13. Παρατάγματα υπερεπιπέδων και χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Έστω παράταγμα $\mathcal{A}$ αφφινικών υπερεπιπέδων στο χώρο $\mathbb{R}^d$.

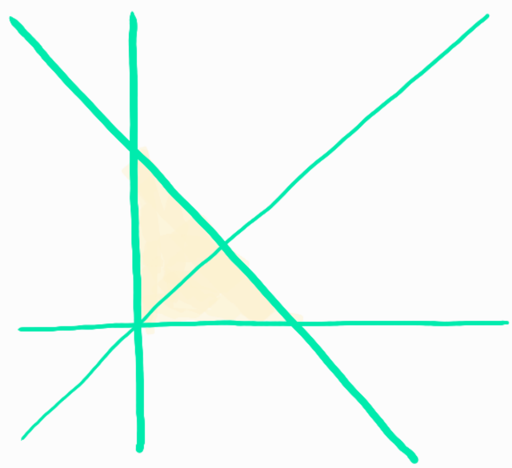
Ορισμός 13.1. Οι συνεκτικές συνιστώσες του χώρου

$$M_{\mathcal{A}} = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$$

λέγονται περιοχές του $\mathcal{A}$. Μια περιοχή λέγεται φραγμένη αν είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

Θα συμβολίζουμε με $r(\mathcal{A})$ και $b(\mathcal{A})$

το πλήθος των περιοχών και των φραγ-
μένων περιοχών του $\mathcal{A}$, αντίστοιχα.

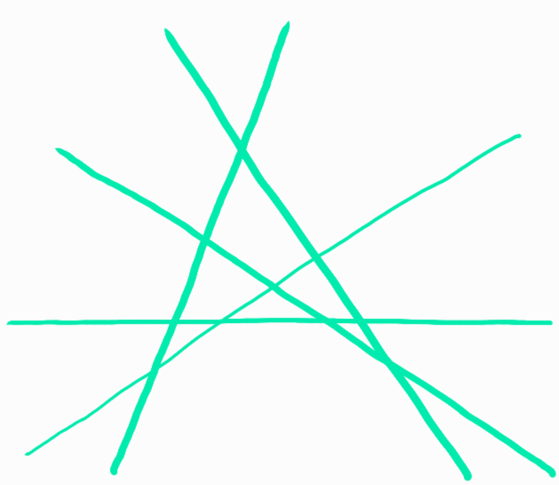
$\mathcal{A}$ = 

$r(\mathcal{A}) = 10$

$b(\mathcal{A}) = 2$.

Παραδείγματα 13.2.

(α) Αν το $\mathcal{A}$ αποτελείται από m ευθεί-

$\mathcal{A}$ = 

$r(\mathcal{A}) = 16$

$b(\mathcal{A}) = 6$

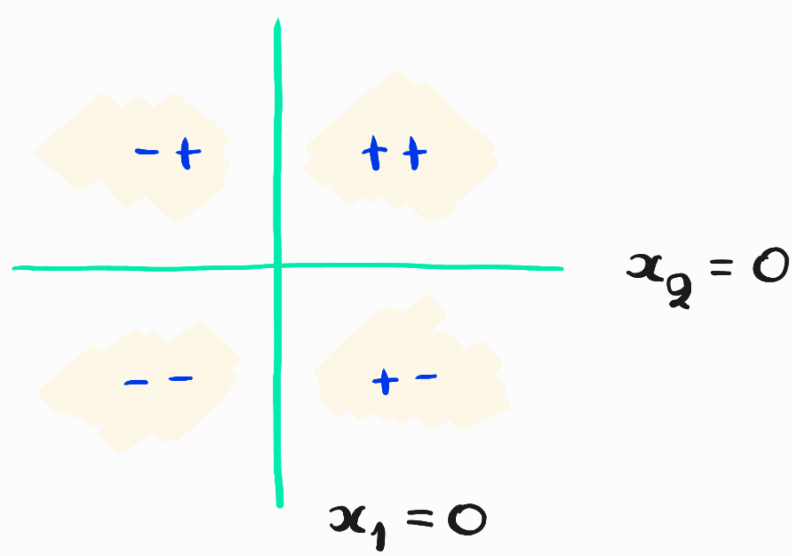
ες σε γενική θέση στον $\mathbb{R}^2$ (οποιεσδήποτε δύο τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο από το οποίο δε διέρχεται τρίτη ευθεία, τότε

- $r(\mathcal{A}) = (m^2+m+2)/2$
- $b(\mathcal{A}) = (m^2-3m+2)/2$.

(β) Έστω $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$, όπου

$$H_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\}$$

για $i \in [n]$.

