$. Θα δείξουμε ότι $e \leq x$. Αυτό είναι φανερό αν $e = \hat{0}$. Διαφορετικά, μπορούμε να γράψουμε

$$e = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \cdots \vee e_{i_k}$$

για κάποια ανάγωγα $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k} \in L$. Τότε, $e_{i_j} \leq e < e_i \leq y$ για $j \in [k]$ και συνεπώς $i_j < i$ (λόγω της επιλογής της αναδιάταξης $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$) για $j \in [k]$. Επομένως, από την επιλογή του $e_i$ έχουμε $e_{i_j} \leq x$ για κάθε $j \in [k]$ και συνεπώς $e = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \cdots \vee e_{i_k} \leq x$.




Από τις $e_i > e$ και $x \geq e$ παίρνουμε ότι $e_i \wedge x \geq e$ και συνεπώς

- $$\begin{aligned} \rho(e_i \vee x) &\leq \rho(e_i) + \rho(x) - \rho(x \wedge e_i) \\ &\leq \rho(e_i) + \rho(x) - \rho(e) \end{aligned}$$

$$= \rho(x) + 1 .$$

Αφού προφανώς $x < x \vee e_i$, έπεται το ζητούμενο. ■

Απόδειξη του Θεωρήματος 17.13 Έστω ότι $x <_L y$ και ότι $k = \rho(x, y)$. Ορίζουμε τα στοιχεία $x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y$ του $[x, y]$ αναδρομικά, θέτοντας

$$x_j = x_{j-1} \vee e_{i_j}$$

για $j \in [k]$, όπου $i_j$ είναι ο ελάχιστος δείκτης $i$ με $e_i \leq y$ και $e_i \not\leq x_{i-1}$. Από το Λήμμα 17.14 έπεται ότι η

$$c : x = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = y$$

είναι μεγιστική αλυσίδα του $[x, y]$. Προφανώς $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq r$ και

$$\lambda(c) = (i_1, i_2, \ldots, i_k),$$

οπότε η $c$ είναι αύξουσα. Έστω μια άλλη μεγιστική αλυσίδα

$$c' : x = y_0 < y_1 < \cdots < y_k = y$$

του $[x, y]$ και έστω δείκτης $1 \leq s < k$ με $x_j = y_j$ για $0 \leq j < s$ και $x_s \neq y_s$. Τότε,

$$\lambda(c') = (i_1, \ldots, i_{s-1}, j_s, \ldots, j_k)$$

και $y_s = y_{s-1} \vee e_{j_s} = x_{s-1} \vee e_{j_s}$. Από την επιλογή του $x_s$ στην αλυσίδα $c$ παίρνουμε $i_s < j_s$ και συμπεραίνουμε ότι $c <_{lex} c'$. Επίσης,

$$i_s = \lambda(y_{t-1}, y_t) = j_t$$

για κάποιο $s < t \leq k$ (τον ελάχιστο δείκτη $t$ με $e_{i_s} \leq y_t$) και συνεπώς η $c'$ δεν είναι αύξουσα. ∎

# 18. Μερικές διατάξεις του Euler

Έστω ένα πεπερασμένο, μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(P, \leq)$, το οποίο είναι διαβαθμισμένο τάξης $n$, με ελάχιστο στοιχείο $\hat{0}_P$ και μέγιστο $\hat{1}_P$. Για $x, y \in P$ με $x \leq y$, ως συνήθως, γράφουμε $\rho(x,y) = \rho(y) - \rho(x)$, όπου $\rho : P \to \mathbb{N}$ είναι η συνάρτηση της τάξης.

