12. Γεωμετρικοί Σύνδεσμοι

Για τους συνδέσμους B_n, Π_n, $L_n(q)$ έχουμε δείξει ότι

$$(-1)^{\rho(x,y)} \mu_L(x,y) \geq 0$$

όπου $\rho : L \longrightarrow \mathbb{N}$ είναι η συνάρτηση τάξης και $\rho(x,y) = \rho(y) - \rho(x)$, για $x \leq y$ στο L.

Ερώτημα: Ποιοι διαβαθμισμένοι σύνδεσμοι έχουν αυτή την ιδιότητα;

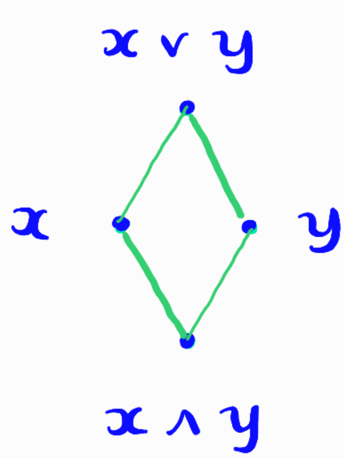
Πρόταση 12.1. Για έναν πεπερασμένο σύνδεσμο L τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο L είναι διαβαθμισμένος και

$$\rho(x) + \rho(y) \geq \rho(x \vee y) + \rho(x \wedge y)$$

για όλα τα $x, y \in L$, όπου $\rho : L \to \mathbb{N}$ είναι η συνάρτηση τάξης.

(ii) Αν τα x, y καλύπτουν το $x \wedge y$ στο L, τότε το $x \vee y$ καλύπτει τα x, y.

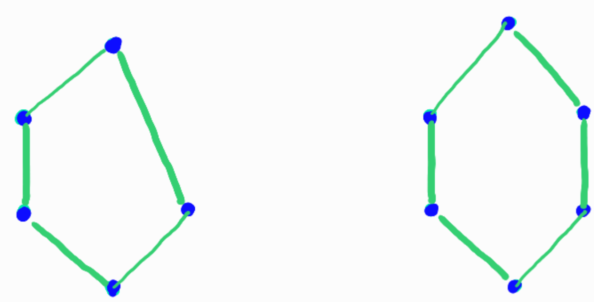


<u>Απόδειξη.</u> Τεχνική, παραλείπεται. ■

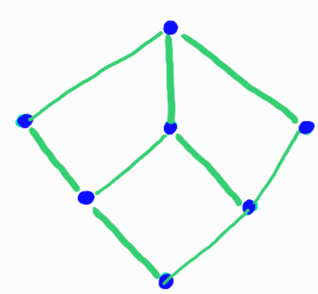
Ένας πεπερασμένος σύνδεσμος L με τις ιδιότητες (i), (ii) λέγεται (upper) semimodular (ημιαρθρωτός). Αν επιπλέον

$$\rho(x)+\rho(y) = \rho(x\vee y)+\rho(x\wedge y)$$

για όλα τα $x, y \in L$, τότε ο L λέγεται modular (αρθρωτός).



όχι semimodular



semimodular
όχι modular

Οι σύνδεσμοι B_n και $L_n(q)$ είναι modular αφού

- $\# x + \# y = \# x \cap y + \# x \cup y$
- $\dim(x) + \dim(y) = \dim(x \cap y) + \dim(x+y)$

για $x, y \subseteq [n]$ και υπόχωρους x, y του $V_n(q)$, αντίστοιχα. Ο σύνδεσμος Π_n είναι semi-modular (αν τα $x, y \in \Pi_n$ καλύπτουν το $u = x \wedge y$ και το u έχει k μέρη, τότε τα x, y έχουν $k-1$ μέρη και το $x \vee y$ έχει $k-2$ μέρη) αλλά όχι modular για $n \geq 4$. Π.χ. αν

- $x = \{\{1,2\}, \{3,4\}\} \in \Pi_4$
- $y = \{\{1,3\}, \{2,4\}\} \in \Pi_4$

τότε $\rho(x) = \rho(y) = 2$ και $x \wedge y = \hat{0}$, $x \vee y = \hat{1}$, οπότε $\rho(x \wedge y) = 0$ και $\rho(x \vee y) = 3$.

