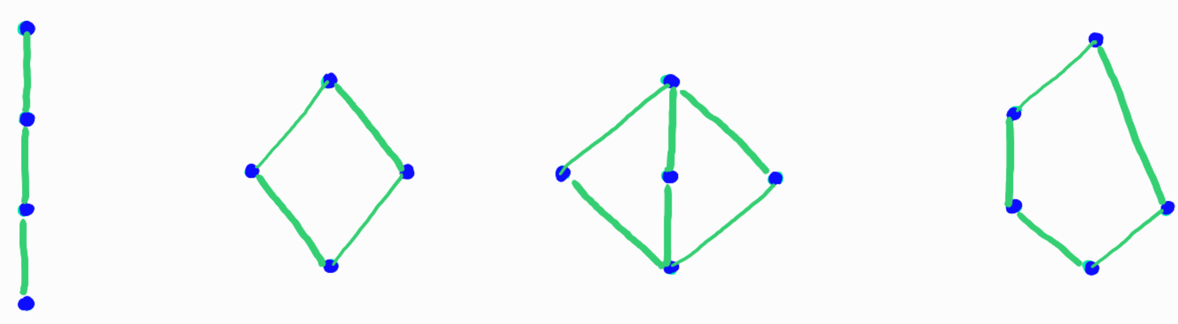
11. Σύνδεσμοι

Έστω μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(P, \leq)$ και $x, y \in P$. Το $z \in P$ λέγεται

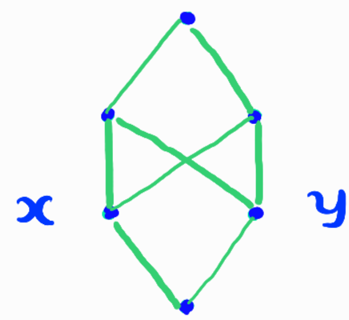
- άνω φράγμα των x, y αν $x, y \leq z$
- κάτω φράγμα των x, y αν $z \leq x, y$
- κατώτατο άνω φράγμα των x, y αν είναι άνω φράγμα και $z \leq w$ για κάθε άνω φράγμα w των x, y
- ανώτατο κάτω φράγμα των x, y αν είναι κάτω φράγμα και $w \leq z$ για κάθε κάτω φράγμα w των x, y.

Αν υπάρχει κατώτατο άνω φράγμα (αντιστοιχα, ανώτατο κάτω φράγμα) των x, y, τότε αυτό είναι μοναδικό και συμβολίζεται με $x \vee y$ (αντίστοιχα, $x \wedge y$).

Ορισμός 11.1 Το P λέγεται σύνδεσμος (lattice) αν κάθε ζεύγος στοιχείων του x, y έχει κατώτατο άνω φράγμα και ανώτατο κάτω φράγμα.



σύνδεσμοι



όχι σύνδεσμος

Παραδείγματα 11.2

(α) Κάθε αλυσίδα είναι σύνδεσμος με $x \vee y = \max\{x, y\}$ και $x \wedge y = \min\{x, y\}$.

(β) Η άλγεβρα Boole B_n είναι σύνδεσμος με $x \vee y = x \cup y$ και $x \wedge y = x \cap y$, για $x, y \subseteq [n]$.

(γ) Το $L_n(q)$ είναι σύνδεσμος με $x \wedge y = x \cap y$ και $x \vee y = x + y$ για υπόχωρους $x, y \subseteq V_n(q)$.

Πρόταση 11.3 Αν το P είναι πεπερασμένο, έχει μέγιστο στοιχείο και υπάρχει το $x \wedge y$ για όλα τα $x, y \in P$, τότε το P είναι σύνδεσμος.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο $\#S$ προκύπτει ότι για κάθε μη κενό $S \subseteq P$ υπάρχει το ανώτατο κάτω φράγμα $\bigwedge S$ των στοιχείων του S.

