16. Αποφλοιώσιμα συμπλέγματα (συνέχεια)

Έστω αγνό μονοπλεκτικό σύμπλεγμα Δ διάστασης d. Για $F \in \Delta$ θέτουμε

- $\bar{F} = 2^F$
  = αφηρημένο μονόπλοκο στο σύνολο κορυφών F.

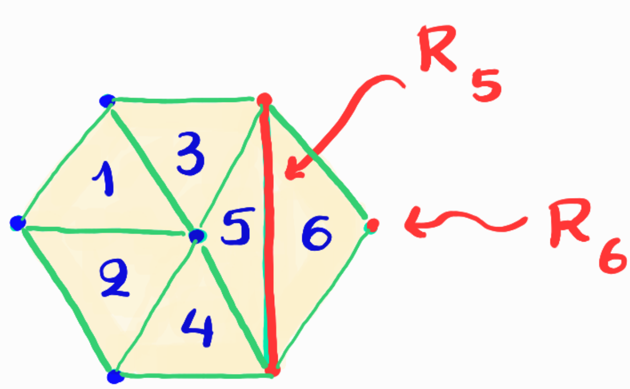
Υπενθυμίζουμε ότι το Δ λέγεται αποφλοιώσιμο αν υπάρχει γραμμική διάταξη $G_1, G_2, \ldots, G_t$ των εδρών του Δ τέτοια ώστε για $2 \leq k \leq t$, το

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \bar{G}_i \right) \cap \bar{G}_k \qquad (16.4)$$

να είναι αγνό υποσύμπλεγμα διάστασης $d-1$ του $\bar{G}_k$, δηλαδή ίσο με

$$\bar{F}_{k,1} \cup \bar{F}_{k,2} \cup \cdots \cup \bar{F}_{k,r}$$

για κάποιες πλευρές $F_{k,i}$ διάστασης $d-1$ του $\bar{G}_k$. Το πλήθος $r = r(k)$ των πλευρών αυτών θα το συμβολίζουμε με $r(G_k)$. Π.χ. αν

$\Delta =$ 

τότε $r(G_1) = 0$, $r(G_5) = 2$ και $r(G_k) = 1$

για $k \in \{2,3,4,6\}$.

Παρατηρούμε ότι $h(\Delta,x) = 1+4x+x^2$.

Πρόταση 16.7. Για κάθε αγνό, αποφλοιώσιμο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα Δ διάστασης $d-1$ και για κάθε αποφλοίωση $G_1, G_2, \dots, G_t$ του Δ,

- $h_i(\Delta) = \#$ εδρών G του Δ με $r(G) = i$

για $0 \leq i \leq d$. Ειδικότερα, $h_i(\Delta) \geq 0$ για κάθε i και

$$(-1)^{\dim(\Delta)} \tilde{\chi}(\Delta) \geq 0.$$

Επιπλέον, το $(-1)^{\dim(\Delta)} \tilde{\chi}(\Delta)$ ισούται με το πλήθος των εδρών του Δ με $r(G) = d$.

<u>Απόδειξη.</u> Θέτοντας $r_k = r(G_k)$ για $1 \leq k \leq t$, έχουμε να δείξουμε τις ισοδύναμες προτάσεις

- $$h(\Delta, x) = \sum_{k=1}^{t} x^{r_k} \iff$$

$$f(\Delta, x) = \sum_{k=1}^{t} x^{r_k} (1+x)^{d-r_k} \iff$$

$$f_{i-1}(\Delta) = \sum_{k=1}^{t} \binom{d-r_k}{i-r_k}, \quad 0 \leq i \leq d \qquad (16.5)$$

όπου η δεύτερη ισοδυναμία προέρχεται από τον τύπο

$$f(\Delta, x) = (1+x)^d \, h(\Delta, \frac{x}{1+x}).$$

Θέτουμε $\Delta_0 = \emptyset$ και $\Delta_k = \bigcup_{i=1}^{k} \bar{G}_i$ για $k \in [t]$. Αρκεί να δείξουμε ότι

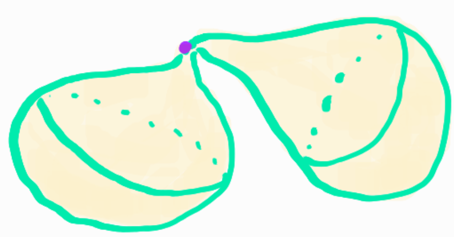
$$\binom{d-r_k}{i-r_k} = \# \{ F \in \Delta_k \setminus \Delta_{k-1} : \# F = i \} \qquad (16.6)$$

για κάθε $k \in [t]$.