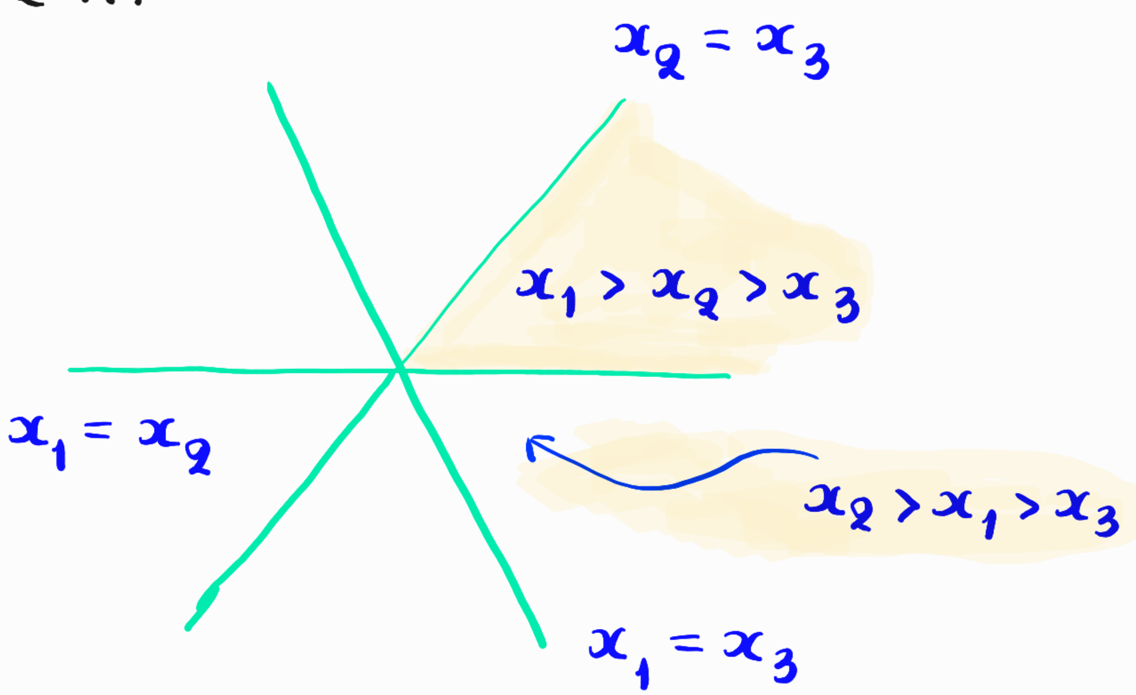


Οι περιοχές του $\mathcal{A}$ ορίζονται από τις ανισότητες $\varepsilon_i x_i > 0$ με $\varepsilon_i \in \{-1,1\}$, για $i \in [n]$. Υπάρχει μια περιοχή για κάθε επιλογή προσήμων $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ και συνεπώς $r(\mathcal{A}) = 2^n$. Επίσης, $b(\mathcal{A}) = 0$.

(γ) Έστω $\mathcal{A} = \{ H_{ij} : 1 \leq i < j \leq n \}$, όπου

$$H_{ij} = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = x_j \}$$

για $1 \leq i < j \leq n$.