Για δοσμένα $x, y \in P$ θεωρούμε το $S = \{z \in P : x \leq z \text{ και } y \leq z\}$ και ισχυριζόμαστε ότι το $\bigwedge S$ είναι το κατώτατο άνω φράγμα των x, y. Πράγματι, έχουμε $S \neq \emptyset$, αφού το μέγιστο στοιχείο του P ανήκει στο S. Επίσης,

$$x, y \leq \wedge S$$

αφού $x, y \leq z$ για κάθε $z \in S$ και

$$x, y \leq w \Rightarrow \wedge S \leq w$$

για $w \in P$, αφού $x, y \leq w \Leftrightarrow w \in S$. ■

<u>Παρατήρηση 11.4.</u> Εφαρμόζοντας την Πρόταση 11.3 στο P^* προκύπτει ότι αν το P είναι πεπερασμένο, έχει ελάχιστο στοιχείο και υπάρχει το $x \vee y$ για όλα τα $x, y \in P$, τότε το P είναι σύνδεσμος.

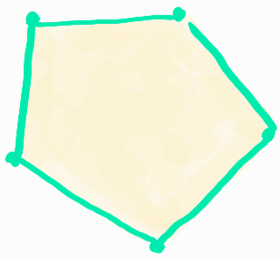
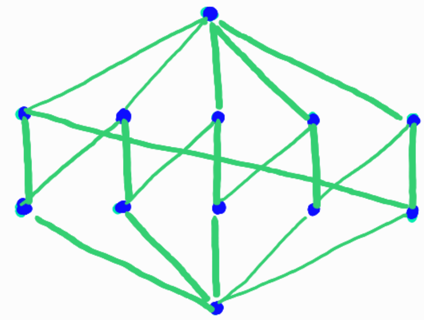
<u>Παράδειγμα 11.5</u> Για $x, y \in \Pi_n$ με

$$x = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}, \quad y = \{B_1', B_2', \ldots, B_\ell'\}$$

το $\chi_{\lambda\gamma}$ υπάρχει και ισούται με τη διαμέριση του $[n]$ με μέρη τα μη κενά από τα υποσύνολα $B_i \cap B_j'$ του $[n]$. Σύμφωνα με την Πρόταση 11.3, το Π_n αποτελεί σύνδεσμο.

Παράδειγμα 11.6. Το σύνολο των πλευρών (όψεων) ενός κυρτού πολυτόπου, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του εγκλεισμού, αποτελεί σύνδεσμο ο οποίος λέγεται σύνδεσμος των πλευρών (face lattice) του P και συμβολίζεται με $L(P)$.

Το $L(P)$ έχει ελάχιστο στοιχείο $\hat{0} = \emptyset$ και μέγιστο $\hat{1} = P$. Το ανώτατο κάτω φρά-

$P =$  $L(P) =$ 

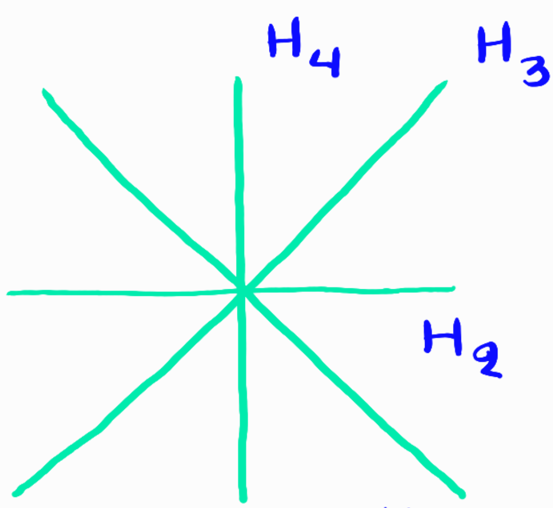
γμα των $F, G \in L(P)$ είναι η τομή $F \cap G$.

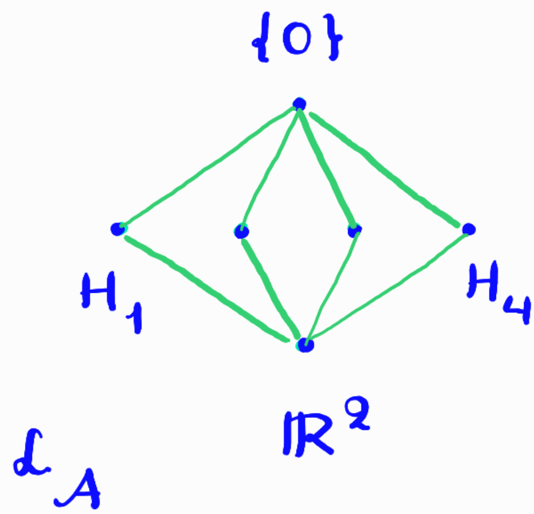
<u>Παράδειγμα 11.7.</u> Έστω $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ ένα σύνολο n γραμμικών υπερεπιπέδων (δηλαδή γραμμικών υπόχωρων διάστασης $d-1$ στον $\mathbb{R}^d$). Λέμε ότι το $\mathcal{A}$ είναι παράταγμα (arrangement) n γραμμικών υπερεπιπέδων στον $\mathbb{R}^d$. Το σύνολο

