13. Παρατάγματα υπερεπιπέδων και χαρακτηριστικό πολυώνυμο (συνέχεια)

Έχουμε δείξει ότι για κάθε απλό γράφημα $G = ([n], E_G)$

- $$\chi(\mathcal{A}_G, q) = \# \; \kappa : [n] \to [q] \quad \kappa(i) \neq \kappa(j) \text{ για κάθε } \{i,j\} \in E_G$$

για κάθε $q \in \mathbb{Z}_{>0}$, όπου το $\mathcal{A}_G$ αποτελείται από τα υπερεπίπεδα $x_i - x_j = 0$ στον $\mathbb{R}^n$, για $\{i,j\} \in E_G$.

Ερώτημα. Μπορεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi(\mathcal{A}, q)$ να ερμηνευθεί συνδυαστικά για άλλα παρατάγματα υπερεπιπέδων $\mathcal{A}$;

Θεωρούμε παράταγμα υπερεπιπέδων $\mathcal{A}$ στον $\mathbb{R}^n$ που ορίζονται από εξισώσεις της μορφής

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b \qquad (13.8)$$

με $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}$ και συμβολίζουμε με $\mathbb{Z}_q$ την προσθετική ομάδα των ακεραίων modulo q. Αν H είναι το υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται από τη

(13.8), συμβολίζουμε με H_q το σύνολο των $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_q^n$ που ικανοποιούν τη (13.8) στο $\mathbb{Z}_q$ και θέτουμε

$$\mathcal{A}_q = \{ H_q : H \in \mathcal{A} \}.$$

Θεώρημα 3.22 (Athanasiadis, 1996)

Για κάθε παράταγμα $\mathcal{A}$ υπερεπιπέδων στον $\mathbb{R}^n$, όπως προηγουμένως, υπάρχουν θετικοί ακέραιοι m, k τέτοιοι ώστε

$$\chi(\mathcal{A}, q) = \# \left(\mathbb{Z}_q^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H_q \right)$$

για κάθε ακέραιο $q > k$ με μκδ$(q, m) = 1$.

Απόδειξη. Έστω L_q το σύνολο των τομών των $H_q \in \mathcal{A}_q$, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση $x \leq y \Leftrightarrow y \subseteq x$. Το $\hat{0} = \mathbb{Z}_q^n$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του L_q.

Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $m, k \in \mathbb{Z}_{>0}$ τέτοια ώστε $L_q \cong L_{\mathcal{A}}$ για κάθε ακέραιο $q > k$ με $\mu\kappa\delta(q, m) = 1$. Για αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\# X_q = \begin{cases} 0, & \text{αν } X = \emptyset \\ q^{\dim(X)}, & \text{αν } X \neq \emptyset \end{cases}$$

για κάθε τομή υπερεπιπέδων X του $\mathcal{A}$, όπου X_q είναι η αντίστοιχη τομή των συνόλων H_q. Πράγματι, το X ορίζεται από ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$Ax = b \qquad (13.9)$$

για πίνακες A και b διαστάσεων $p \times n$ και $p \times 1$ με ακέραια στοιχεία και $x = (x_1, x_2 \cdots x_n)^t$. Είναι γνωστό ότι υπάρχουν αντιστρέψιμοι επί του $\mathbb{Z}$ πίνακες P και Q για τους οποίους ο $P^{-1}AQ$ είναι διαγώνιος, οπότε το (13.9) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$c_i x_i = d_i \,, \qquad 1 \leq i \leq n$$

με $c_i, d_i \in \mathbb{Z}$ και αρκεί να επιλέξουμε τα m, k έτσι ώστε $c_i | m$ αν $c_i \neq 0$ και

$k > |d_i|$ αν $c_i = 0$.

Εφαρμόζοντας, τότε, το Παράδειγμα 9.6 με $\Omega = \mathbb{Z}_q^n$ στα υποσύνολα H_q του Ω παίρνουμε

$$\#\left(\mathbb{Z}_q^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H_q\right) = \sum_{X \in L_q} \mu_{L_q}(\hat{0}, X)\, \# X$$

$$= \sum_{X \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}} \mu_{\mathcal{L}_{\mathcal{A}}}(\hat{0}, X)\, q^{\dim(X)}$$

