15. Το σύμπλεγμα της διάταξης (συνέχεια)

Την προηγούμενη φορά δείξαμε (Πρόταση 15.3) ότι για κάθε τοπικά πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P

$$\mu_P(x,y) = \tilde{\chi}(\Delta(x,y))$$

για όλα τα $x, y \in P$ με $x < y$, όπου με $\Delta(x,y)$ συμβολίζουμε το σύμπλεγμα της διάταξης του ανοιχτού διαστήματος (x,y) του P.

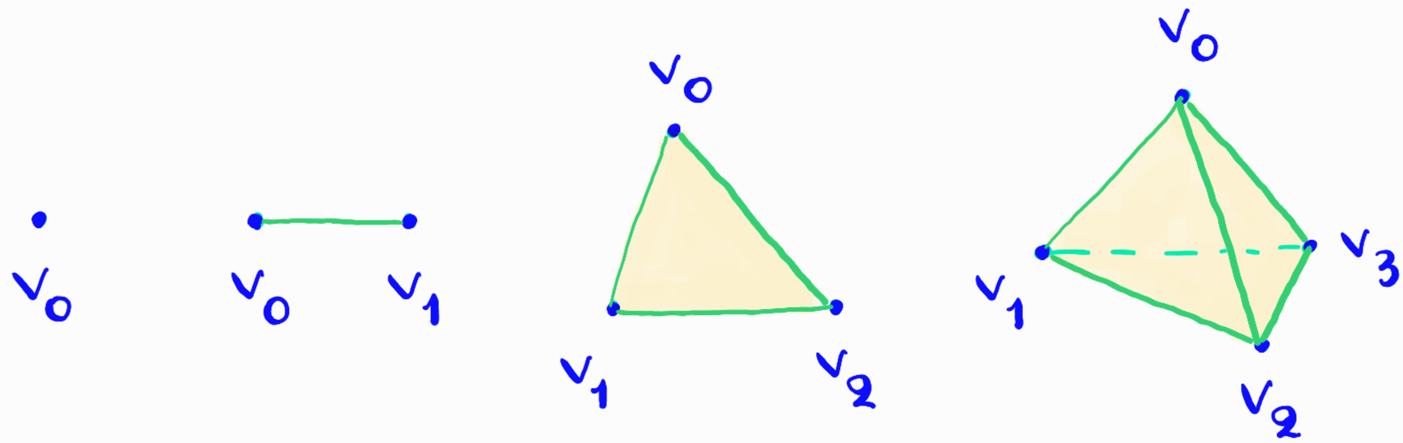
Άρα, το $\mu_p(x,y)$ εξαρτάται μόνο από την "τοπολογία" του $\Delta(x,y)$. Ας εξηγήσουμε το τι σημαίνει αυτό.

Ορολογία. Η κυρτή θήκη

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=0}^{k} c_i v_i \; : \; c_i \geq 0 \text{ και } \sum_{i=0}^{k} c_i = 1 \right\}$$

$k+1$ αφφινικώς ανεξάρτητων σημείων $v_0, v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^d$ (δηλαδή τα k διανύσματα $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \ldots, v_k - v_0$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα) λέγεται k-simplex (k-μονόπλοκο) στον $\mathbb{R}^d$.

Το $k = \dim(\sigma)$ είναι η διάσταση του σ.



Η κυρτή θήκη οποιουδήποτε υποσυνόλου του $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ λέγεται πλευρά (ή όψη) του σ. Το (σχετικό) εσωτερικό του σ ορίζεται ως το σύνολο

$$\mathrm{relint}(\sigma) = \sigma \setminus \bigcup_{\tau < \sigma} \tau$$

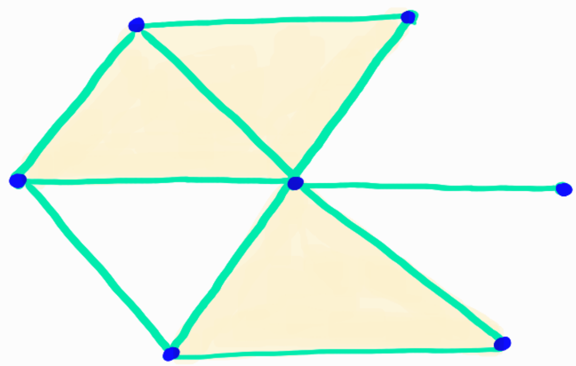
όπου το τ διατρέχει τις γνήσιες πλευρές του σ ($\tau \subset \sigma$).