Έστω R_k το σύνολο των κορυφών $v \in G_k$ για τις οποίες $G_k \setminus \{v\} \in \Delta_{k-1}$, οπότε $\# R_k = r_k$. Παρατηρούμε ότι οι πλευρές του $\Delta_k \setminus \Delta_{k-1}$ είναι ακριβώς τα υποσύνολα του G_k που περιέχουν το R_k.

Από αυτό προκύπτει η (16.6), άρα και η (16.5). ■

Σχόλιο. Η συνθήκη της αποφλοιωσιμότητας έχει πολύ ισχυρές αλγεβρικές και τοπολογικές συνέπειες για το Δ. Για παράδειγμα, το $\|\Delta\|$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμο με το σφηνοειδές άθροισμα (wedge) σφαιρών διάστασης $d-1$, το



πλήθος των οποίων ισούται με $h_d(\Delta) = (-1)^{d-1} \tilde{\chi}(\Delta)$.

17. Αποφλοιώσιμες μερικές διατάξεις

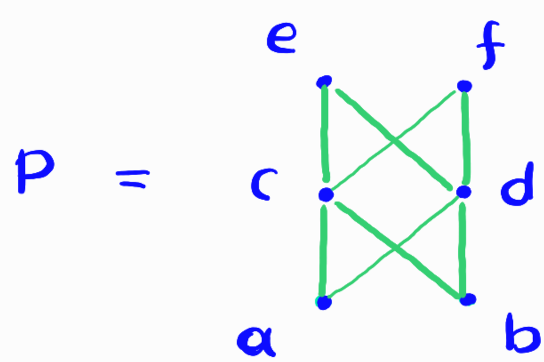
Έστω πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P. Αφού οι έδρες του $\Delta(P)$ είναι οι μεγιστικές αλυσίδες του P, το $\Delta(P)$ είναι αγνό εάνν το P είναι διαβαθμισμένο.

Ορισμός 17.1. Το P λέγεται αποφλοιώσιμο αν το $\Delta(P)$ είναι (αγνό και) αποφλοιώσιμο σύμπλεγμα.

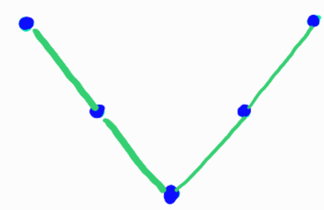
Παρατήρηση 17.2. (α) Το P είναι αποφλοιώσιμο εάνν το ίδιο ισχύει για το P^*, αφού $\Delta(P^*) = \Delta(P)$.

(β) Σύμφωνα με την Παρατήρηση 16.3, το P είναι αποφλοιώσιμο εάνν είναι διαβαθμισμένο και υπάρχει γραμμική διάταξη (αποφλοίωση) $m_1, m_2, \dots, m_t$ των μεγιστικών αλυσίδων του P, τέτοια ώστε:

- για όλα τα $1 \leq i < k \leq t$ υπάρχει $1 \leq j < k$ τέτοιο ώστε $m_i \cap m_k \subseteq m_j \cap m_k = m_k \setminus \{x\}$ για κάποιο $x \in m_k$. Π.χ. το



είναι αποφλοιώσιμο, με μια αποφλοίωση την ace, acf, ade, adf, bce, bcf, bde, bdf, ενώ το

$Q =$ 

όχι.