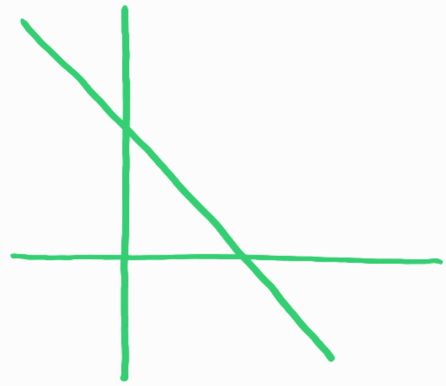
$$= \chi(\mathcal{A}, q). \quad \blacksquare$$

Γράφουμε

$$M_{\mathcal{A}}(q) = \mathbb{Z}_q^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H_q.$$

Παράδειγμα 13.23

(α) Έστω ότι το $\mathcal{A}$ αποτελείται από τις ευθείες $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ και $x_1 + x_2 = 1$ στο $\mathbb{R}^2$:

$\mathcal{A}$ = 

Τότε, για $q \geq 2$,

- $$\begin{aligned} \# M_{\mathcal{A}}(q) &= \# \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_q^2 : x_1, x_2 \neq 0, \\ &\qquad x_1 + x_2 \neq 1 \} \\ &= \# \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_q^2 : x_1 \neq 0 \text{ και} \\ &\qquad x_2 \neq 0, 1 - x_1 \} \end{aligned}$$

$$= (q-1) + (q-2)^2 = q^2 - 3q + 3$$

και συνεπώς $\chi(\mathcal{A}, q) = q^2 - 3q + 3$.

(β) Για απλό γράφημα $G = ([n], E_G)$ και κάθε $q \in \mathbb{Z}_{>0}$,

- $$\# M_{\mathcal{A}_G}(q) = \# \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_q^n : x_i \neq x_j \text{ για } \{i,j\} \in E_G \}$$
$$= \chi(G, q)$$

και συνεπώς $\chi(\mathcal{A}_G, q) = \chi(G, q)$.

(γ) Έστω ότι το $\mathcal{A}$ αποτελείται από τα υπερεπίπεδα

- $x_i = 0,$ $\qquad 1 \leq i \leq n$
- $x_i - x_j = 0,$ $\qquad 1 \leq i < j \leq n$
- $x_i + x_j = 0,$ $\qquad 1 \leq i < j \leq n$

στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε περιττό $q \in \mathbb{Z}_{>0}$,

- $$\# M_{\mathcal{A}}(q) = \# \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_q^n : x_i \neq 0,\ x_i \neq \pm x_j \}$$
$$= (q-1)(q-3) \cdots (q-2n+1)$$

διότι υπάρχουν $q-1$ επιλογές για το $x_1 \in \mathbb{Z}_q$ ώστε $x_1 \neq 0$, $q-3$ επιλογές για το $x_2 \in \mathbb{Z}_q$ ώστε $x_2 \neq 0, \pm x_1$, κ.ο.κ. Συμπεραίνουμε ότι

$$\chi(\mathcal{A},q) = (q-1)(q-3)\cdots(q-2n+1)$$

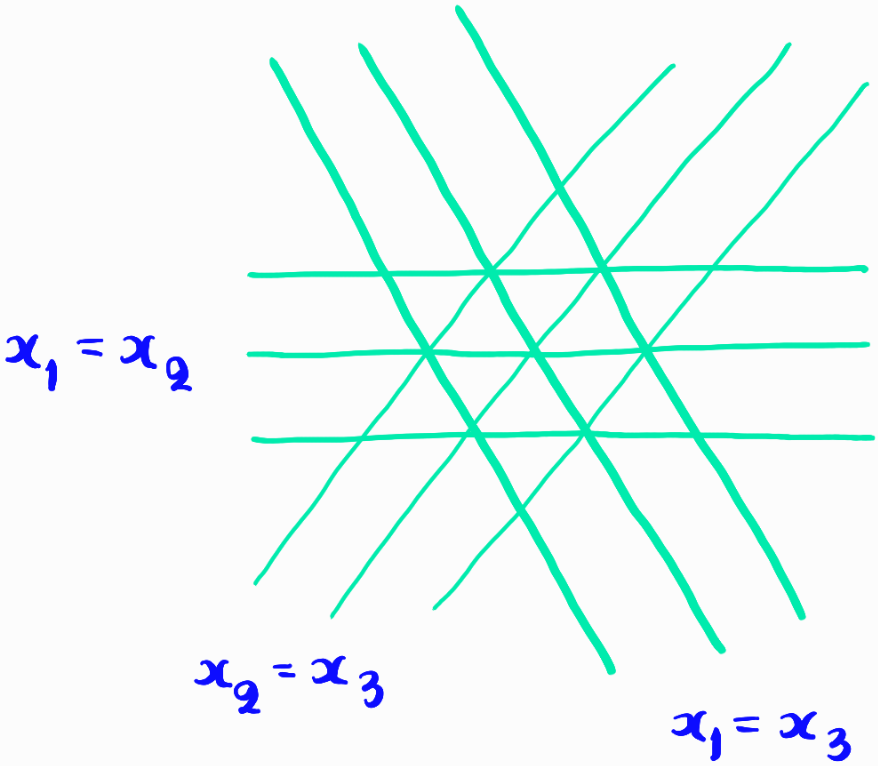
και ότι $r(\mathcal{A}) = (-1)^n \chi(\mathcal{A},-1) = 2^n n!$ για κάθε n. ■