Ορισμός 15.4. Έστω πεπερασμένο σύνολο Γ με στοιχεία μονόπλοκα στον $\mathbb{R}^d$.

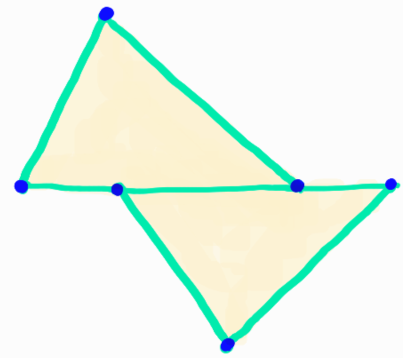
Το Γ λέγεται γεωμετρικό μονοπλεκτικό σύμπλεγμα αν:

(i) κάθε πλευρά στοιχείου του Γ ανήκει επίσης στο Γ,

(ii) για όλα τα $\sigma, \tau \in \Gamma$, η τομή $\sigma \cap \tau$ είναι κοινή πλευρά (πιθανώς κενή) των σ και τ.



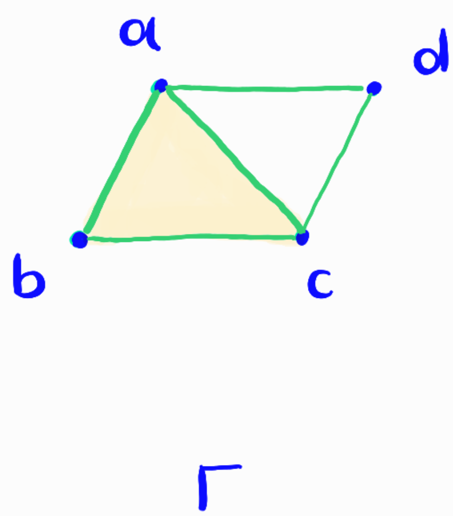
γεωμετρικό σύμπλεγμα



όχι

Τα στοιχεία του Γ λέγονται πλευρές. Η ένωσή τους (θεωρούμενη ως τοπολογικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$) λέγεται πολύεδρο του Γ και συμβολίζεται με $\|\Gamma\|$.

Κάθε γεωμετρικό σύμπλεγμα Γ με σύνολο κορυφών V καθορίζει ένα αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα Δ επί του V: το $F \subseteq V$ ανήκει στο Δ εάνν είναι το σύνολο κορυφών κάποιας πλευράς του Γ.



$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,d\}$, $\{c,d\}$ $\{a,b,c\}$

Δ

Τότε, το Γ λέγεται γεωμετρική υλοποίηση του Δ. Κάθε αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα Δ έχει γεωμετρική υλοποίηση και τα πολύεδρα οποιωνδήποτε δύο τέτοιων είναι ομοιομορφικοί χώροι. Όταν αναφερόμαστε στην "τοπολογία" του Δ εννοούμε εκείνη οποιασδήποτε γεωμετρικής του υλοποίησης.