**Ορισμός 18.1** Το $P$ λέγεται μερική διάταξη του Euler αν

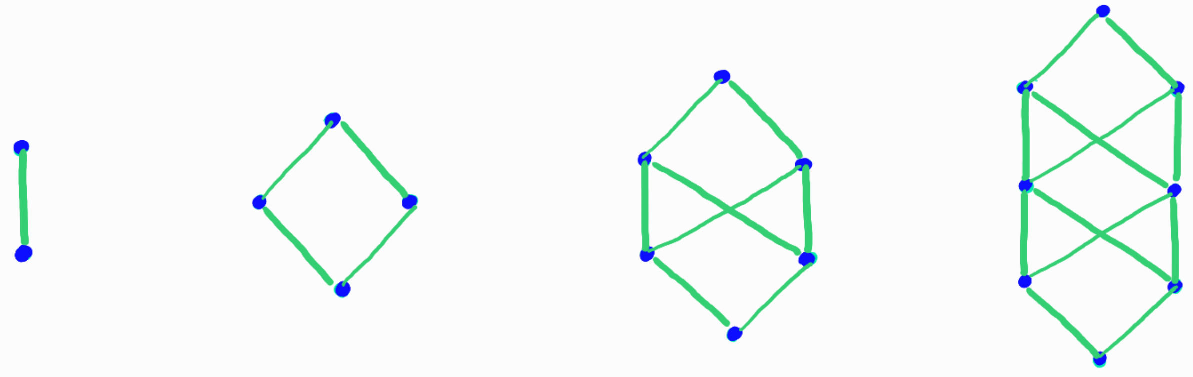
$$\mu_P(x,y) = (-1)^{\rho(x,y)}$$

για $x, y \in P$ με $x \leq y$.

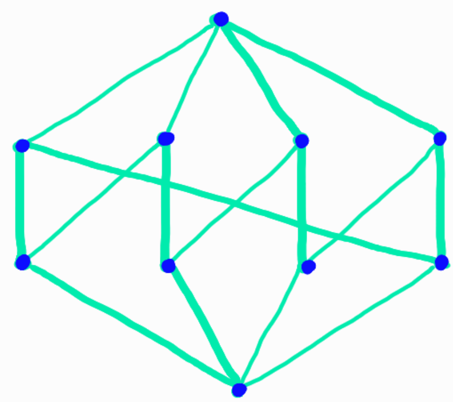
## Παραδείγματα 18.2

(α) Η άλγεβρα Boole $B_n$ είναι μερική διάταξη του Euler για κάθε $n$.

(β) Αν $Q_n$ είναι το διατακτικό άθροισμα $n-1$ αντιαλυσίδων, η καθεμιά με δύο στοιχεία, τότε το $P_n = \hat{Q}_n = Q_n \sqcup \{\hat{0}, \hat{1}\}$ είναι μερική διάταξη του Euler για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.



(γ) Ο σύνδεσμος των πλευρών (face lattice) του τετραγώνου είναι μερική διάταξη του Euler.



**Λήμμα 18.3.** Το $P$ είναι μερική διάταξη του Euler εάνν κάθε κλειστό διάστημα $[x,y]$ του $P$ με $x<y$ έχει τόσα στοιχεία άρτιας τάξης, όσα και περιττής.

Απόδειξη. Από τον ορισμό της συνάρτησης Möbius συμπεραίνουμε ότι το $P$ είναι μερική διάταξη του Euler εάνν

$$\sum_{x \leq z \leq y} (-1)^{\rho(x,z)} = 0$$

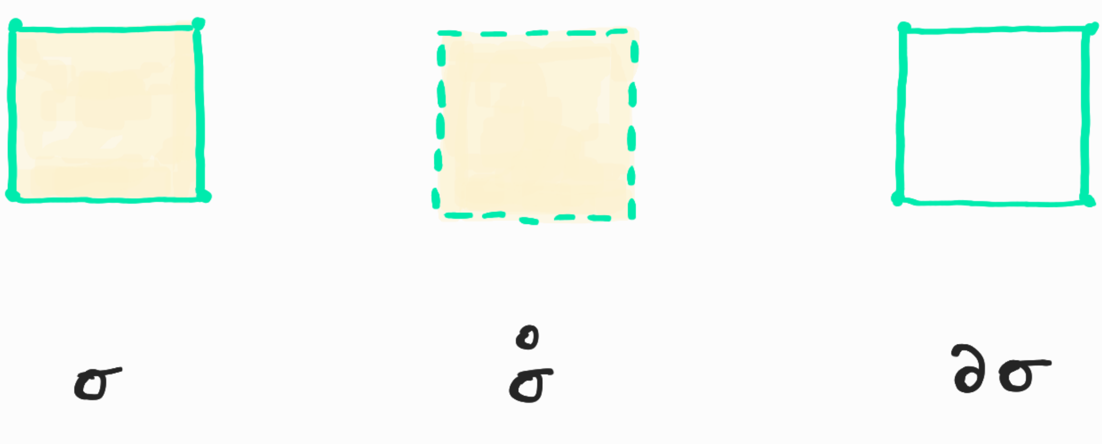
για όλα τα $x, y \in P$ με $x < y$. Αυτό ισοδυναμεί με το ζητούμενο. ■

Έστω

- $\mathbb{B}^d = \{ x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1 \}$
- $\mathbb{S}^{d-1} = \{ x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1 \}$

η μοναδιαία κλειστή μπάλα διάστασης

$d$ και η μοναδιαία σφαίρα διάστασης $d-1$, αντίστοιχα, στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^d$. Κάθε χώρος $\sigma$ ομοιομορφικός με τη $\mathbb{B}^d$ λέγεται κλειστή μπάλα διάστασης $d$. Μέσω του ομοιομορφισμού, ορίζεται το εσωτερικό $\mathring{\sigma}$ και το σύνορο $\partial\sigma = \sigma \setminus \mathring{\sigma} \cong \mathbb{S}^{d-1}$ του $\sigma$.