Οι περιοχές ορίζονται από συστήματα α-νισοτήτων της μορφής

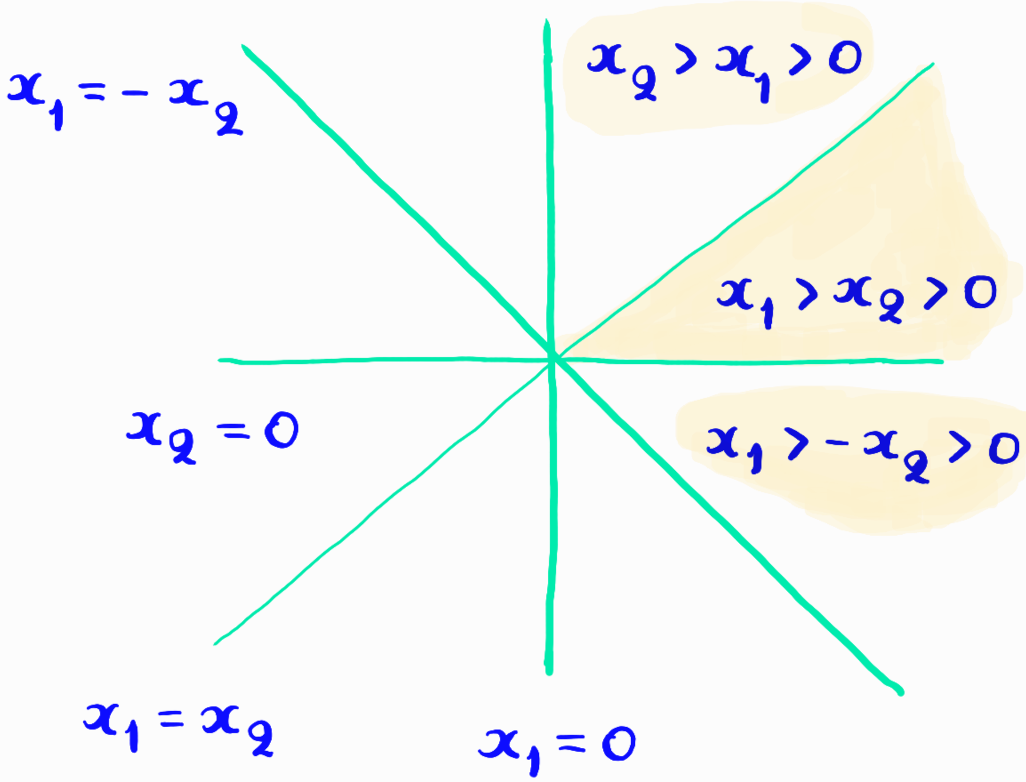
$$x_{\sigma(1)} > x_{\sigma(2)} > \cdots > x_{\sigma(n)}$$

ένα για κάθε μετάθεση $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Άρα, $r(\mathcal{A}) = n!$ ενώ $b(\mathcal{A}) = 0$.

(δ) Ομοίως, αν το $\mathcal{A}$ αποτελείται από τα υπερεπίπεδα του $\mathbb{R}^n$ που ορίζονται από τις γραμμικές εξισώσεις

- $x_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n$
- $x_i - x_j = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n$
- $x_i + x_j = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n$