<u>Παράδειγμα 13.24</u> Έστω τώρα ότι το $\mathcal{A}$ αποτελείται από τα υπερεπίπεδα

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ x_i - x_j = 0 \\ &\bullet\ x_i - x_j = 1 \\ &\bullet\ x_i - x_j = -1 \end{aligned}\right\} \quad 1 \leq i < j \leq n$$

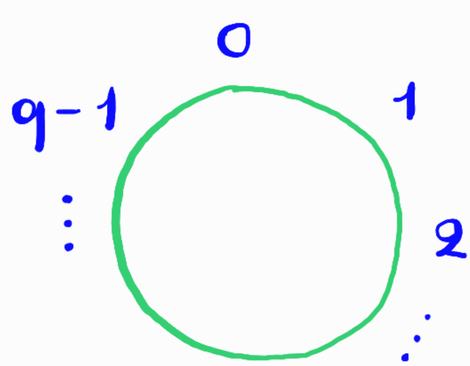
στον $\mathbb{R}^n$. Έχουμε

- $M_{\mathcal{A}}(q) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_q^n :$
  $x_i - x_j \neq 0, \pm 1$ για $i<j\}$.



$n = 3$

Θεωρούμε τις κλάσεις $0, 1, \ldots, q-1 \in \mathbb{Z}_q$ υπολοίπων $(\bmod q)$ σε κυκλική διάταξη



και το $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_q^n$ ως την τοποθέτηση των $1, 2, \ldots, n$ στις κλάσεις (δοχεία) $0, 1, 2, \ldots, q-1 \in \mathbb{Z}_q$, το i στο δοχείο $x_i \in \mathbb{Z}_q$. Αφού $x_i - x_j \neq 0, \pm 1$, τα $1, 2, \ldots, n$ θα πρέπει να βρίσκονται σε ανά δύο διαφορετικά και όχι διαδοχικά δοχεία.

Επιλέγοντας πρώτα την κυκλική αναδιάταξη των $1, 2, \ldots, n$ που ορίζεται βρίσκουμε ότι

$$\# M_A(q) = (n-1)! \binom{q-n-1}{n-1} q$$

$(q \geq n+1)$ και συμπεραίνουμε ότι $\chi(A, q) = q(q-n-1)(q-n-2) \cdots (q-2n+1)$. Ειδικότερα, $r(\mathcal{A}) = \frac{n!}{n+1}\binom{2n}{n}$ για κάθε n.

Παράδειγμα 13.25. Έστω ότι το $\mathcal{A}$ αποτελείται από τα υπερεπίπεδα

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ x_i - x_j = 0 \\ \bullet\ x_i - x_j = 1 \end{array}\right\} \quad 1 \leq i < j \leq n$$

στον $\mathbb{R}^n$. Έχουμε

- $M_{\mathcal{A}}(q) = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_q^n : x_i - x_j \neq 0, 1 \text{ για } i<j \}.$

Θεωρώντας πρώτα τα δοχεία (χωρίς την αρίθμηση) που μένουν κενά και τοποθετώντας τους $1, 2, \ldots, n$ ανάμεσά τους ώστε να μη σχηματίζεται κάθοδος ($x_i = x_j + 1$) βρίσκουμε ότι

$$\chi(A, q) = q(q-n)^{n-1}$$

και συμπεραίνουμε ότι $r(A) = (-1)^n \chi(A, -1) = (n+1)^{n-1}$ για κάθε n.

14. Το πολυώνυμο ζήτα

Έστω πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(P, \leq)$. Για $m \geq 2$ συμβολίζουμε με $Z(P, m)$ το πλήθος των ασθενών αλυσίδων

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{m-1}$$

στο P, δηλαδή ακολουθιών $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$ στοιχείων του P με $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{m-1}$.