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \left\{ \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \; : \; \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \right\}$$

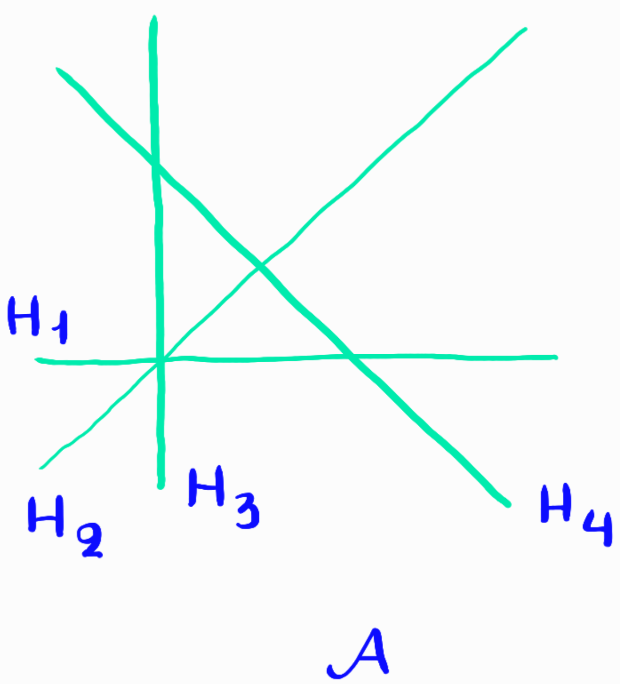
όλων των τομών υποσυνόλων $\mathcal{B}$ του $\mathcal{A}$, μερικώς διατεταγμένου με τη σχέση του αντίστροφου εγκλεισμού $x \leq y \Leftrightarrow y \subseteq x$, αποτελεί σύνδεσμο (βλέπε Πρόταση 11.3) και λέγεται σύνδεσμος τομών (intersection lattice) του $\mathcal{A}$.

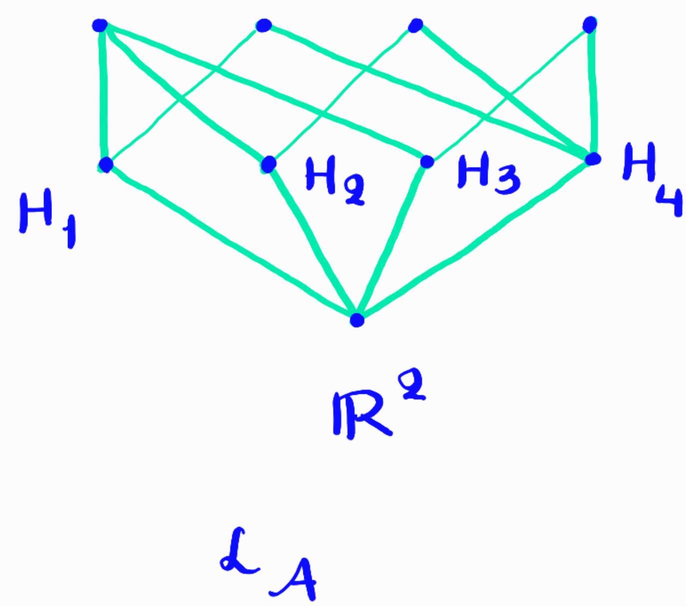
Για $x, y \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ έχουμε $x \vee y = x \cap y$.

$\mathcal{A} =$ 



Αν τα υπερεπιπεδα του $\mathcal{A}$ είναι αφφινικά, τότε το $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ λέγεται σύνολο τομών (intersection poset) του $\mathcal{A}$.





