13. Παρατάγματα υπερεπιπέδων και χαρακτηριστικό πολυώνυμο (συνέχεια)

Υπενθυμίζουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός παρατάγματος υπερεπιπέδων $\mathcal{A}$ στο χώρο $\mathbb{K}^d$ ορίζεται ως

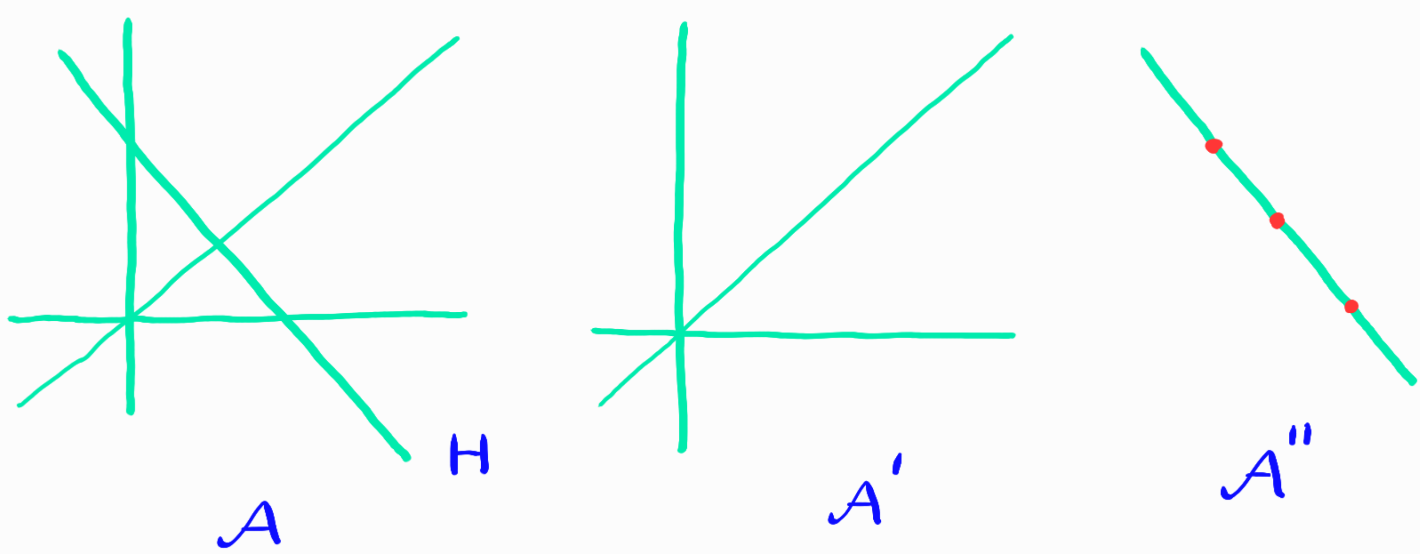
$$\chi(\mathcal{A}, q) = \sum_{x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}} \mu_{\mathcal{L}_{\mathcal{A}}}(\hat{0}, x)\, q^{\dim(x)} \qquad (13.3)$$

όπου $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ είναι το σύνολο των τομών (intersection poset) του $\mathcal{A}$.

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 13.3 θα θεωρήσουμε διακεκριμένο υπερεπίπεδο $H \in \mathcal{A}$ και τα παρατάγματα

- $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \{H\}$
- $\mathcal{A}'' = \{ H \cap H' : H' \in \mathcal{A}' \}$.

Το $\mathcal{A}''$ είναι παράταγμα υπερεπιπέδων στον αφφινικό χώρο $H \cong \mathbb{K}^{d-1}$. Π.χ.



Παρατηρούμε ότι $r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}') + r(\mathcal{A}'') = 6 + 4 = 10$.

Λήμμα 13.12.

(α) $$\chi(\mathcal{A}, q) = \sum_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \\ \cap \mathcal{B} \neq \emptyset}} (-1)^{\#\mathcal{B}} \, q^{\dim(\cap \mathcal{B})}$$

όπου $\displaystyle \cap \mathcal{B} := \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H$.