τότε οι περιοχές του $\mathcal{A}$ ορίζονται από

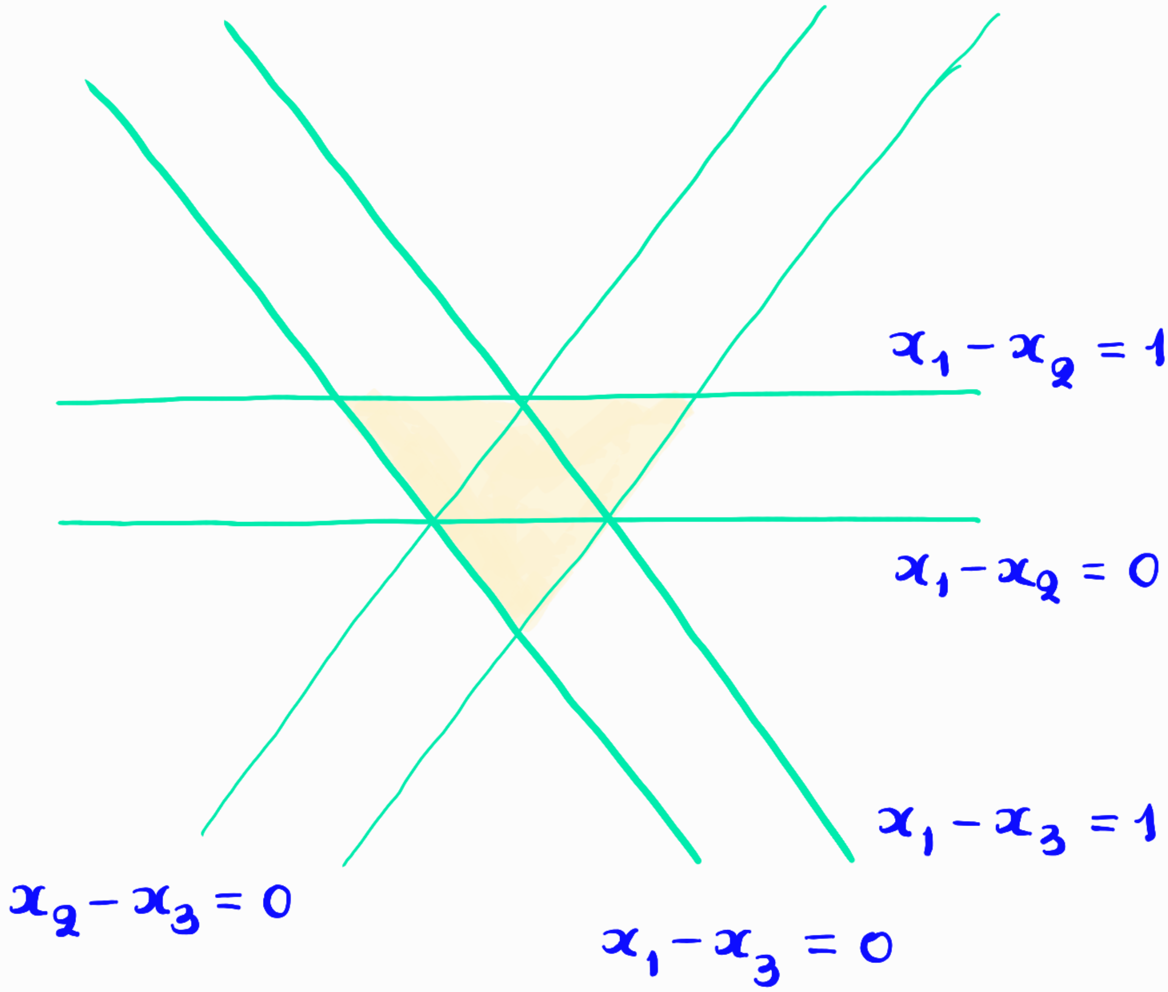


συστήματα ανισοτήτων της μορφής

$$\varepsilon_1 x_{\sigma(1)} > \varepsilon_2 x_{\sigma(2)} > \cdots > \varepsilon_n x_{\sigma(n)} > 0$$

ένα για κάθε $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ και κάθε $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ και συνεπώς $r(A) = 2^n n!$

(ε)



Έστω $\mathcal{A}$ το παράταγμα των αφφινικών υπερεπιπέδων

- $x_i - x_j = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n$
- $x_i - x_j = 1, \quad 1 \leq i < j \leq n$

στον $\mathbb{R}^n$. Θα δείξουμε ότι $r(A) = (n+1)^{n-1}$ και ότι (περιορίζοντας το A στο υπερεπίπεδο $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$) $b(A) = (n-1)^{n-1}$. ∎

Ερώτημα. Πώς ακριβώς εξαρτώνται τα $r(A)$, $b(A)$ από τη "συνδυαστική του A";

Ορολογία. Θα λέμε ότι το παράταγμα A υπερεπιπέδων στον $\mathbb{R}^d$ είναι ουσιώδες αν η τάξη του L_A είναι ίση με d (ισοδύναμα, αν η τομή κάποιων από τα υπερεπίπεδα του A αποτελείται από ένα μόνο σημείο.

όχι ουσιώδες

ναι

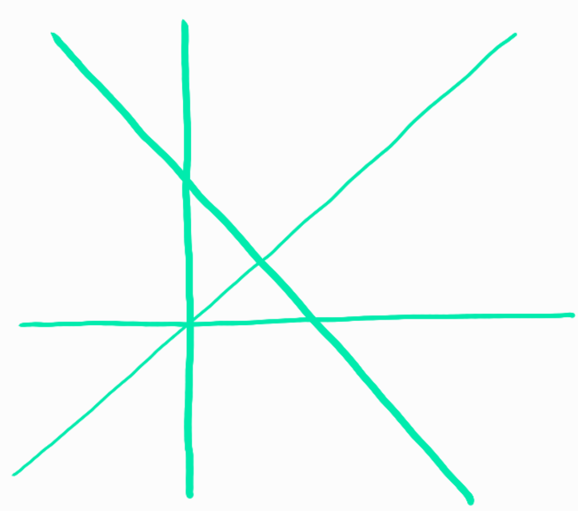
Θεώρημα 13.3. (Las Vergnas, Zaslavsky '75)
Για κάθε παράταγμα $\mathcal{A}$ αφφινικών υπερεπιπέδων στον $\mathbb{R}^d$,

$$r(\mathcal{A}) = \sum_{x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}} |\mu_{\mathcal{L}_{\mathcal{A}}}(\hat{0}, x)|. \qquad (13.1)$$

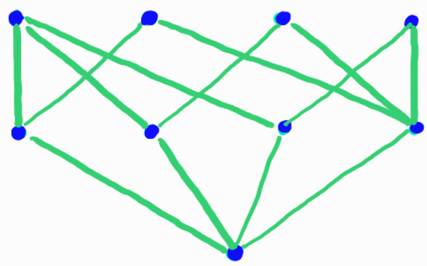
Αν το $\mathcal{A}$ είναι ουσιώδες, τότε

$$b(\mathcal{A}) = \left| \sum_{x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}} \mu_{\mathcal{L}_{\mathcal{A}}}(\hat{0}, x) \right|. \qquad (13.2)$$