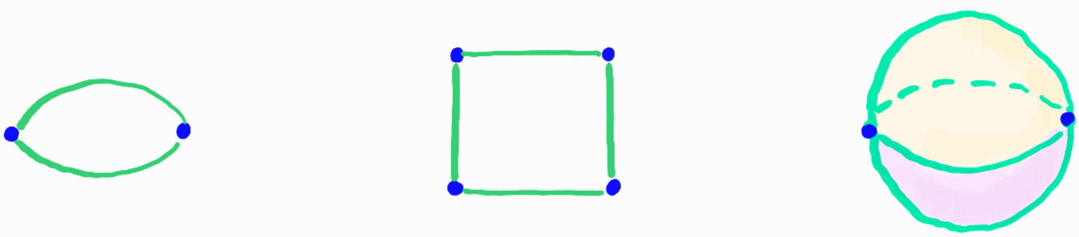


**Ορισμός 18.4.** Κανονικό κυτταρικό σύμπλεγμα (regular cell complex), ή κανονικό CW-complex, λέγεται κάθε (πεπερασμένη) οικογένεια $\mathcal{C}$ που αποτελείται από κλειστές μπάλες σε ένα Hausdorff χώρο X, τέτοια ώστε:

- $X = \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{C}} \mathring{\sigma}$ (ξένη ένωση)

- το $\partial\sigma$ είναι ένωση στοιχείων της $\mathcal{C}$ για κάθε $\sigma \in \mathcal{C}$.

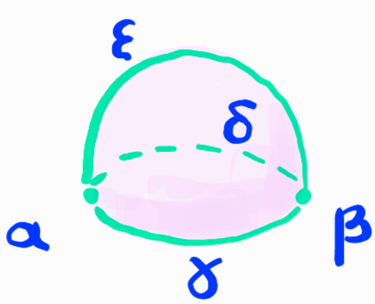
Το $\mathcal{C}$ λέγεται κανονική CW-σφαίρα διάστασης $d-1$ αν ο χώρος X είναι ομοιομορφικός με τη σφαίρα $\mathbb{S}^{d-1}$.



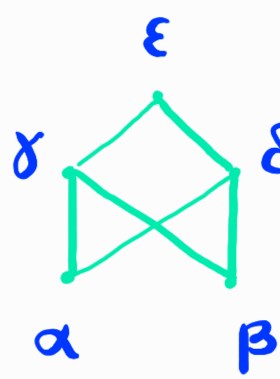
κανονικές CW-σφαίρες

όχι κανονική σφαίρα

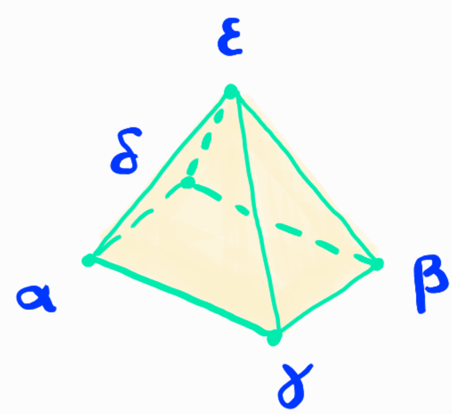
Θα συμβολίζουμε με $P(C)$ τη μερική διάταξη του εγκλεισμού στο $C$. Όπως και στην ειδική περίπτωση των γεωμετρικών μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων, το $\Delta(P(C))$ είναι η πρώτη βαρυκεντρική υποδιαίρεση του $C$ και συνεπώς ομοιομορφικό με το $C$ (δηλαδή με το χώρο $X$).




$C$




$P(C)$




$\Delta(P(C))$

<u>**Παρατήρηση 18.5.**</u> Για κάθε πολύτοπο $P$ διάστασης $d$, το σύνολο των γνήσι-

ων πλευρών του $P$ αποτελεί κανονική CW-σφαίρα διάστασης $d-1$ με face poset $L(P) \smallsetminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$.

Την επόμενη φορά θα αποδείξουμε το εξής.

<u>Πρόταση 18.6.</u> Το

$$\widehat{P(C)} = P(C) \sqcup \{\hat{0}, \hat{1}\}$$

είναι μερική διάταξη του Euler για κάθε κανονική CW-σφαίρα $C$.