(β)

$$\chi(\mathcal{A}, q) = \chi(\mathcal{A}', q) - \chi(\mathcal{A}'', q). \qquad (13.4)$$

Απόδειξη. **(α)** Από την Πρόταση 11.8 έχουμε

$$\mu_{\mathcal{L}_{\mathcal{A}}}(\hat{0}, x) = \sum_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \\ \cap \mathcal{B} = x}} (-1)^{\# \mathcal{B}}, \qquad x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}.$$

Επομένως,

- $$\chi(\mathcal{A}, q) = \sum_{x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}} \mu_{\mathcal{L}_{\mathcal{A}}}(\hat{0}, x)\, q^{\dim(x)}$$

$$= \sum_{x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}} \Bigg(\sum_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \\ \cap \mathcal{B} = x}} (-1)^{\# \mathcal{B}} \Bigg) q^{\dim(x)}$$

$$= \sum_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \\ \cap \mathcal{B} \neq \emptyset}} (-1)^{\# \mathcal{B}}\, q^{\dim(\cap \mathcal{B})}.$$

(β) Προκύπτει άμεσα από το (α), σπάζοντας το άθροισμα σε δύο αθροίσματα, ένα στο οποίο $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \{H\}$ (δηλαδή με $H \notin \mathcal{B}$) και ένα με $H \in \mathcal{B}$. ∎

Θεώρημα 13.3′ Για κάθε παράταγμα $\mathcal{A}$ αφφινικών υπερεπιπέδων στο χώρο $\mathbb{R}^d$ έχουμε

$$r(\mathcal{A}) = (-1)^d \chi(\mathcal{A}, -1)$$

και

$$b(\mathcal{A}) = \begin{cases} (-1)^d \chi(\mathcal{A}, 1), & \text{αν το } \mathcal{A} \text{ είναι ουσιώδες} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Απόδειξη. Για τον πρώτο τύπο εφαρμόζουμε επαγωγή στο πλήθος $\# \mathcal{A}$ των υπερεπιπέδων του $\mathcal{A}$.

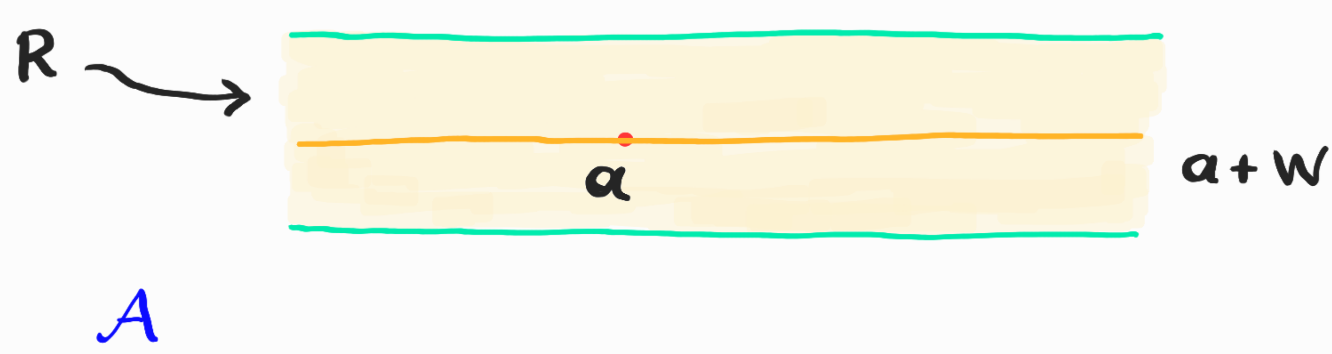
Για $\mathcal{A} = \emptyset$ το ζητούμενο ισχύει αφού $r(\mathcal{A}) = 1$ και $\chi(\mathcal{A}, q) = q^d$. Διαφορετικά, ορίζουμε τα $\mathcal{A}', \mathcal{A}''$ και παρατηρούμε ότι

- $$r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}') + r(\mathcal{A}'')$$
- $$(-1)^d \chi(\mathcal{A}, -1) = (-1)^d \chi(\mathcal{A}', -1) + (-1)^{d-1} \chi(\mathcal{A}'', -1)$$

λόγω του ορισμού του $r(\mathcal{A})$, των $\mathcal{A}'$ και $\mathcal{A}''$ και του Λήμματος 13.12. Αφού $\# \mathcal{A}'$,

$\# A'' < \# A$, το ζητούμενο έπεται από τα παραπάνω και την υπόθεση της επαγωγής για τα A', A''.