Παράδειγμα 14.1 Έστω $P = d+1$ η αλυσίδα $\{1 < 2 < \dots < d+1\}$. Το $Z(P,m)$ ισούται με το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $a_1 + a_2 + \dots + a_{d+1} = m-1$ στο $\mathbb{N}$, οπότε

$$Z(P,m) = \binom{m+d-1}{d}.$$

Πρόταση 14.2 Έστω d το μέγιστο μήκος (# στοιχείων -1) μιας αλυσίδας στο P.

(α) Η συνάρτηση $Z(P,m)$ είναι πολυώνυμο βαθμού d στο m. Ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου m^d είναι ίσος με $c_d/d!$, όπου c_d είναι το πλήθος των αλυσίδων μέγιστου μήκους d στο P.

(β) $Z(P,1) = 1 + \mu_{\hat{P}}(\hat{0},\hat{1})$, όπου το $Z(P,m)$ ορίζεται για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ λόγω του (α).

(γ) Αν το P έχει ελάχιστο στοιχείο $\hat{0}_P$ και μέγιστο στοιχείο $\hat{1}_P$, τότε

- $Z(P,-1) = \mu_P(\hat{0}_P, \hat{1}_P)$
- $Z(P,1) = 1$
- $Z(P,0) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \hat{0}_P \neq \hat{1}_P \\ 1, & \text{αν } \hat{0}_P = \hat{1}_P. \end{cases}$

Απόδειξη. (α) Κάθε ασθενής αλυσίδα C: $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{m-1}$ ορίζει την αλυσίδα

$$\mathrm{supp}(C) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}\}$$

του P. Το πλήθος των ασθενών αλυσίδων $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{m-1}$ με δοσμένο φορέα

$$\mathrm{supp}(C) = \{y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}\}$$

ισούται με το πλήθος των συνθέσεων του $m-1$ με $k+1$ μέρη, δηλαδή με $\binom{m-2}{k}$. Άρα,

$$Z(P, m) = \sum_{k=0}^{d} c_k \binom{m-2}{k}. \qquad (14.1)$$

όπου c_k είναι το πλήθος των αλυσίδων μήκους k στο P. Έπεται το (α).

(β) Από τη (14.1) παίρνουμε ότι

$$Z(P,1) = \sum_{k=0}^{d} c_k \binom{-1}{k} = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k c_k .$$

Το ζητούμενο έπεται από τον τύπο αυτό και το Θεώρημα 10.10.

(γ) Παρατηρούμε ότι

- $$Z(P,m) = \#\{\hat{0}_P \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{m-1} \leq \hat{1}_P\}$$
$$= \zeta_P^m(\hat{0}_P, \hat{1}_P)$$

για $m \geq 2$. Η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, αφού το $\zeta_P^m(\hat{0}_P, \hat{1}_P)$ είναι επίσης πολυώνυμο στο m (η απόδειξη παραλείπεται). Το ζητούμενο προκύπτει θέτοντας $m = -1, 0, 1$, αντίστοιχα. ∎

<u>Παράδειγμα 14.3.</u> Έστω $P = B_n$. Υπάρχουν m^n ακολουθίες συνόλων

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \subseteq S_{m-1} \subseteq [n]$$

και συνεπώς $Z(B_n, m) = m^n$. Θέτοντας $m = -1$ παίρνουμε (ξανά) ότι $\mu_{B_n}(\hat{0}, \hat{1}) = (-1)^n$.

15. Το σύμπλεγμα της διάταξης

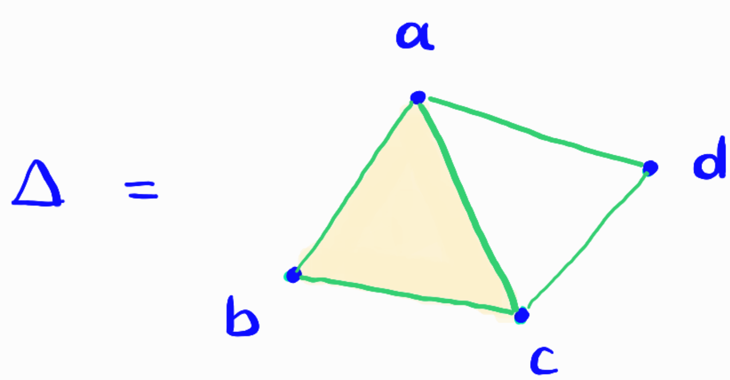
Έστω πεπερασμένο σύνολο V.