Ειδικότερα:

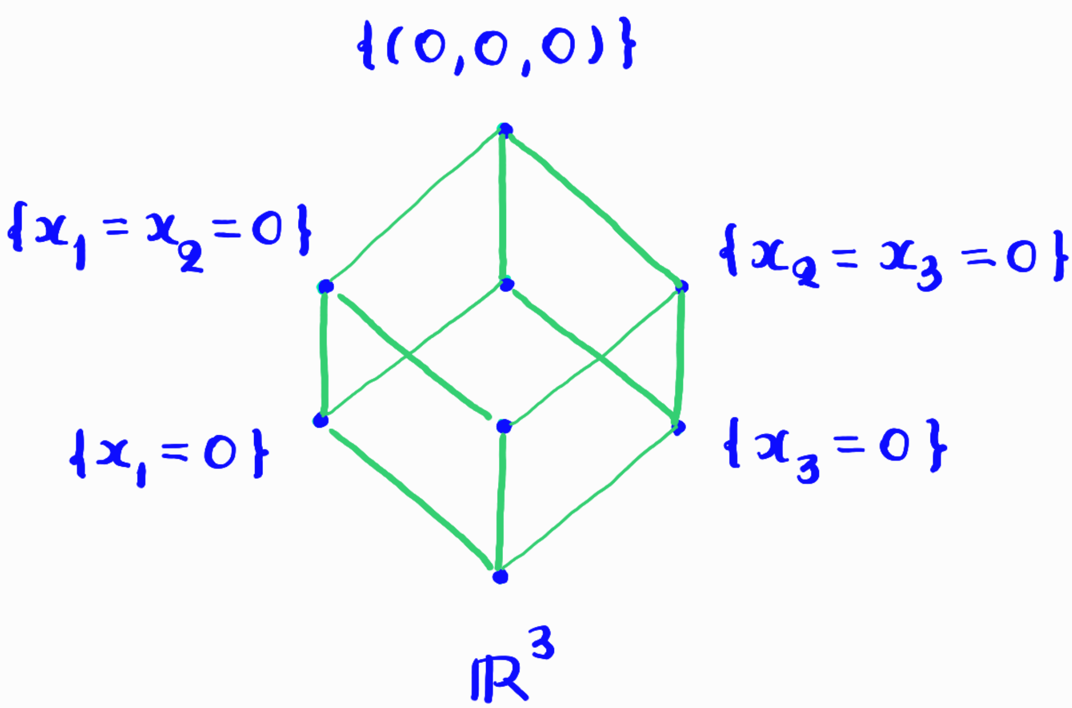
(α) Αν $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$, όπου

$$H_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\},$$

τότε $\mathcal{L}_A \cong B_n$, με ισομορφισμό $\varphi : B_n \to \mathcal{L}_A$ με

$$\varphi(S) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = 0 \text{ για } i \in S\}$$

για $S \subseteq [n]$.



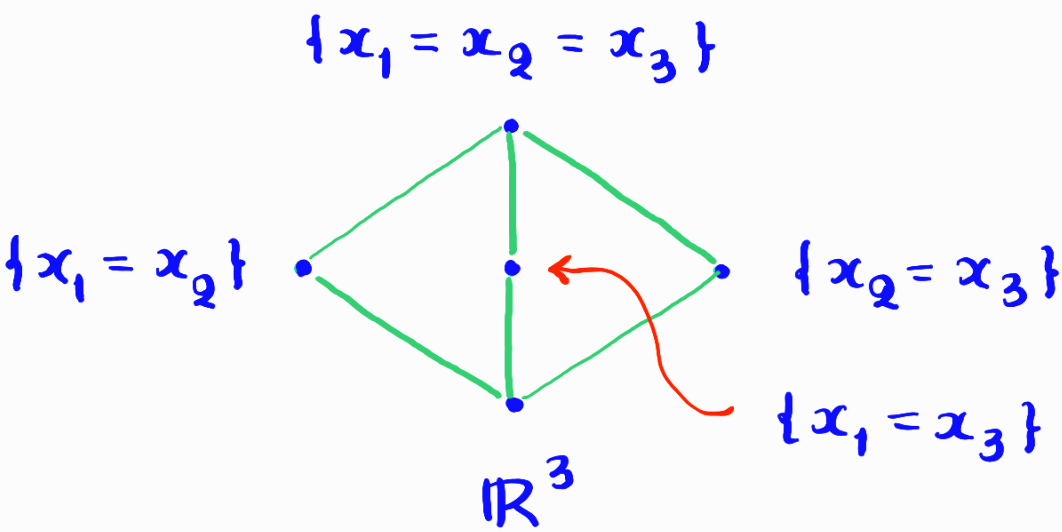
(β) Αν $A = \{H_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$, όπου

$$H_{ij} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = x_j\},$$

τότε $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} \cong \Pi_n$ με ισομορφισμό $\psi : \Pi_n \to \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ με