Για το δεύτερο τύπο έχουμε $b(A) = 0$ αν το A δεν είναι ουσιώδες, διότι τότε υπάρχει μονοδιάστατος χώρος $W \subseteq \mathbb{R}^d$ παράλληλος σε κάθε υπερεπίπεδο του A, οπότε $a + W \subseteq R$ για κάθε περιοχή R του A και κάθε $a \in R$.

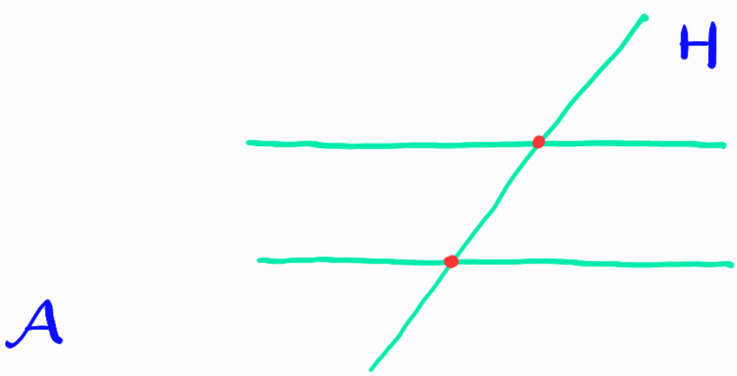


Έστω τώρα ότι το $\mathcal{A}$ είναι ουσιώδες. Τότε, υπάρχουν $H_1, H_2, \dots, H_d \in \mathcal{A}$ η τομή των οποίων είναι ένα σημείο στον $\mathbb{R}^d$. Εφαρμόζουμε πάλι επαγωγή στο $m := \# \mathcal{A} \geq d$.

Αν $m = d$, τότε $\chi(\mathcal{A}, q) = (q-1)^d$ και $b(\mathcal{A}) = \chi(\mathcal{A}, 1) = 0$. Διαφορετικά, υπάρχει $H \in \mathcal{A}$ με $H \neq H_1, H_2, \dots, H_d$ με το οποίο ορίζουμε τις $\mathcal{A}'$ και $\mathcal{A}''$. Παρατηρούμε ότι

- $$b(\mathcal{A}) = b(\mathcal{A}') + b(\mathcal{A}'')$$
- $$(-1)^d \chi(\mathcal{A}, 1) = (-1)^d \chi(\mathcal{A}', 1) + (-1)^{d-1} \chi(\mathcal{A}'', 1).$$

Αφού οι $\mathcal{A}'$ και $\mathcal{A}''$ είναι επίσης ουσιώδεις (τάξης d-1 και d, αντίστοιχα), το ζητούμενο προκύπτει ξανά από την υπόθεση της επαγωγής για τα $\mathcal{A}'$ και $\mathcal{A}''$. ∎



$$b(\mathcal{A}) = b(\mathcal{A}') = 0, \quad b(\mathcal{A}'') = 1$$

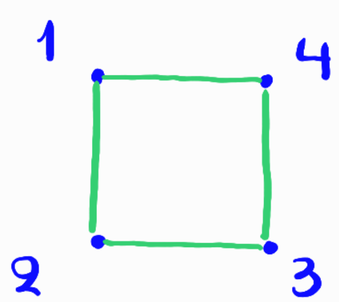
Έστω τώρα απλό γράφημα G με κορυφές $1, 2, \ldots, n$ και σύνολο ακμών