Είναι γνωστό από την αλγεβρική τοπολογία ότι αν τα πολύεδρα $\|\Gamma\|$ και $\|\Gamma'\|$ είναι ομοιομορφικοί χώροι, τότε

$$\tilde{\chi}(\Gamma) = \tilde{\chi}(\Gamma'),$$

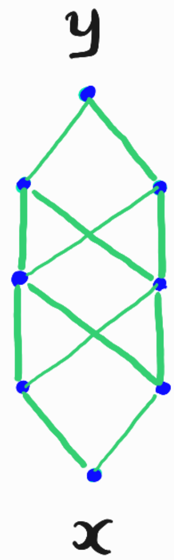
όπου $\tilde{\chi}(\Gamma)$ είναι η ανηγμένη χαρακτηριστική Euler του αφηρημένου συμπλέγματος που ορίζεται από το Γ:

Γ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ Γ'

- $\tilde{\chi}(\Gamma) = -1+4-5+1 = -1$
- $\tilde{\chi}(\Gamma') = -1+7-11+4 = -1.$

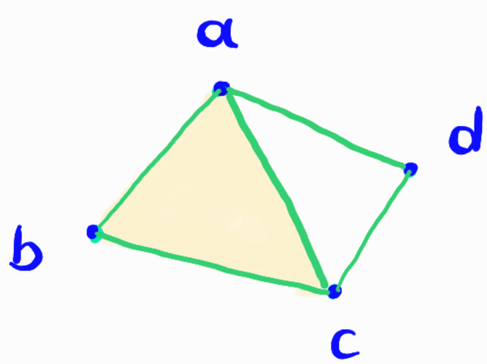
Με αυτήν την έννοια, το $\mu_p(x,y) = \tilde{\chi}(\Delta(x,y))$ εξαρτάται μόνο από την τοπολογία του $\Delta(x,y)$. Π.χ. αν

$[x, y] =$

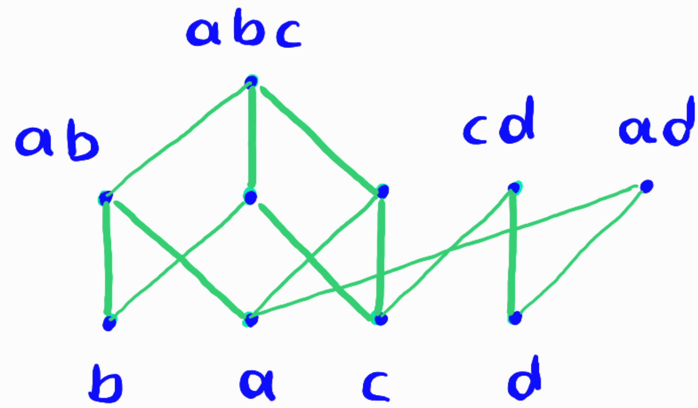


τότε $\mu_P(x,y) = \tilde{\chi}(\Delta(x,y)) = \tilde{\chi}(\mathbb{S}^2) =$
$= +1$.

Παρατήρηση 15.5. Έστω γεωμετρικό μονοπλεκτικό σύμπλεγμα (ή, γενικότερα, regular cell complex) Γ. Έστω $P(\Gamma)$ το σύνολο των μη κενών πλευρών του Γ, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του εγκλεισμού: $x \leq y \Leftrightarrow x \subseteq y$.



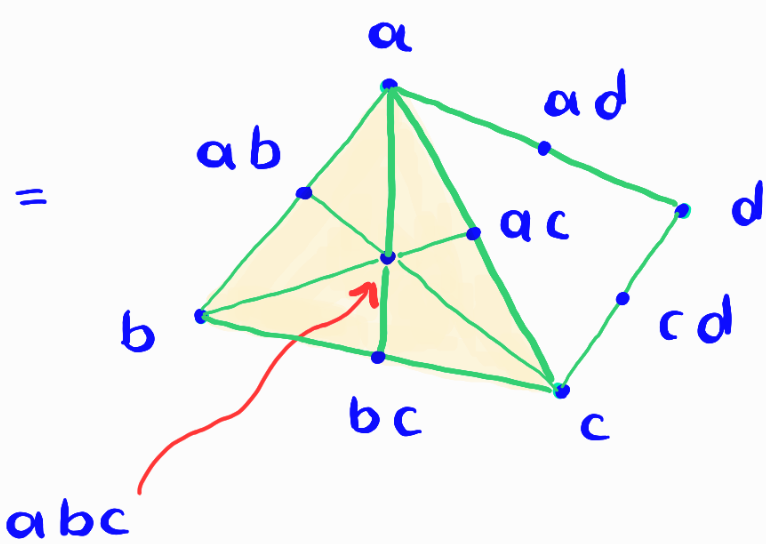
Γ



$P(\Gamma)$

Η πρώτη βαρυκεντρική υποδιαίρεση του Γ είναι γεωμετρική υλοποίηση του $\Delta(P(\Gamma))$:

$\Delta(P(\Gamma)) =$

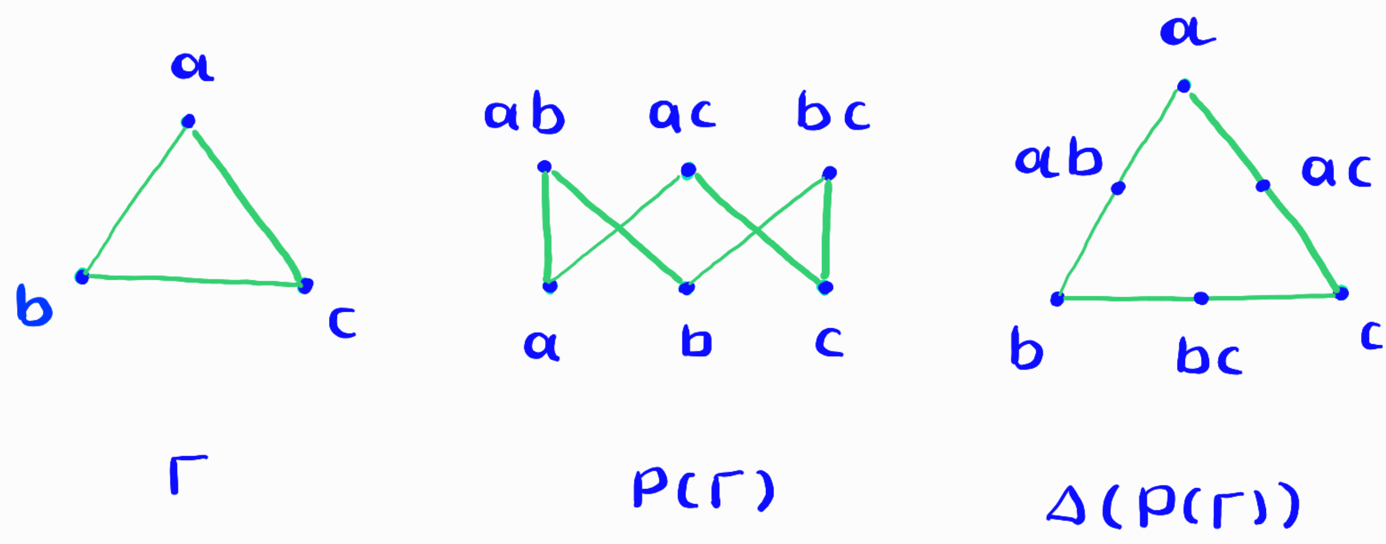


Άρα, το $\Delta(P(\Gamma))$ είναι ομοιομορφικό με το Γ και συνεπώς

$$\mu_{\widehat{P(\Gamma)}}(\hat{0}, \hat{1}) = \tilde{\chi}(\Gamma).$$

Παράδειγμα 15.6.

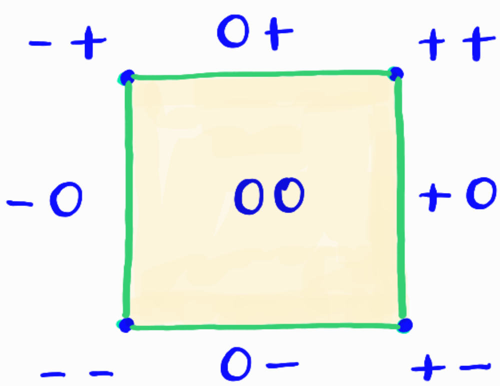
(α) Έστω Γ το σύμπλεγμα των γνήσιων πλευρών ενός $(n-1)$-διάστατου μονόπλοκου σ.