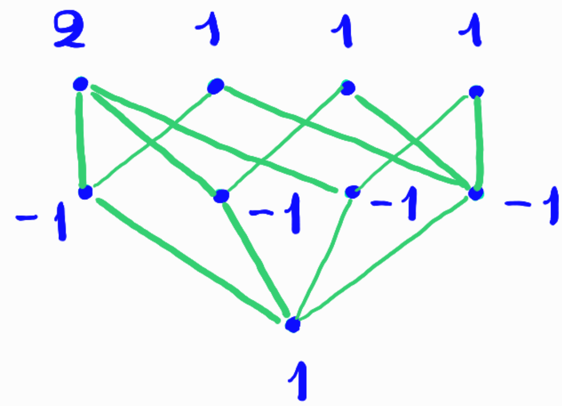
π.χ. αν

$\mathcal{A} =$ 

τότε

$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} =$ 

$\hat{0} = \mathbb{R}^2$



$\mu_{\mathcal{L}_{\mathcal{A}}}(\hat{0}, x)$

και $r(\mathcal{A}) = 1+1+1+1+1+2+1+1+1 = 10$,

$b(\mathcal{A}) = 1-1-1-1-1+2+1+1+1 = 2$.

Οι (13.1) και (13.2) δίνουν το κίνητρο για τον ακόλουθο ορισμό.

<u>Ορισμός 13.4.</u> (α) Έστω παράταγμα αφφινικών υπερεπιπέδων $\mathcal{A}$ στο χώρο $\mathbb{K}^d$ (ό-

που $\mathbb{K}$ είναι τυχαίο σώμα). Το πολυώνυμο

$$\chi(A,q) = \sum_{x \in \mathcal{L}_A} \mu_{\mathcal{L}_A}(\hat{0},x)\, q^{\dim(x)} \qquad (13.3)$$

λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

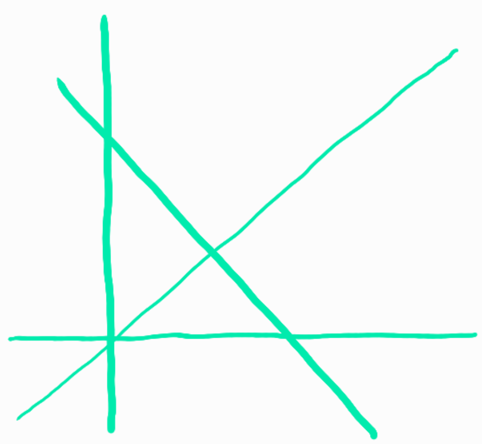
(β) Γενικότερα, για κάθε πεπερασμένο διαβαθμισμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P με ελάχιστο στοιχείο $\hat{0}$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ορίζεται ως

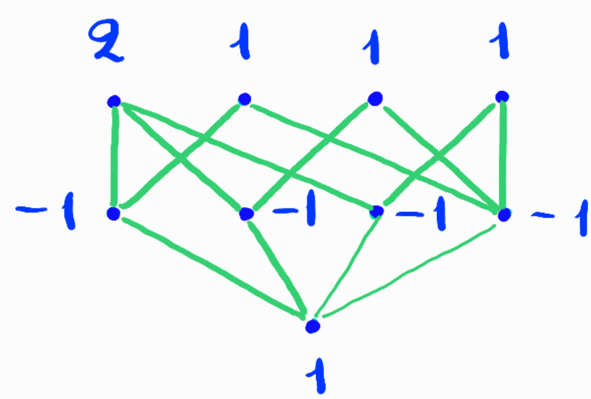
$$\chi_P(q) = \sum_{x \in P} \mu_P(\hat{0},x)\, q^{r-\rho(x)}$$

όπου $\rho : P \to \mathbb{N}$ είναι η συνάρτηση τάξης

και $r = \max\limits_{x \in P} \rho(x)$ είναι η τάξη του P.

Π.χ. αν

$\mathcal{A}$ = 



$\mu_{\mathcal{L}_{\mathcal{A}}}(\hat{0}, x)$

τότε

- $\chi(\mathcal{A}, q) = q^2 - q - q - q - q + 2 + 1 + 1 + 1$
$= q^2 - 4q + 5.$

Παρατήρηση 13.5.

(α) Το $\chi_A(q)$ είναι μονικό πολυώνυμο βαθμού $d = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^d)$. Επειδή το κλειστό διάστημα $[\hat{0}, x]$ στο $\mathcal{L}_A$ είναι γεωμετρικός σύνδεσμος για κάθε $x \in \mathcal{L}_A$, έχουμε

$$(-1)^{d-\dim(x)} \mu_{\mathcal{L}_A}(\hat{0}, x) \geq 0$$

και συνεπώς

$$(13.1) \iff r(A) = (-1)^d \chi(A, -1).$$

Ομοίως, θα δούμε ότι

$$(13.2) \iff b(A) = (-1)^r \chi(A, 1)$$

όπου r = τάξη του $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$.