<u>Θεώρημα 12.2.</u> Αν L είναι πεπερασμένος semimodular σύνδεσμος με συνάρτηση τάξης $\rho : L \to \mathbb{N}$, τότε

$$(-1)^{\rho(x,y)} \mu_L(x,y) \geq 0$$

για όλα τα $x, y \in L$ με $x \leq y$.

<u>Απόδειξη.</u> Εφαρμόζουμε επαγωγή στο $\rho(x,y)$. Ασφαλώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\rho(x,y) \geq 2$.

Έστω άτομο a του $[x,y] \subseteq L$. Από την

Πρόταση 11.12 έχουμε

$$\mu_L(x,y) = - \sum_{\substack{z \in [x,y) \\ a \vee z = y}} \mu_L(x,z). \qquad (12.1)$$

Έστω $z \in [x,y)$ με $a \vee z = y$. Τότε $a \nleq z$ και συνεπώς $a \wedge z = x$, οπότε

- $$\begin{aligned} \rho(z) + \rho(x) + 1 &= \rho(z) + \rho(a) \\ &\geq \rho(z \wedge a) + \rho(z \vee a) \\ &= \rho(x) + \rho(y). \end{aligned}$$

Άρα, $\rho(z) \geq \rho(y) - 1$ και συνεπώς $\rho(z) = \rho(y) - 1$. Από την υπόθεση της επαγωγής παίρνουμε

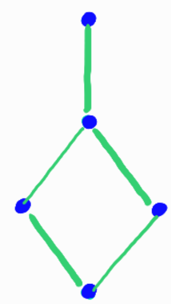
$$(-1)^{\rho(x,y)-1} \mu_L(x,z) = (-1)^{\rho(x,z)} \mu_L(x,z) \geq 0$$

για κάθε τέτοιο $z \in (x,y)$ και συνεπώς $(-1)^{\rho(x,y)} \mu_L(x,y) \geq 0$ από την (12.1). ■

Ορισμός 12.3. Έστω πεπερασμένος σύνδεσμος L με σύνολο ατόμων E.

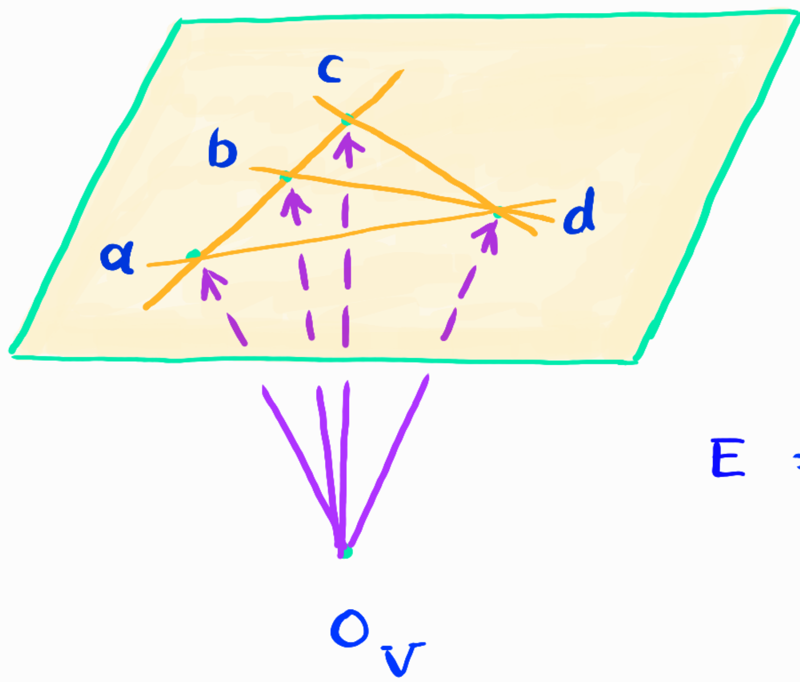
(α) Ο σύνδεσμος L λέγεται ατομικός αν για κάθε $x \in L \smallsetminus \{\hat{0}\}$ υπάρχει $S \subseteq E$ τέτοιο ώστε $x = \bigvee S$.