$$E_G \subseteq \{\{i,j\} : 1 \leq i < j \leq n\}$$

και έστω $\mathcal{A}_G$ το παράταγμα των υπερεπιπέδων

- $x_i - x_j = 0, \quad \{i,j\} \in E_G$

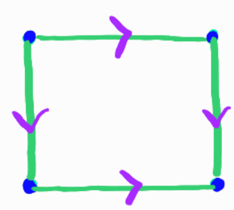
ένα για κάθε ακμή του G. Π.χ. αν

$G =$ 

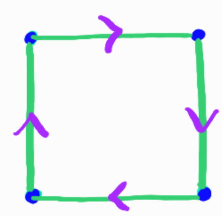
τότε το $\mathcal{A}_G$ αποτελείται από τα υπερεπίπεδα $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$, $x_3 = x_4$ και $x_1 = x_4$ στον $\mathbb{R}^4$.

Ερώτημα: Πώς ερμηνεύεται το θεώρημα 13.3΄ για τα παρατάγματα $\mathcal{A}_G$;

Ορισμός 13.13. Προσανατολισμός του G λέγεται η επιλογή κατεύθυνσης $u \to v$ ή $v \to u$ για κάθε ακμή $\{u, v\}$ του G. Ένας προσανατολισμός που δεν περιέχει προσανατολισμένους κύκλους λέγεται άκυκλος.

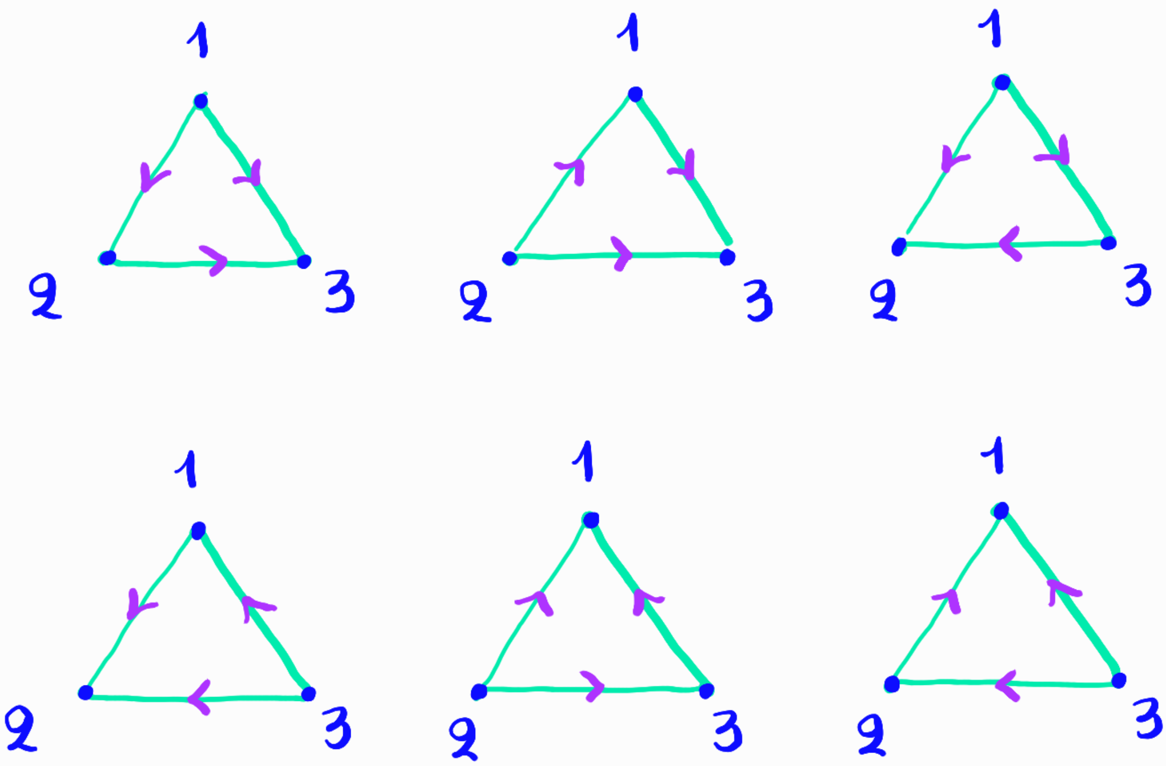


άκυκλος



μη άκυκλος

Παρατήρηση 13.14 Υπάρχουν ακριβώς $n!$ άκυκλοι προσανατολισμοί του πλήρους απλού γραφήματος G με κορυφές $1, 2, \ldots, n$ (οι οποίες αντιστοιχούν στις ολικές διατάξεις των $1, 2, \ldots, n$), όσοι και οι περιοχές του παρατάγματος $\mathcal{A}_G$.