(γ) Το P είναι αποφλοιώσιμο εάνν το ίδιο ισχύει για το $P \sqcup \{\hat{0}\}$, αντίστοιχα, για τα $P \sqcup \{\hat{1}\}$ και $\hat{P} = P \sqcup \{\hat{0}, \hat{1}\}$, π.χ. ως συνέπεια του (β).

<u>Παρατήρηση 17.3.</u> Από τις Προτάσεις 15.3 και 16.7 προκύπτει ότι αν το P είναι αποφλοιώσιμο, τότε

$$(-1)^{r(P)}\mu_{\hat{P}}(\hat{0},\hat{1}) = (-1)^{\dim(\Delta(P))}\tilde{\chi}(\Delta(P)) \geq 0$$

όπου $\hat{P} = P \sqcup \{\hat{0}, \hat{1}\}$.

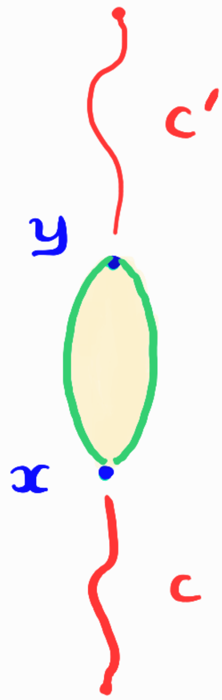
Πρόταση 17.4. Έστω ότι το P είναι αποφλοιώσιμο.

(α) κάθε διάστημα $[x, y]$ του P είναι επίσης αποφλοιώσιμο.

(β) Για όλα τα $x, y \in P$ (ή $x, y \in \hat{P}$) με $x \leq y$,

$$(-1)^{\rho(x,y)}\mu_P(x,y) \geq 0.$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 17.3, αρκεί να δείξουμε το (α).



Έστω μεγιστικές αλυσίδες c και c' των $P_{<x} = \{z \in P : z < x\}$ και $P_{>y} = \{z \in P : z > y\}$, αντίστοιχα. Οι μεγιστικές αλυσίδες του $[x, y]$ βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία με τις μεγιστικές αλυσίδες του P που περιέχουν τη $c \cup c'$. Άρα, κάθε αποφλοίωση P επάγει μια γραμμική διάταξη των μεγιστικών αλυσίδων του $[x, y]$. Από την Παρατήρηση 17.2 (β) προκύπτει ότι η διάταξη αυτή είναι αποφλοίωση του $[x, y]$. ∎

Ερώτημα. Πώς αποδεικνύουμε στην πράξη ότι μια μερική διάταξη είναι αποφλοιώσιμη;

Έστω ότι το P είναι διαβαθμισμένο τάξης n, με ελάχιστο στοιχείο $\hat{0}$ και μέγιστο $\hat{1}$. Συμβολίζουμε με $C(P)$ το σύνολο των σχέσεων κάλυψης (x, y) του P και θεωρούμε τυχαίο μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(\Lambda, \leq_\Lambda)$. Μια απεικόνιση

$$\lambda : C(P) \longrightarrow \Lambda$$

θα λέγεται Λ-επιγραφή του P. Μια κορεσμένη αλυσίδα $x_0 < x_1 < \cdots < x_k$ του P (δηλαδή $(x_{i-1}, x_i) \in C(P)$ για κάθε $i \in [k]$) λέγεται αύξουσα (ως προς τη λ) αν

$$\lambda(x_0, x_1) \leq_\Lambda \lambda(x_1, x_2) \leq_\Lambda \cdots \leq_\Lambda \lambda(x_{k-1}, x_k).$$