(β) Ο σύνδεσμος L λέγεται γεωμετρικός αν είναι ατομικός και semimodular.



semimodular , όχι ατομικός

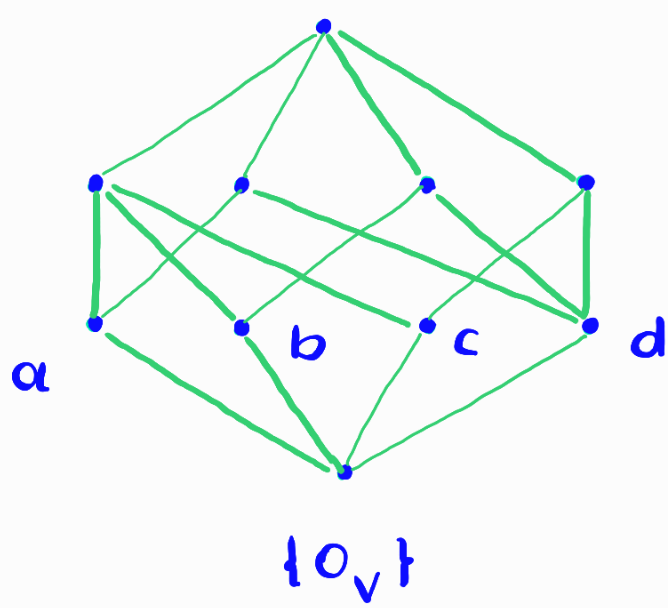
Παράδειγμα 12.4. Έστω διανυσματικός χώρος V επί ενός σώματος $\mathbb{K}$ και πεπερασμένο σύνολο $E \subseteq V \setminus \{0\}$ μη μηδενικών διανυσμάτων. Έστω $L(E)$ το σύνολο όλων των υπόχωρων που παράγονται από υποσύνολα του E, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του εγκλεισμού: $x \leq y \Leftrightarrow x \subseteq y$.



$$E = \{a, b, c, d\}$$

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$L(E) =$$



Το $L(E)$ είναι γεωμετρικός σύνδεσμος, όπου $x \vee y = x + y$ για $x, y \in L(E)$ (εύκολα επαληθεύεται η συνθήκη (ii) της Πρότασης 12.1).

Μάλιστα, αν $W = V^*$ είναι ο δυϊκός χώρος, $E = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ και $A = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ είναι το παράταγμα των αντίστοιχων γραμμικών υπερεπιπέδων

- $$\begin{aligned} H_i &= \ker(\alpha_i^*) \\ &= \{ f \in W : f(\alpha_i) = 0 \} \end{aligned}$$

για $i \in [n]$, τότε $L(E) \cong \mathcal{L}_A$, όπως το ορίσαμε στο Παράδειγμα 11.7. ■

Ο γεωμετρικός σύνδεσμος $L(E)$ καθορίζει τις σχέσεις γραμμικής εξάρτησης (ή ανεξαρτησίας) μεταξύ των διανυσμάτων του E.

Έστω, γενικότερα, πεπερασμένος semi modular σύνδεσμος L με σύνολο ατόμων E και συνάρτηση τάξης $\rho: L \to \mathbb{N}$. Για $S \subseteq E$ γράφουμε

$$\rho(S) = \rho(\vee S),$$

ώστε

- $\rho(\emptyset) = 0,$
- $\rho(\{a\}) = 1$

Για κάθε $a \in E$. Από semimodularity έχουμε

$$\rho(S \cup \{a\}) \leq \rho(S) + 1 \qquad (12.2)$$

για όλα τα $S \subseteq E$ και $a \in E$ και συνεπώς

$$\rho(S) \leq \# S \qquad (12.3)$$

για κάθε $S \subseteq E$.

Ορολογία. Θα λέμε ότι το $S \subseteq E$ είναι ανεξάρτητο αν $\rho(S) = \# S$ και εξαρτημένο διαφορετικά (οπότε $\rho(S) < \# S$).