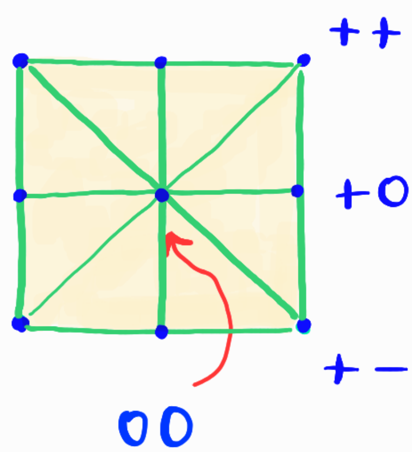


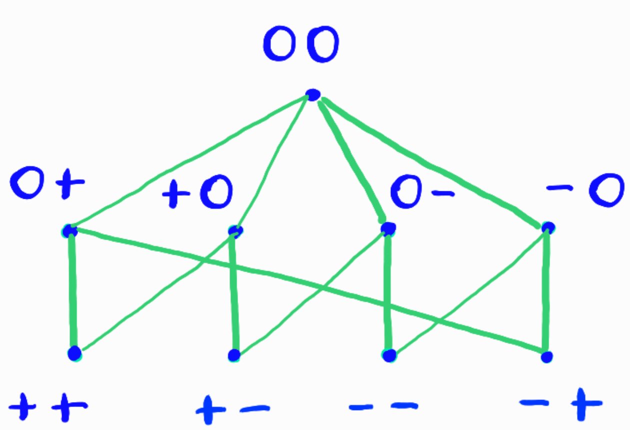
Τότε, $P(\Gamma) \cong B_n \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$, άρα $\widehat{P(\Gamma)} \cong B_n$ και

$$\mu_{B_n}(\hat{0}, \hat{1}) = \tilde{\chi}(\Gamma) = \tilde{\chi}(\mathbb{S}^{n-2}) = (-1)^n.$$

(β) Έστω ότι Γ_n είναι το σύμπλεγμα των πλευρών του n-διάστατου κύβου.





$Q_2 =$ 

Το $P(\Gamma_n)$ είναι ισόμορφο με το $Q_n = \{-,0,+\}^n$, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση

- $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \leq (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \zeta_i \in \{0, \varepsilon_i\} \text{ για κάθε } i \in [n].$$

Αφού $Q_n \setminus \{\hat{1}\} \cong P(\partial\Gamma_n)$, όπου $\partial\Gamma_n$ είναι το σύμπλεγμα των γνήσιων πλευρών του n-διάστατου κύβου και $\hat{1} = (0,0,\ldots,0) \in Q_n$, έχουμε

- $\mu_{Q_n \cup \{\hat{0}\}}(\hat{0}, \hat{1}) = \tilde{\chi}(\Delta(Q_n \setminus \{\hat{1}\})) =$

$$= \tilde{\chi}(\partial\Gamma_n) = \tilde{\chi}(\mathbb{S}^{n-1}) = (-1)^{n-1}. \qquad \blacksquare$$

16. Αποφλοιώσιμα συμπλέγματα

Ας συμβολίσουμε με $r(P)$ το μέγιστο μήκος μιας αλυσίδας στο P. Λόγω της Πρότασης 15.3, τα ακόλουθα ερωτήματα σχετίζονται άμεσα:

(α) Για ποια μερικώς διατεταγμένα σύνολα P έχουμε

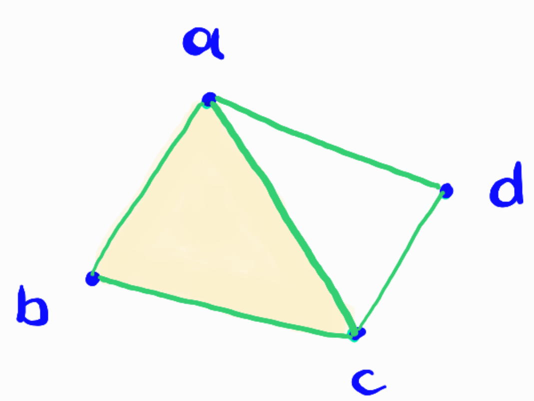
$$(-1)^{r([x,y])} \mu_P(x,y) \geq 0$$

για όλα τα $x, y \in P$ με $x \leq y$;