Ορισμός 15.1. Αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα (simplicial complex) επί του V λέγεται κάθε οικογένεια Δ υποσυνόλων του V με την ιδιότητα $F \subseteq G \in \Delta \Rightarrow F \in \Delta$.

Θέτουμε $\dim(F) = \#F - 1$ για $F \in \Delta$ (οπότε $\dim(\emptyset) = -1$) και

$$\dim(\Delta) = \max_{F \in \Delta} \dim(F).$$

Π.χ. αν $V = \{a, b, c, d\}$ και το Δ αποτελείται από όλα τα υποσύνολα των $\{a,b,c\}$, $\{a,d\}$ και $\{c,d\}$, τότε σχηματικά



και $\dim(\Delta) = 2$.

Ορολογία. Τα στοιχεία του Δ λέγονται πλευρές, ή όψεις. Συμβολίζοντας με $f_i(\Delta)$ το πλήθος των πλευρών διάστασης i του Δ, οπότε

- $$f_{-1}(\Delta) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \Delta = \emptyset \\ 1, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

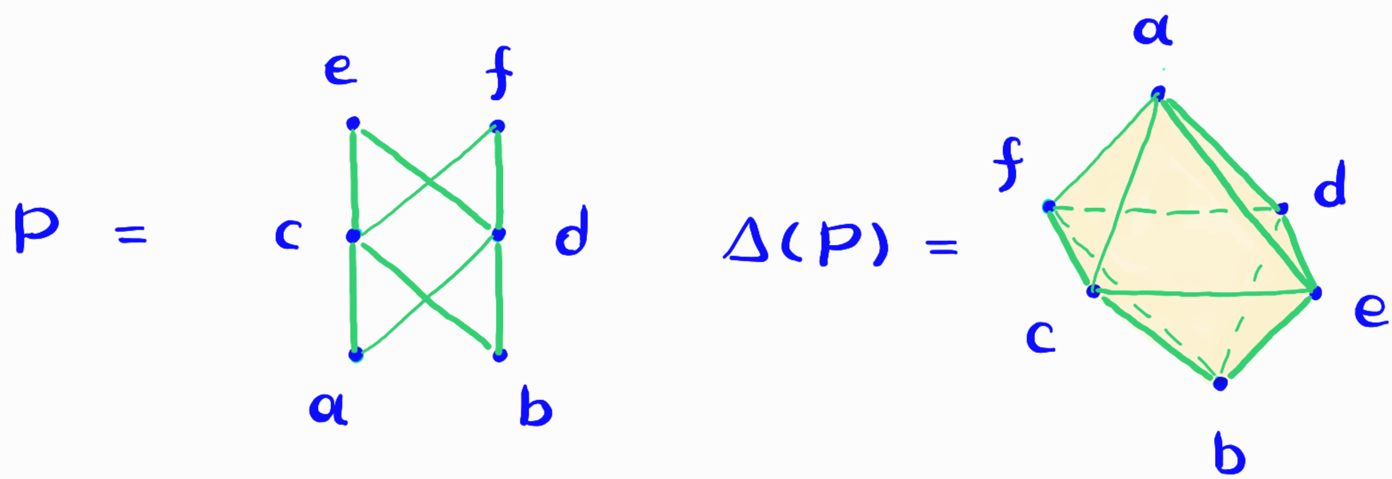
- $f_0(\Delta)$ = # κορυφών του Δ
- $f_1(\Delta)$ = # ακμών του Δ
- $f_2(\Delta)$ = # πλευρών διάστασης 2 του Δ

κ.ο.κ., ο ακέραιος

- $$\tilde{\chi}(\Delta) = \sum_{i \geq -1} (-1)^i f_i(\Delta)$$
$$= -f_{-1}(\Delta) + f_0(\Delta) - f_1(\Delta) + \cdots$$

λέγεται ανηγμένη χαρακτηριστική Euler του Δ. Στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε $\tilde{\chi}(\Delta) = -1+4-5+1-0+\cdots = -1$.

Ορισμός 15.2. Έστω πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P. Το σύνολο όλων των αλυσίδων στο P (το οποίο είναι μονοπλεκτικό σύμπλεγμα επί του P) λέγεται σύμπλεγμα της διάταξης (order complex) του P και συμβολίζεται με $\Delta(P)$.



Πρόταση 15.3. $\mu_{\hat{P}}(\hat{0},\hat{1}) = \tilde{\chi}(\Delta(P))$.

Απόδειξη. Η πρόταση είναι αναδιατύπωση του Θεωρήματος 10.10. ■