- $\psi(\pi) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = x_j$ αν τα i, j ανήκουν στο ίδιο μέρος της $\pi\}$

για $\pi \in \Pi_n$.



∎

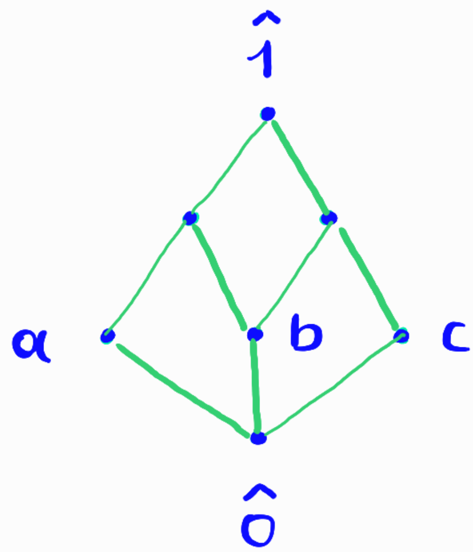
Αν το P έχει ελάχιστο στοιχείο $\hat{0}$ (αντίστοιχα, μέγιστο στοιχείο $\hat{1}$), τότε τα στοιχεία που καλύπτουν το $\hat{0}$ (αντίστοιχα, καλύπτονται από το $\hat{1}$) λέγονται άτομα (αντίστοιχα, συνάτομα) του P.

Πρόταση 11.8. Έστω πεπερασμένος σύνδεσμος L και υποσύνολό του $X \subseteq L$ που περιέχει όλα τα άτομα του L, αλλά όχι το $\hat{0}$. Τότε,

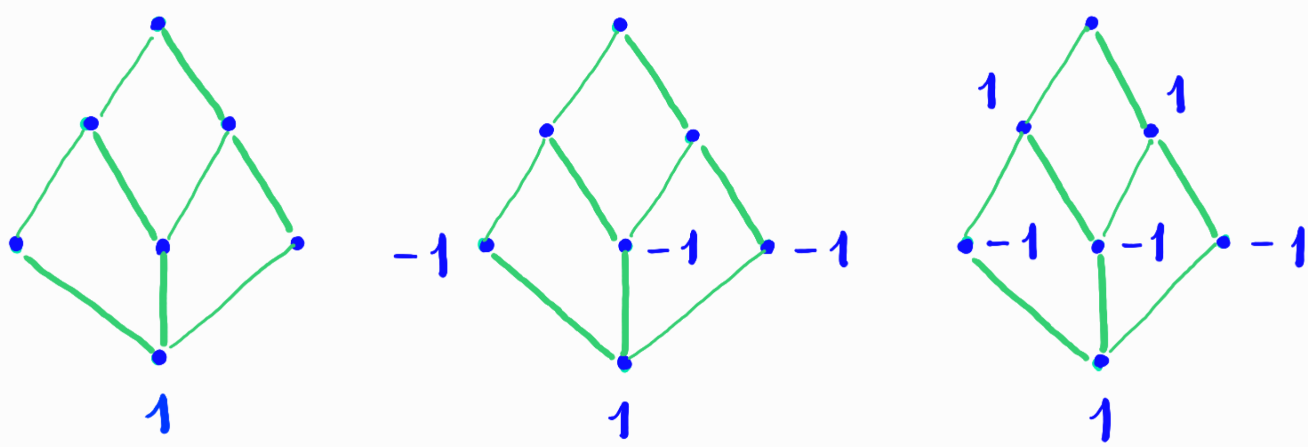
$$\mu_L(\hat{0}, x) = \sum_{\substack{S \subseteq X \\ \vee S = x}} (-1)^{\# S}$$