(β) Για ποια αφηρημένα συμπλέγματα Δ έχουμε $(-1)^{\dim(\Delta)} \tilde{\chi}(\Delta) \geq 0$;

Ορολογία: Οι μεγιστικές πλευρές ενός συμπλέγματος Δ λέγονται έδρες. Το Δ λέγεται αγνό αν όλες οι έδρες του έχουν την ίδια διάσταση.

Π.χ. το



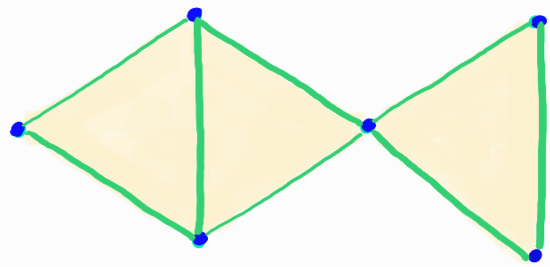
έχει έδρες $\{a,b,c\}$, $\{a,d\}$ και $\{c,d\}$ και συνεπώς δεν είναι αγνό.

Για σύνολο Ω γράφουμε $2^{\Omega} = \{S : S \subseteq \Omega\}$.

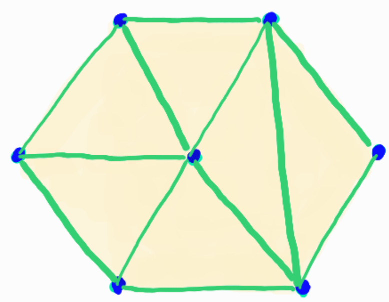
Ορισμός 16.1. Ένα αγνό (αφηρημένο) μονοπλεκτικό σύμπλεγμα Δ διάστασης d λέγεται αποφλοιώσιμο (shellable) αν υπάρχει ολική διάταξη (αποφλοίωση) $G_1, G_2, \dots, G_m$ των εδρών του Δ, τέτοια ώστε το σύμπλεγμα

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} 2^{G_i} \right) \cap 2^{G_k}$$

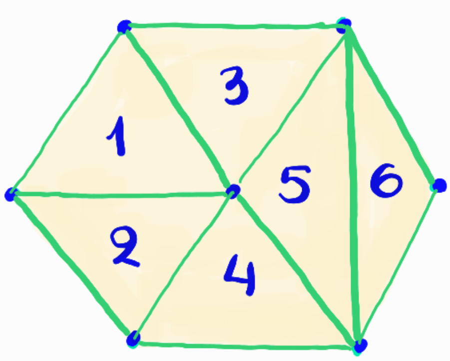
να είναι αγνό διάστασης $d-1$ για κάθε $k \in \{2, 3, \dots, m\}$, δηλαδή ίσο με $\bigcup_{i=1}^{r} 2^{F_i}$ για κάποια d-υποσύνολα $F_1, F_2, \dots, F_r$ του G_k και κάποιο $r = r(k) \geq 1$.