Πρόταση 13.15 Το πλήθος των περιοχών του $\mathcal{A}_G$ ισούται με το πλήθος των άκυκλων προσανατολισμών του G, για κάθε απλό γράφημα G.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{R}(G)$ το σύνολο των περιοχών του $\mathcal{A}_G$ και $AO(G)$ εκείνο των άκυκλων προσανατολισμών του G. Για $R \in \mathcal{R}(G)$ έστω $f(R)$ ο προσανατολισμός του G που ορίζεται θέτοντας

- $i \to j \iff x_i < x_j$ για κάθε σημείο $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R$

για $\{i,j\} \in E_G$. Αφού $R \neq \emptyset$, ο προσανατολισμός $f(R)$ είναι άκυκλος και συνεπώς έχουμε μια καλά ορισμένη απεικόνιση

$$f : \mathcal{R}(G) \longrightarrow AO(G)$$

η οποία μάλιστα είναι 1-1. Για να δείξουμε ότι είναι και επί, έχουμε να δείξουμε ότι για κάθε $o \in AO(G)$, η περιοχή $g(o)$ του $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται ως

- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in g(o) \iff x_i < x_j$ για κάθε $\{i,j\} \in E_G$ με $i \xrightarrow{o} j$

είναι μη κενή. Αυτό συμβαίνει διότι

$$g(0) \supseteq \{ x \in \mathbb{R}^n : x_{\sigma(1)} > x_{\sigma(2)} > \cdots > x_{\sigma(n)} \}$$

για κάποια μετάθεση $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. ■

Για να ερμηνεύσουμε συνδυαστικά το $\chi(\mathcal{A}_G, q)$ θεωρούμε ότι $q \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Ορισμός 13.16. Χρωματισμός του G με χρώματα $1, 2, \ldots, q$ λέγεται κάθε απεικόνιση $\kappa : [n] \to [q]$. Ένας τέτοιος χρωματισμός λέγεται γνήσιος αν $\kappa(i) \neq \kappa(j)$ για κάθε ακμή $\{i, j\} \in E_G$.

Συμβολίζουμε με $\chi(G,q)$ το πλήθος των γνήσιων χρωματισμών $\kappa : [n] \to [q]$ και ονομάζουμε τη συνάρτηση $\chi(G,q)$ χρωματικό πολυώνυμο του G.

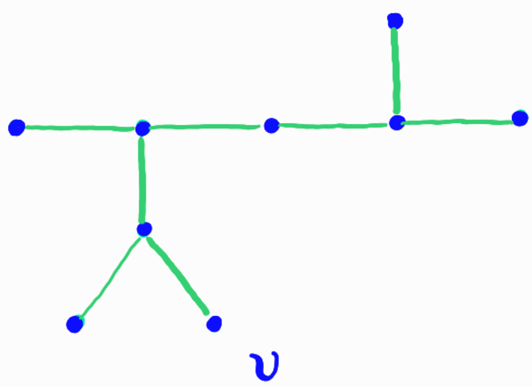
Παράδειγμα 13.17.

(α) Αν $E_G = \emptyset$, τότε κάθε χρωματισμός $\kappa : [n] \to [q]$ είναι γνήσιος και συνεπώς $\chi(G,q) = q^n$.