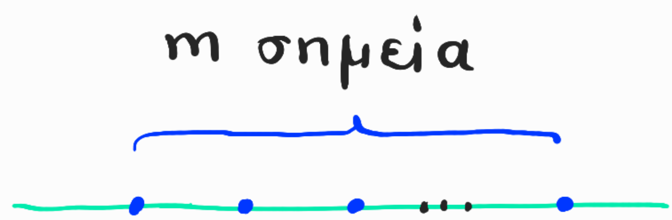
(β) Για ουσιώδη παρατάγματα $\mathcal{A}$ έχουμε $\chi(\mathcal{A},q) = \chi_{\mathcal{L}_{\mathcal{A}}}(q)$. Εν γένει

$$\chi(\mathcal{A},q) = q^{d-r}\,\chi_{\mathcal{L}_{\mathcal{A}}}(q),$$

όπου r = τάξη του $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ $(r \leq d)$. ■

Π.χ. αν

$\mathcal{A}$ =



τότε $\chi(\mathcal{A},q) = q-m$, $r(\mathcal{A}) = m+1$ και

$b(\mathcal{A}) = m-1$ και όντως

- $(-1)^d \chi(\mathcal{A},-1) = m+1$,
- $(-1)^d \chi(\mathcal{A},1) = m-1$,

όπου $d=1$.

Παράδειγμα 13.6.

(α) Έστω ότι το $\mathcal{A}$ αποτελείται από τα υπερεπίπεδα $x_i = 0$ για $1 \le i \le n$ στον $\mathbb{R}^n$. Τότε $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} \cong B_n$ και συνεπώς

- $$\chi(\mathcal{A},q) = \sum_{x \in B_n} \mu_{B_n}(\hat{0},x)\, q^{n-\#x}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k q^{n-k}$$

$$= (q-1)^n.$$

Παρατηρούμε ότι, πράγματι, $(-1)^n \chi(A,-1) = 2^n = r(A)$.

(β) Έστω ότι το A αποτελείται από τα "διαγώνια υπερεπίπεδα" $x_i = x_j$ στον $\mathbb{R}^n$, για $1 \leq i < j \leq n$. Τότε, $L_A \cong \Pi_n$. Ας υπολογίσουμε το $\chi(A,q) = q\,\chi_{\Pi_n}(q)$.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $q \in \mathbb{Z}_{>0}$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f, g : \Pi_n \to \mathbb{Z}$ ως εξής. Για $x = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\} \in \Pi_n$ θέτουμε

- $f(x) = \#\ \kappa : [n] \to [q]$, $\kappa(i) = \kappa(j)$ εάνν τα i, j ανήκουν στο ίδιο μέρος της x
- $g(x) = \#\ \kappa : [n] \to [q]$, $\kappa(i) = \kappa(j)$ αν τα i, j ανήκουν στο ίδιο μέρος της x.

Τότε,

$$g(y) = \sum_{x \geq y} f(x)$$

για κάθε $y \in \Pi_n$ και προφανώς $g(x) = q^{\# x}$ για κάθε $x \in \Pi_n$. Από αυτά και την αντιστροφή Möbius στο Π_n προκύπτει ότι

- $$f(y) = \sum_{x \geq y} \mu_{\Pi_n}(y,x)\, g(x)$$

$$= \sum_{x \geq y} \mu_{\Pi_n}(y,x)\, q^{\# x}$$

για κάθε $y \in \Pi_n$. Ειδικότερα, για $y = \hat{0}$,

- $$\chi(A,q) = \sum_{x \in \Pi_n} \mu_{\Pi_n}(\hat{0},x)\, q^{n-\rho(x)}$$

$$= \sum_{x \in \Pi_n} \mu_{\Pi_n}(\hat{0},x)\, q^{\# x}$$

$$= f(\hat{0})$$

$$= q(q-1)(q-2)\cdots(q-n+1).$$

Ειδικότερα, $(-1)^n \chi(A,q) = n!$ και

- $\mu_{\Pi_n}(\hat{0},\hat{1}) = [q]\, \chi(A,q)$

$$= (-1)^{n-1} (n-1)!$$

σε συμφωνία με το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 11.13 και το Παράδειγμα 13.2.γ.