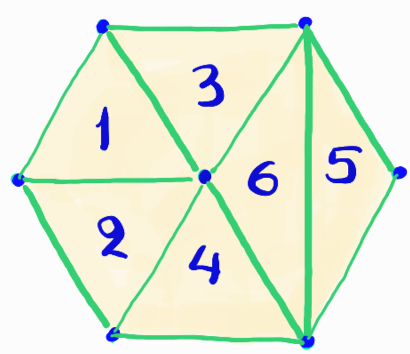
αγνό, όχι αποφλοιώσιμο



αποφλοιώσιμο



αποφλοίωση

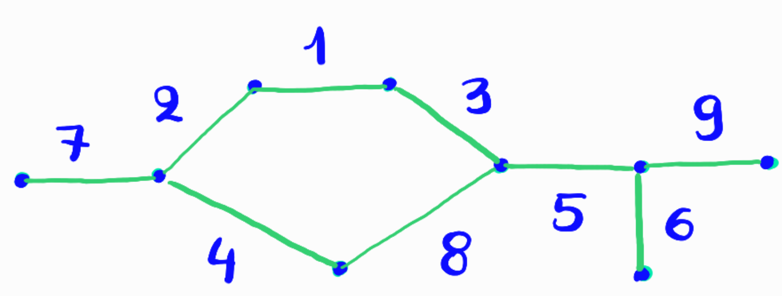


όχι

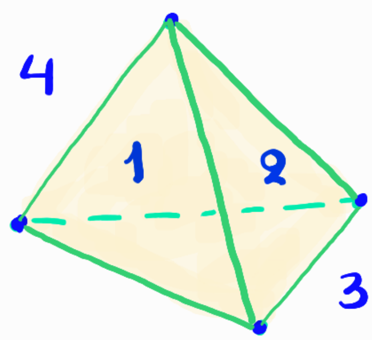
Παράδειγμα 16.2.

(α) κάθε σύμπλεγμα διάστασης μηδέν είναι αποφλοιώσιμο.

(β) Ένα σύμπλεγμα διάστασης ένα είναι αποφλοιώσιμο εάνν είναι συνεκτικό.



(γ) Το σύμπλεγμα των γνήσιων πλευρών ενός μονόπλοκου είναι αποφλοιώσιμο και κάθε ολική διάταξη των εδρών του είναι αποφλοίωση.



Παρατήρηση 16.3. Μια ολική διάταξη $G_1, G_2, \ldots, G_m$ των εδρών ενός αγνού μονοπλεκτικού συμπλέγματος Δ είναι αποφλοίωση εάνν για όλα τα $1 \leq i < k \leq m$ υπάρχει $1 \leq j < k$ τέτοιο ώστε

- $G_i \cap G_k \subseteq G_j \cap G_k$ και
- $G_j \cap G_k = G_k \setminus \{v\}$ για κάποιο $v \in G_k$.

Θα δείξουμε ότι $(-1)^{\dim(\Delta)} \tilde{\chi}(\Delta) \geq 0$ για κάθε αποφλοιώσιμο Δ.

Ορισμός 16.4. Έστω μονοπλεκτικό σύμπλεγμα Δ διάστασης $d-1$. Για $-1 \leq i \leq d-1$, έστω $f_i(\Delta)$ το πλήθος των πλευρών διάστασης i του Δ. Η ακολουθία

$$f(\Delta) = (f_{-1}(\Delta), f_0(\Delta), \dots, f_{d-1}(\Delta))$$

λέγεται f-διάνυσμα του Δ. Το πολυώνυμο

- $$f(\Delta, x) = f_{-1}(\Delta) + f_0(\Delta)x + f_1(\Delta)x^2 + \cdots + f_{d-1}(\Delta)x^d$$

λέγεται f-πολυώνυμο του Δ. Το h-πολυώνυμο του Δ ορίζεται ως

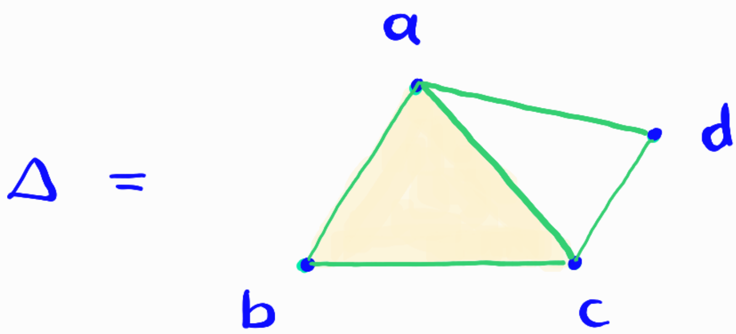
- $$h(\Delta, x) = \sum_{i=0}^{d} h_i(\Delta)\, x^i$$

$$= (1-x)^d f\left(\Delta, \frac{x}{1-x}\right) \qquad (16.1)$$

$$= \sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(\Delta)\, x^i (1-x)^{d-i}.$$