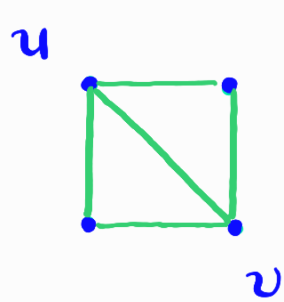
(β) Αν $E_G = \{\{i,j\} : 1 \le i < j \le n\}$, τότε οι γνήσιοι χρωματισμοί $\kappa : [n] \to [q]$ του G είναι ακριβώς οι 1-1 απεικονίσεις αυτού του τύπου και συνεπώς

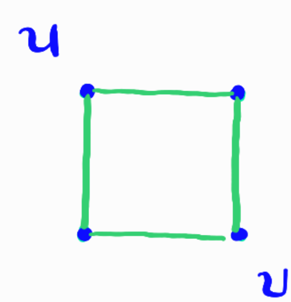
$$\chi(G,q) = q(q-1)(q-2)\cdots(q-n+1).$$

(γ) Αν το G είναι δένδρο, τότε $\chi(G,q) = q(q-1)^{n-1}$.



(δ) Αν

$G =$ 

$H =$ 

τότε

- $\chi(G,q) = q(q-1)(q-2)^2$
- $\chi(H,q) = \chi(G,q) + q(q-1)^2$

$$= q(q-1)(q^2-3q+3). \quad \blacksquare$$

Πρόταση 13.18. Για κάθε απλό γράφημα G στο σύνολο κορυφών $[n]$ και κάθε $q \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\chi(A_G, q) = \chi(G,q)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο Ω όλων των χρωματισμών $\kappa : [n] \to [q]$ και για $e = \{i,j\} \in E_G$ θέτουμε

$$S_e = \{\kappa \in \Omega : \kappa(i) = \kappa(j)\}.$$

Τότε,

$$\chi(G,q) = \#\Big(\Omega \smallsetminus \bigcup_{e\in E_G} S_e\Big). \qquad (13.5)$$

Από το Παράδειγμα 9.6 και τη (13.5) παίρνουμε

$$\chi(G,q) = \sum_{y\in L} \mu_L(\hat{0}, y)\, \# y \qquad (13.6)$$

όπου L είναι το σύνολο των μη κενών τομών των συνόλων S_e, $e\in E_G$, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση $x \le y \Leftrightarrow x \supseteq y$ και $\hat{0} = \Omega$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του L. Αφού (για $q \ge n$) υπάρχει εμφανής ισομορφισμός

$$\varphi : L \longrightarrow \mathcal{L}_{A_G}$$

μερικώς διατεταγμένων συνόλων με

$$\# y = q^{\dim(\varphi(y))}$$

για κάθε $y \in L$, από την (13.6) συμπεραί-νουμε ότι

$$\bullet \quad \chi(G, q) = \sum_{x \in \mathcal{L}_{A_G}} \mu(\hat{0}, x)\, q^{\dim(x)}$$

$$= \chi(A_G, q). \qquad \blacksquare$$

Πόρισμα 13.19 Για κάθε απλό γράφημα G στο σύνολο κορυφών $[n]$:

(α) Η συνάρτηση $\chi(G,q)$ είναι μονικό πολυώνυμο βαθμού n στο q, οι συντελεστές του οποίου εναλλάσσονται σε πρόσημο.

(β) Ο ακέραιος $(-1)^n \chi(G,-1)$ είναι ίσος με το πλήθος των άκυκλων προσανατολισμών του G (Stanley, 1973).

Απόδειξη. Προκύπτει συνδυάζοντας το Θεώρημα 13.3′ με τις Προτάσεις 13.15 και 13.18. ■

Άσκηση 13.20. Δώστε εναλλακτικές αποδείξεις της Πρότασης 13.18:

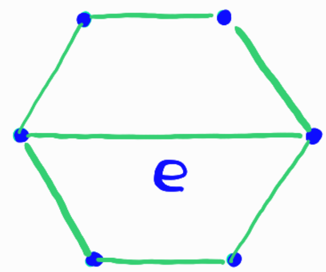
(α) Χρησιμοποιώντας το (α) του Λήμματος 13.12 και την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού στο δεξιό μέλος της (13.5).