Παρατήρηση 13.7 Από το Θεώρημα NBC προκύπτει ότι για κάθε semimodular σύνδεσμο L τάξης r (και τυχαία ολική διάταξη $<_\omega$ του συνόλου E των ατόμων του L) έχουμε

$$\chi_L(q) = a_0 q^r - a_1 q^{r-1} + \cdots + (-1)^r a_r$$

όπου

- $a_k = \#$ NBC συνόλων $S \subseteq E$ με k στοιχεία.

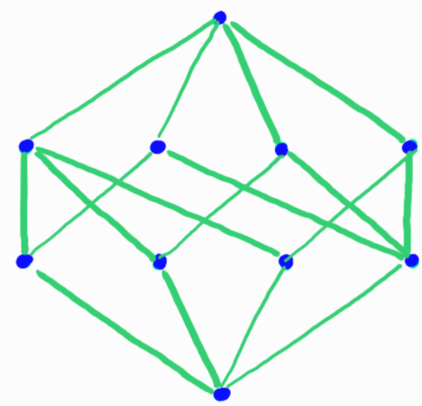
Ειδικότερα, $a_k \geq 0$ για κάθε k.

Θεώρημα 13.8. (Huh, 2012) Αν $L = L(E)$ για κάποιο πεπερασμένο σύνολο E διανυσμάτων σε διανυσματικό χώρο επί σώματος χαρακτηριστικής μηδέν, τότε

$$a_k^2 \geq a_{k-1} a_{k+1} \quad \text{για } 1 \leq k < r.$$

Ειδικότερα, $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_j \geq a_{j+1} \geq \cdots \geq a_r$ για κάποιο $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

Π.χ. για το Παράδειγμα 12.4 με

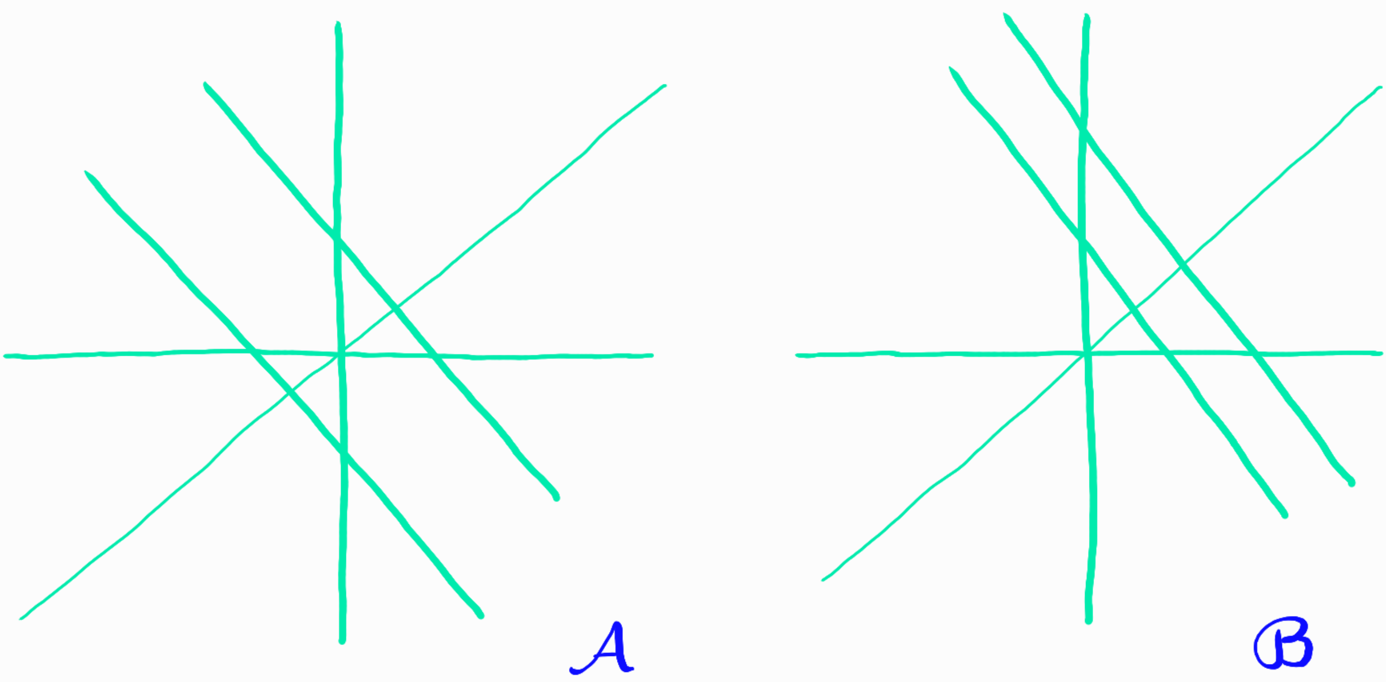
$L =$ 

έχουμε $\chi_L(q) = q^3 - 4q^2 + 5q - 2$.