Παρατήρηση 12.5. Αν $S \subseteq T \subseteq E$ και το T είναι ανεξάρτητο, τότε το ίδιο ισχύει για

το S. Ισοδύναμα, έστω ότι το S είναι ε-
ξαρτημένο, δηλαδή $\rho(S) < \#S$. Τότε, από
semimodularity, ή εφαρμόζοντας την
(12.2) αρκετές φορές,

- $$\rho(T) = \rho(S \cup (T \setminus S)) \leq \rho(S) + \#(T \setminus S) < \#S + \#(T \setminus S) = \#T$$

και συνεπώς το T είναι επίσης εξαρτημέ-
νο. ∎

Σκοπός μας τώρα είναι να περιγράψουμε
με μια συνδυαστική ερμηνεία για το

$$(-1)^{\rho(x,y)} \mu_L(x,y) \in \mathbb{N}.$$

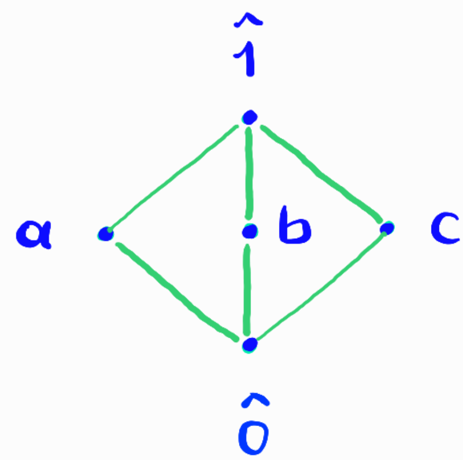
κάθε ελαχιστικά εξαρτημένο $S \subseteq E$ (δηλαδή το S είναι εξαρτημένο και κάθε γνήσιο υποσύνολό του είναι ανεξάρτητο) θα λέγεται κύκλωμα.

Έστω $<_\omega$ μια τυχαία ολική διάταξη του E.

Ορισμός 12.6. Σπασμένο κύκλωμα (broken circuit) λέγεται κάθε σύνολο της μορφής $C \setminus \{a\}$, όπου $C \subseteq E$ είναι κύκλωμα του L με ελάχιστο στοιχείο ως προς την $<_\omega$ ίσο με a.

Το $S \subseteq E$ λέγεται σύνολο NBC (no broken circuit) αν δεν περιέχει σπασμένα κυκλώματα.

Π.χ. αν

$L =$ 

και $a <_\omega b <_\omega c$, τότε το $\{a, b, c\}$ είναι το μοναδικό κύκλωμα, το $\{b, c\}$ είναι το μοναδικό σπασμένο κύκλωμα και τα σύνολα NBC είναι τα

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}.$$

Παρατηρούμε ότι $\mu_L(\hat{0}, \hat{0}) = 1$, $\mu_L(\hat{0}, a) = \mu_L(\hat{0}, b) = \mu_L(\hat{0}, c) = -1$ και $\mu_L(\hat{0}, \hat{1}) = 2$.

Θεώρημα 12.7 (Rota, 1964) Έστω πεπερασμένος semimodular σύνδεσμος L και $<_\omega$ μια ολική διάταξη του συνόλου E των ατόμων του L. Για κάθε $x \in L$,

$$(-1)^{\rho(x)} \mu_L(\hat{0}, x) = \# NBC(x)$$

όπου με $NBC(x)$ συμβολίζουμε το σύνολο των NBC συνόλων $S \subseteq E$ (λέγονται NBC βάσεις του x) με $\vee S = x$.

Λήμμα 12.8. Έστω πεπερασμένος semimodular σύνδεσμος L και ολική διάταξη $<_\omega$ του συνόλου E των ατόμων του.

(α) Κάθε NBC υποσύνολο του E είναι ανεξάρτητο.

(β) Αν $a \in E$ είναι το μικρότερο άτομο ως προς την $<_\omega$ και το σύνολο $S \subseteq E$ είναι NBC, τότε το $S \cup \{a\}$ είναι επίσης NBC.

(γ) Έχουμε

$$\sum_{S} (-1)^{\# S} = 0$$

όπου το άθροισμα διατρέχει όλα τα NBC σύνολα $S \subseteq E$.

Απόδειξη. (α) Κάθε εξαρτημένο υποσύνολο του E περιέχει κάποιο κύκλωμα, άρα και κάποιο σπασμένο κύκλωμα, και συνεπώς δεν είναι NBC.

(β) Προφανώς το a δεν ανήκει σε κανένα σπασμένο κύκλωμα. Κατά συνέπεια, αν το S δεν περιέχει σπασμένο κύκλωμα, το ίδιο ισχύει για το $S \cup \{a\}$.