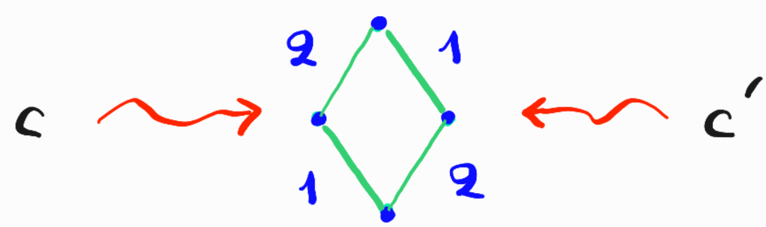
Για δύο κορεσμένες αλυσίδες

- $c : x_0 < x_1 < \cdots < x_k$
- $c' : x_0' < x_1' < \cdots < x_k'$

του P γράφουμε $c <_{lex} c'$, και λέμε ότι η c προηγείται λεξικογραφικά της c', αν

$$\lambda(x_{i-1}, x_i) <_\Lambda \lambda(x'_{i-1}, x'_i),$$

όπου i είναι ο μικρότερος δείκτης για τον οποίο $\lambda(x_{i-1}, x_i) \neq \lambda(x'_{i-1}, x'_i)$.

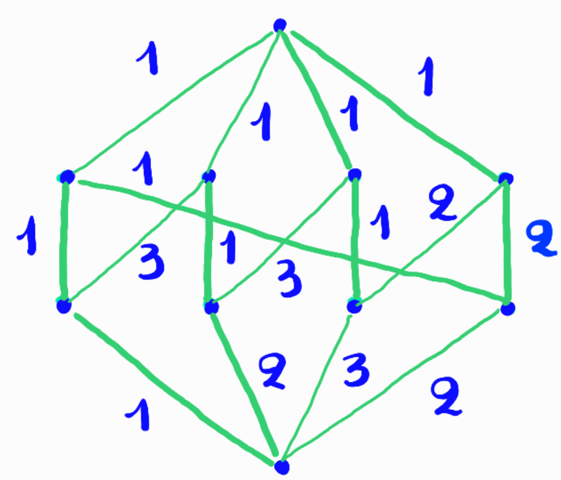


Ορισμός 17.5. Μια Λ-επιγραφή $\lambda : C(P) \to \Lambda$ λέγεται EL-επιγραφή αν για όλα τα $x, y \in P$ με $x < y$:

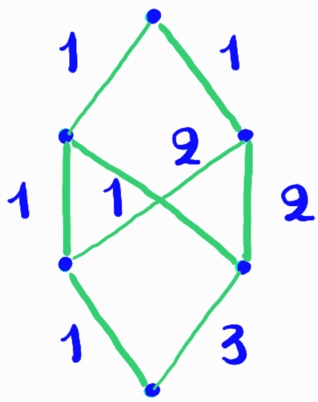
(i) Υπάρχει μοναδική αύξουσα μεγιστική αλυσίδα $c_{x,y}$ του $[x, y]$

(ii) Η $c_{x,y}$ προηγείται λεξικογραφικά οποιασδήποτε άλλης μεγιστικής αλυσίδας του $[x,y]$.

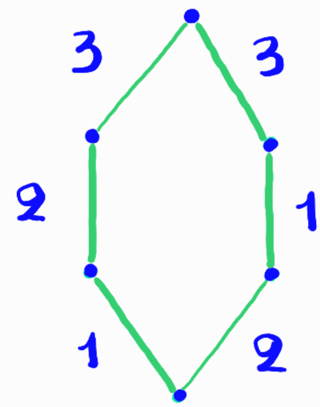
Το P λέγεται EL-αποφλοιώσιμο αν υπάρχει EL-επιγραφή $\lambda : C(P) \to \Lambda$ για κάποιο Λ.



μια EL-επιγραφή



EL-επιγραφή



όχι EL

Θεώρημα 17.6. (Björner, 1980) κάθε EL-αποφλοιώσιμο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P είναι αποφλοιώσιμο.

Ορολογία: Για μια Λ-επιγραφή $\lambda: C(P) \to \Lambda$ και μια μεγιστική αλυσίδα $c: \hat{0} < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = \hat{1}$ του P θα λέμε ότι το $i \in [n-1]$ είναι κάθοδος της c αν

$$\lambda(x_{i-1}, x_i) \nleq_\Lambda \lambda(x_i, x_{i+1}).$$

Θα συμβολίζουμε με $\mathrm{Des}(c) = \mathrm{Des}_\lambda(c)$ το σύνολο των καθόδων της c.