Θεώρημα 13.9. (Adiprasito-Huh-Katz, 2018). Οι ανισότητες αυτές ισχύουν για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο τυχαίου γεωμετρικού συνδέσμου.

Επιστρέφουμε στο Θεώρημα 13.3.

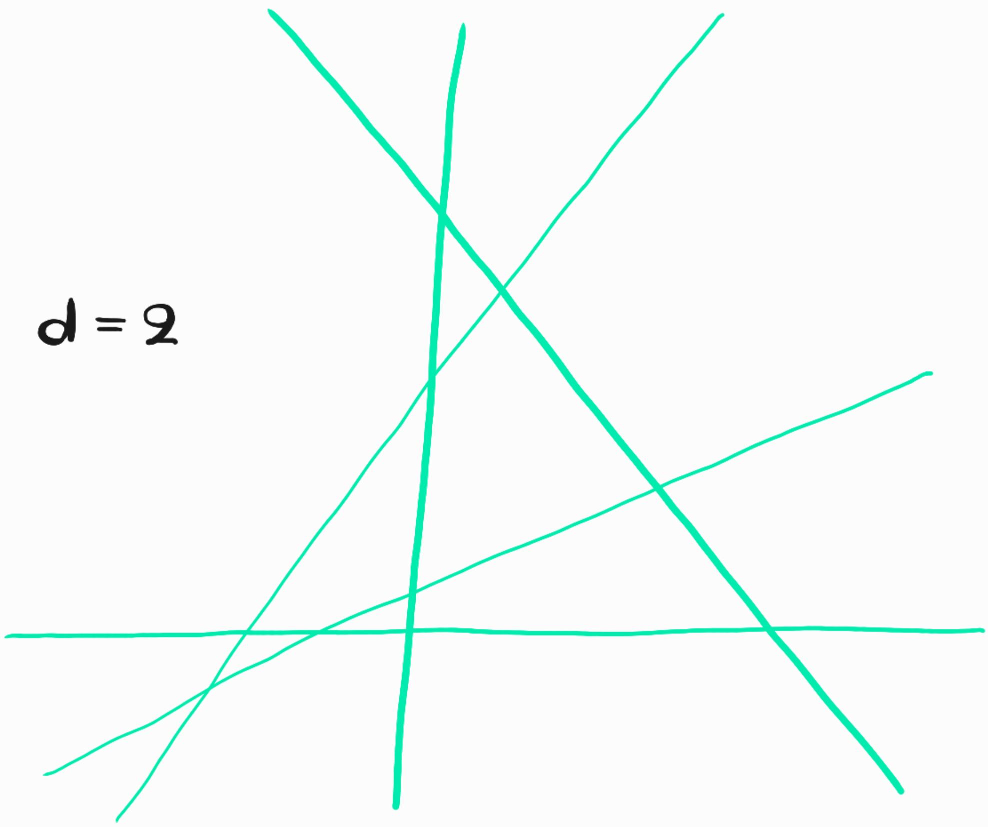
Πόρισμα 13.10 Αν $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι παρατάγματα υπερεπιπέδων στον $\mathbb{R}^d$ και $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} \cong \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$, τότε $r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{B})$ και $b(\mathcal{A}) = b(\mathcal{B})$.



Παράδειγμα 13.11 Έστω ότι το $\mathcal{A}$ αποτελείται από m αφφινικά υπερεπίπεδα σε γενική θέση στον $\mathbb{R}^d$ $(m \geq d)$, δηλαδή οποια-

δήποτε d από αυτά τέμνονται σε ακρι-βώς ένα σημείο και περισσότερα από d έχουν κενή τομή.

$m=5,\ d=2$



Τότε, το $\mathcal{L}_A$ είναι ισόμορφο με τη μερική διάταξη στα υποσύνολα του $[m]$

με $\leq d$ στοιχεία. Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 13.3

- $r(A) = \sum_{x \in \mathcal{L}_A} |\mu_{\mathcal{L}_A}(\hat{0}, x)| = \sum_{i=0}^{d} \binom{m}{i}$

- $b(A) = (-1)^d \sum_{x \in \mathcal{L}_A} \mu_{\mathcal{L}_A}(\hat{0}, x)$

$$= \sum_{i=0}^{d} (-1)^{d-i} \binom{m}{i} = \binom{m-1}{d}.$$

ειδικότερα, για $d=2$,

- $r(A) = 1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} = \dfrac{m^2+m+2}{2}$
- $b(A) = \binom{m-1}{2} = (m^2-3m+2)/2.$