Η ακολουθία $h(\Delta) = (h_0(\Delta), h_1(\Delta), \ldots, h_d(\Delta))$ λέγεται h-διάνυσμα του Δ.

Παράδειγμα 16.5. (α) Για το



έχουμε $d=3$, $f_{-1}(\Delta)=1$, $f_0(\Delta)=4$, $f_1(\Delta)=5$ και $f_2(\Delta)=1$, άρα

- $f(\Delta,x) = 1+4x+5x^2+x^3$
- $h(\Delta,x) = (1-x)^3+4x(1-x)^2+5x^2(1-x)+x^3$

$$= 1+x-x^3$$

και $h(\Delta)=(1,1,0,-1)$. Το $h(\Delta)$ υπολογίζεται και με το λεγόμενο τρυκ του Stanley:

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&4&&& \\ &&1&&3&&5&& \\ &1&&2&&2&&1& \\ \multicolumn{8}{l}{\underbrace{1 \qquad 1 \qquad 0 \qquad -1}_{h(\Delta)}} \end{array}$$

(β) Έστω $\Delta = 2^{[d+1]} \setminus \{[d+1]\}$. Τότε, $f_{i-1}(\Delta) = \binom{d+1}{i}$ για $0 \leq i \leq d$, οπότε

- $h(\Delta, x) = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(\Delta)\, x^{i} (1-x)^{d-i}$

$$= \sum_{i=0}^{d} \binom{d+1}{i} x^i (1-x)^{d-i}$$

$$= \frac{1-x^{d+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^d$$

και $h(\Delta) = (1, 1, \ldots, 1)$.

(γ) Έστω $\Delta = \Delta(P_d)$, όπου P_d είναι το διατακτικό άθροισμα d αντιαλυσίδων, η καθεμιά με δύο στοιχεία. Τότε,

$$f_{i-1}(\Delta) = 2^i \binom{d}{i}, \qquad 0 \leq i \leq d,$$

οπότε

- $h(\Delta, x) = \sum_{i=0}^{d} 2^i \binom{d}{i} x^i (1-x)^{d-i}$

$$= (2x+1-x)^d$$

$$= (1+x)^d.$$

δηλαδή $h_i(\Delta) = \binom{d}{i}$ για $0 \leq i \leq d$.

Παρατήρηση 16.6. Από τον ορισμό του $h(\Delta)$ παίρνουμε τον τύπο

$$h_k(\Delta) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{d-i}{d-k} f_{i-1}(\Delta) \qquad (16.2)$$

για $0 \leq k \leq d$. Γράφοντας τη (16.1) στη μορφή

- $f(\Delta, y) = (1+y)^d \, h\left(\Delta, \dfrac{y}{1+y}\right)$

$$= \sum_{i=0}^{d} h_i(\Delta)\, y^i (1+y)^{d-i}$$

Βρίσκουμε επίσης ότι

$$f_{k-1}(\Delta) = \sum_{i=0}^{k} \binom{d-i}{k-i} h_i(\Delta) \qquad (16.3)$$

για $0 \leq k \leq d$. Ειδικότερα,

- $h_0(\Delta) = 1$
- $h_1(\Delta) = f_0(\Delta) - d$
- $h_d(\Delta) = (-1)^{d-1} \tilde{\chi}(\Delta)$
- $f_{d-1}(\Delta) = h_0(\Delta) + h_1(\Delta) + \cdots + h_d(\Delta)$. ∎

Θα δείξουμε ότι $h_k(\Delta) \geq 0$ για κάθε αποφλοιώσιμο Δ και κάθε k.