Λήμμα 17.7. Έστω EL-επιγραφή $\lambda: C(P) \longrightarrow \Lambda$ και $m: \hat{0} < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = \hat{1}$ μια μεγιστική αλυσίδα του P.

Το $i \in [n-1]$ είναι κάθοδος της m εάνν $m \setminus \{x_i\} = c \cap m$ για κάποια μεγιστική α- αλυσίδα $c <_{lex} m$.

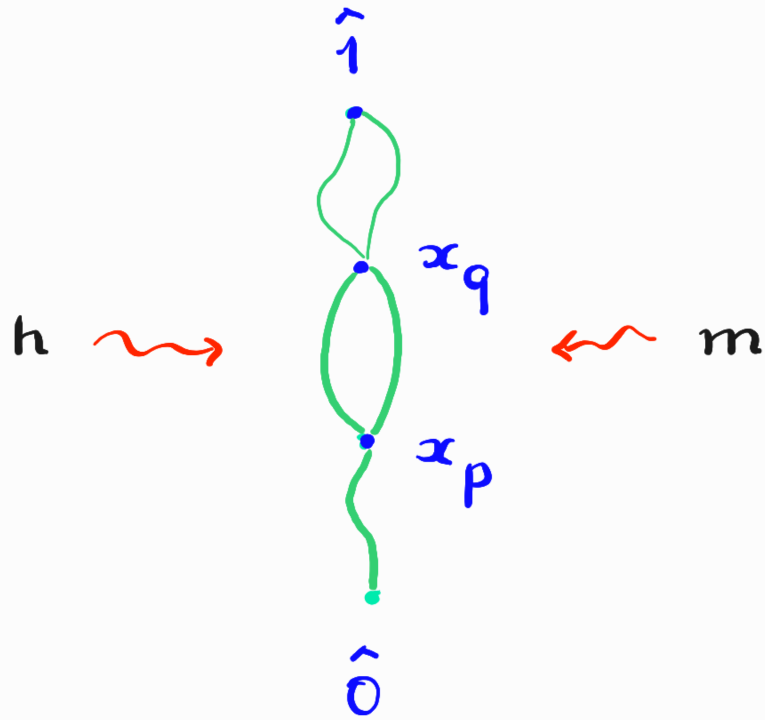
Απόδειξη. Έστω $x_{i-1} < y < x_{i+1}$ η μοναδική αύξουσα μεγιστική αλυσίδα του $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ και $c' = (m \setminus \{x_i\}) \cup \{y\}$.

Αν $i \in \mathrm{Des}(m)$, τότε $x_i \neq y$ και η $c = c'$

έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. Το αντί-
στροφο έπεται και αυτό από τον ορισμό
της EL-επιγραφής. ■

<u>Απόδειξη</u> του <u>Θεωρήματος 17.6.</u> Επιλέ-
γουμε μια γραμμική διάταξη $<_\omega$ των με-
γιστικών αλυσίδων του P τέτοια ώστε
$m <_{lex} m' \Rightarrow m <_\omega m'$. Θα δείξουμε ότι η
$<_\omega$ είναι αποφλοίωση του $\Delta(P)$. Ισο-
δύναμα (Παρατήρηση 17.2 β), θα δείξου-
με ότι

- αν $n <_\omega m$, τότε υπάρχει μεγιστική α-
  λυσίδα $c <_\omega m$ του P με $n \cap m \subseteq c \cap m$
  και $\# c \cap m = \# m - 1$.



Έστω

- $h: \hat{0} < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = \hat{1}$
- $m: \hat{0} < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = \hat{1}$.