(γ) Λόγω του (α), το δοσμένο άθροισμα γράφεται ως άθροισμα όρων της μορφής

$$(-1)^{\#S} + (-1)^{\#(S \cup \{a\})}$$

με $S \subseteq E \setminus \{a\}$ και συνεπώς ισούται με μηδέν. ■

<u>Απόδειξη</u> του <u>Θεωρήματος 12.7.</u> Έστω

$$f(x) = (-1)^{\rho(x)} \# NBC(x)$$

για $x \in L$, οπότε $f(\hat{0}) = (-1)^0 \cdot 1 = 1$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{\hat{0} \leq x \leq y} f(x) = 0$$

για κάθε $y \in L \setminus \{\hat{0}\}$. Θεωρούμε τον semimodular σύνδεσμο $L' = [\hat{0}, y]$, το σύνολο των ατόμων του $E' = E \cap L'$ και τον περιορισμό $<'_\omega$ της ολικής διάταξης $<_\omega$ του E στο E'.

Λόγω του Λήμματος 12.8 (α) έχουμε $\rho(x) = \rho(\vee S) = \# S$ για κάθε $x \in L$ και κάθε $S \in NBC(x)$, οπότε

- $$\sum_{\hat{0} \leq x \leq y} f(x) = \sum_{\hat{0} \leq x \leq y} (-1)^{\rho(x)} \# NBC(x)$$

$$= \sum_{\hat{0} \leq x \leq y} \sum_{\substack{NBC\ S \subseteq E \\ \vee S = x}} (-1)^{\# S}$$

$$= \sum_{\substack{NBC\ S \subseteq E \\ \vee S \leq_L y}} (-1)^{\# S}$$

$$= \sum_{NBC\ S \subseteq E'} (-1)^{\# S}.$$

Ενόψη του Λήμματος 12.8 (γ), αρκεί να δείξουμε ότι το $S \subseteq E'$ είναι σύνολο NBC στο L εάνν το S είναι σύνολο NBC του $L' = [\hat{0}, y]$ ως προς την $<_\omega$.

Αφού κάθε σπασμένο κύκλωμα στο L' έχει την ίδια ιδιότητα και στο L, ισχύει η κατεύθυνση $\Rightarrow$. Αντιστρόφως, έστω $C \setminus \{a\} \subseteq E'$ σπασμένο κύκλωμα στο L, όπου $C \subseteq E$ είναι κύκλωμα με ελάχιστο στοιχείο το a. Για να δείξουμε ότι το $C \setminus \{a\}$ είναι σπασμένο κύκλωμα και στο L', έχουμε να δείξουμε ότι $a \in E'$. Πράγματι, θέτοντας

- $u = \vee(C \setminus \{a\})$
- $v = \vee C$

έχουμε

- $\rho(u) = \#(C \setminus \{a\}) = \# C - 1$
- $\rho(v) = \rho(C) < \# C$

και $u \leqslant_L v$, οπότε αναγκαστικά $u = v$. Αφού όμως $C \setminus \{a\} \subseteq E'$, έχουμε $c \leqslant_L y$ για κάθε $c \in C \setminus \{a\}$ και συμπεραίνουμε ότι

$$\bigvee C = v = u = \bigvee (C \setminus \{a\}) \leqslant_L y.$$

Άρα, αφού $a \in C$, έχουμε $a \leqslant_L y$, δηλαδή $a \in L'$. Άρα, $a \in L' \cap E = E'$. ∎

<u>Άσκηση 12.9.</u> Έστω πεπερασμένος semimodular σύνδεσμος L, με σύνολο ατό-

μων E. Δείξτε ότι αν τα $S, T \subseteq E$ είναι ανεξάρτητα και $\#S < \#T$, τότε υπάρχει $a \in T \setminus S$ για το οποίο το $S \cup \{a\}$ είναι επίσης ανεξάρτητο.

Άσκηση 12.10 Για ακεραίους $1 \le k < n$, έστω $L_{n,k} = P_{n,k} \cup \{\hat{1}\}$, όπου $P_{n,k}$ είναι το σύνολο των υποσυνόλων του $[n]$ με πληθάριθμο $\le k$, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του εγκλεισμού.

(α) Δείξτε ότι το $L_{n,k}$ είναι γεωμετρικός σύνδεσμος.