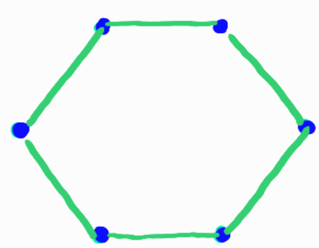
(β) Χρησιμοποιώντας το (β) του Λήμματος 13.12 και αποδεικνύοντας τον αναδρομικό τύπο

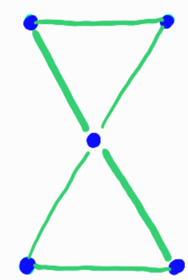
$$\chi(G,q) = \chi(G',q) - \chi(G'',q)$$

για το χρωματικό πολυώνυμο, όπου τα G' και G'' προκύπτουν από το G με διαγραφή και συστολή μιας ακμής $e \in E_G$.

αντίστοιχα.

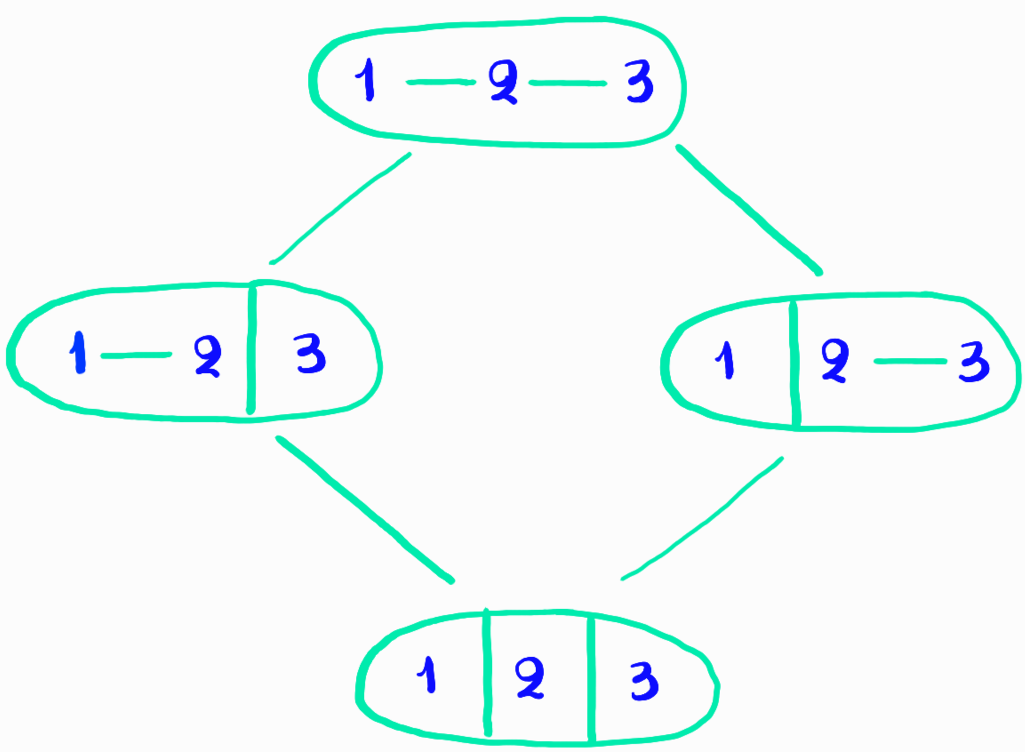
$G =$ 

$G' =$ 

$G'' =$ 

Παρατήρηση 13.21. Ονομάζουμε μια διαμέριση $x = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ του $[n]$ G-συνεκτική αν το επαγόμενο υπογράφημα του G στο σύνολο κορυφών B_i είναι συνεκτικό για κάθε $i \in [k]$. Τότε, το $\mathcal{L}_{A_G}$ είναι ισόμορφο με το σύνολο των G-συνεκτικών διαμερίσεων του $[n]$, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση που επάγεται από το Π_n.

Π.χ. αν $n=3$ και $E_G = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$, τότε

$L_G =$ 

Στο L_G έχουμε $\hat{0} = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ και συνάρτηση τάξης $\rho(x) = n - \#x$. Έτσι, η Πρόταση 13.8 ισοδυναμεί με τον τύπο

$$\chi(G,q) = \sum_{x \in L_G} \mu_{L_G}(\hat{0}, x)\, q^{\#x}. \qquad (13.7)$$