Έστω p ο μεγαλύτερος ακέραιος με $x_i = y_i$ για $0 \leq i \leq p$ και $q > p$ ο μικρότερος ακέραιος με $x_q = y_q$. Τότε, $q - p \geq 2$ και

$x_i \neq y_i$ για $p<i<q$. Παρατηρούμε ότι η

$$y_p < y_{p+1} < \cdots < y_q$$

δεν είναι η μοναδική αύξουσα μεγιστική αλυσίδα του $[y_p, y_q]$, διότι αυτό θα είχε ως συνέπεια ότι $m \leq_{lex} h$, άρα και $m \leq_\omega h$. Κατά συνέπεια, κάποιο $p<i<q$ αποτελεί κάθοδο της m. Σύμφωνα με το Λήμμα 17.7, υπάρχει μεγιστική αλυσίδα $c <_{lex} m$, άρα και $c <_\omega m$, τέτοια ώστε $c \cap m = m \setminus \{y_i\} \supseteq h \cap m$, όπως το θέλαμε. ■

Πόρισμα 17.8. Αν $\lambda : C(P) \to \Lambda$ είναι EL- επιγραφή, τότε ο ακέραιος

$$(-1)^n \mu_P(\hat{0}, \hat{1}) = (-1)^n \tilde{\chi}(\Delta(\bar{P}))$$

ισούται με το πλήθος των μεγιστικών αλυσίδων του P με σύνολο καθόδων $[n-1]$ (λέγονται γνησίως φθίνουσες), όπου $\bar{P} = P \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$.

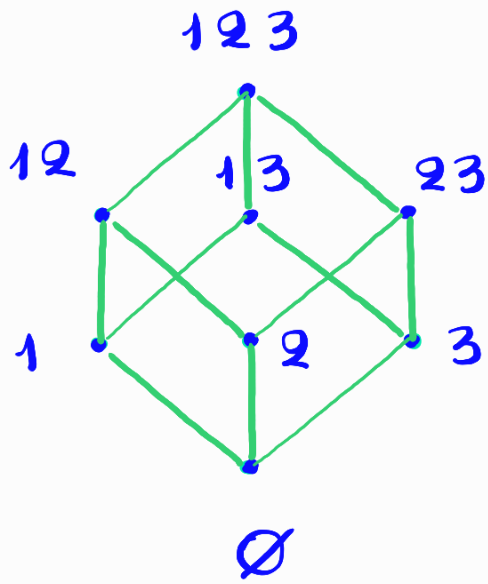
Απόδειξη. Θεωρούμε την αποφλοίωση $<_\omega$ της προηγούμενης απόδειξης για το $\Delta(\bar{P})$. Σύμφωνα με την Πρόταση 16.7,

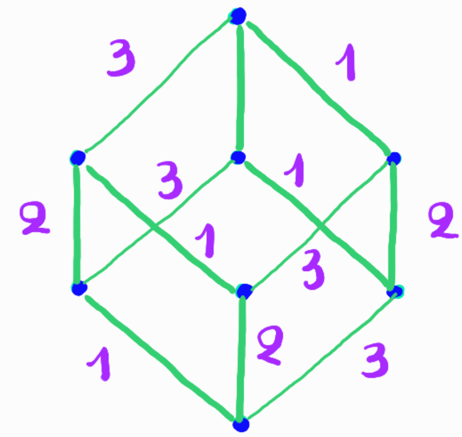
- $(-1)^n \tilde{\chi}(\Delta(\bar{P}))$ = # μεγιστικών αλυσίδων m του P με $R(m \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}) = m \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$.

Το Λήμμα 17.7 δείχνει ότι $R(m \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}) = m \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\} \Leftrightarrow \mathrm{Des}(m) = [n-1]$. ■

<u>Παράδειγμα 17.9.</u> Έστω $P = B_n$ και $\Lambda = \mathbf{n} = \{1 < 2 < \cdots < n\}$. Για $(S, T) \in C(P)$ έστω $\lambda(S,T)$ το μοναδικό στοιχείο του $T \setminus S$.

Η $\lambda : C(P) \longrightarrow \Lambda$ είναι EL-επιγραφή και υπάρχει μοναδική γνησίως φθί-





νουσα μεγιστική αλυσίδα σε κάθε διά-
στημα $[x, y]$ του P. Άρα,

$$\mu_P(x,y) = (-1)^{\rho(x,y)}$$

για $x \leq y$ στο $P = B_n$.