(β) Αν $1 <_\omega 2 <_\omega \cdots <_\omega n$ είναι η ολική διάταξη των ατόμων του $L_{n,k}$, δείξτε ότι οι NBC βάσεις του $\hat{1}$ είναι ακριβώς τα $(k+1)$-υποσύνολα του $[n]$ που περιέχουν το 1.

(γ) Συνάγετε ότι

$$\mu_{L_{n,k}}(\hat{0},\hat{1}) = (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k}.$$

Μητροειδή. Ο γεωμετρικός σύνδεσμος L(E) του Παραδείγματος 12.4 μπορεί να οριστεί για τυχαίο μητροειδές M επί πεπερασμένου συνόλου E.

Τα μητροειδή (matroids) είναι αφηρημένα συνδυαστικά μοντέλα για την έννοια της γραμμικής εξάρτησης /ανεξαρτησίας της γραμμικής άλγεβρας σε ένα πεπερασμένο σχηματισμό διανυσμάτων και μπορούν να οριστούν με διάφορους κρυπτομορφικούς τρόπους.

Έστω πεπερασμένο σύνολο E.

(α) Ορισμός μέσω ανεξάρτητων συνόλων. Μητροειδές επί του E λέγεται κάθε ζεύγος $(E, \mathcal{I})$, όπου το $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ έχει τις εξής ιδιότητες :

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I2) $I \subseteq J \in \mathcal{I} \Rightarrow I \in \mathcal{I}$

(I3) αν $I, J \in \mathcal{I}$ και $\# I < \# J$, τότε υπάρχει $x \in J \setminus I$ με $I \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

(β) Ορισμός μέσω βάσεων. Μητροειδές επί του E λέγεται κάθε ζεύγος

$(E,\mathcal{B})$, όπου το $\mathcal{B} \subseteq 2^E$ έχει τις εξής ιδιότητες:

($\mathcal{B}1$) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

($\mathcal{B}2$) αν $B, B' \in \mathcal{B}$ και $x \in B \setminus B'$, τότε υπάρχει $x' \in B' \setminus B$ τέτοιο ώστε $(B \setminus \{x\}) \cup \{x'\} \in \mathcal{B}$.

(γ) Ορισμός μέσω της συνάρτησης τάξης. Μητροειδές επί του E λέγεται κάθε ζεύγος (E,ρ), όπου η $\rho : 2^E \to \mathbb{N}$ έχει τις εξής ιδιότητες:

(P1) $0 \leq \rho(X) \leq \# X$ για κάθε $X \subseteq E$.

(P2) $X \subseteq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$, για $X, Y \subseteq E$

(P3) $\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y)$ για $X, Y \subseteq E$.

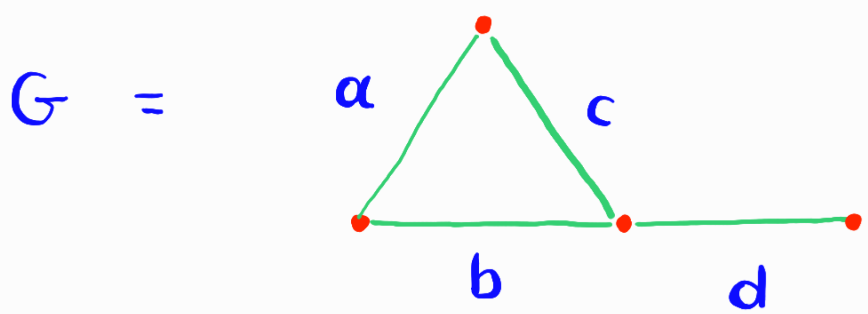
Παράδειγμα 12.11. Κάθε πεπερασμένο γράφημα με σύνολο ακμών E ορίζει ένα μητροειδές επί του E στο οποίο για $X \subseteq E$

- το X είναι ανεξάρτητο αν δεν περιέχει κύκλους
- το X είναι βάση αν δεν περιέχει κύκλους και είναι μεγιστικό με αυτή την ιδιότητα

- $\rho(X)$ = # κορυφών − # συνεκτικών συνιστωσών

για το γράφημα με ακμές τα στοιχεία του X και κορυφές τα άκρα τους.

Π.χ. το γράφημα



ορίζει το ίδιο μητροειδές επί του $E = \{a, b, c, d\}$ με εκείνο του Παραδείγματος 12.4.