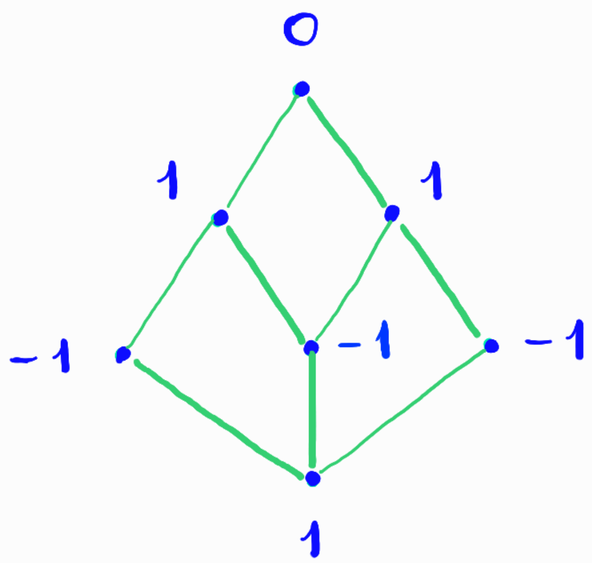
για κάθε $x \in L$, όπου $\vee S = \hat{0}$ για $S = \emptyset$.

Π.χ. έστω

$L =$ 

Οι τιμές $\mu_L(\hat{0},x)$ της συνάρτησης Möbius μ_L υπολογίζονται διαδοχικά ως εξής:





Πράγματι, θέτοντας $X = \{a,b,c\}$ έχουμε $S \subseteq X$ με $\vee S = \hat{1}$ μόνο για $S = \{a,c\}$ και $S = \{a,b,c\}$, οπότε

$$\mu_L(\hat{0},\hat{1}) = \sum_{\substack{S \subseteq X \\ \vee S = \hat{1}}} (-1)^{\# S} = (-1)^2 + (-1)^3 = 0.$$

Ομοίως επαληθεύεται η Πρόταση 11.8 για τα στοιχεία $x \neq \hat{1}$ του L.

Απόδειξη της Πρότασης 11.8 Έστω

$$f(x) = \sum_{S \subseteq X \,:\, \vee S = x} (-1)^{\# S}$$

για $x \in L$. Έχουμε $f(\hat{0}) = 1$, αφού το μόνο $S \subseteq X$ με $\vee S = \hat{0}$ είναι το $S = \varnothing$, και συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{x \leq y} f(x) = 0$ για κάθε $y \in L \setminus \{\hat{0}\}$.

Πράγματι,

- $$\sum_{\hat{0} \leq x \leq y} f(x) = \sum_{\hat{0} \leq x \leq y} \sum_{\substack{S \subseteq X \\ \vee S = x}} (-1)^{\# S}$$

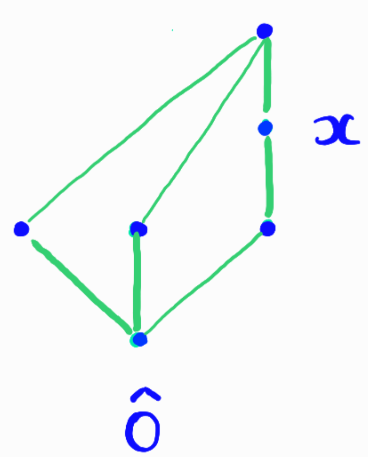
$$= \sum_{S \subseteq X,\, \vee S \leq y} (-1)^{\# S}$$

$$= \sum_{S \subseteq X_y} (-1)^{\#S}$$

$$= (1-1)^{\# X_y} = 0$$

όπου $X_y = \{ a \in X : a \leq y \}$ και $X_y \neq \emptyset$ αφού το X περιέχει όλα τα άτομα του L. ■

Πόρισμα 11.9. Αν L είναι πεπερασμένος σύνδεσμος και το $x \in L \setminus \{\hat{0}\}$ δεν ισούται με το κατώτατο άνω φράγμα κάποιου συνόλου ατόμων του L, τότε $\mu_L(\hat{0}, x) = 0$



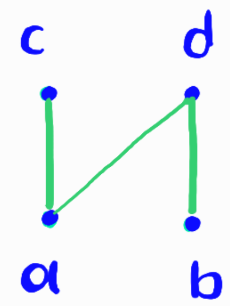
Παράδειγμα 11.10 Έστω $L = B_n$ και έστω

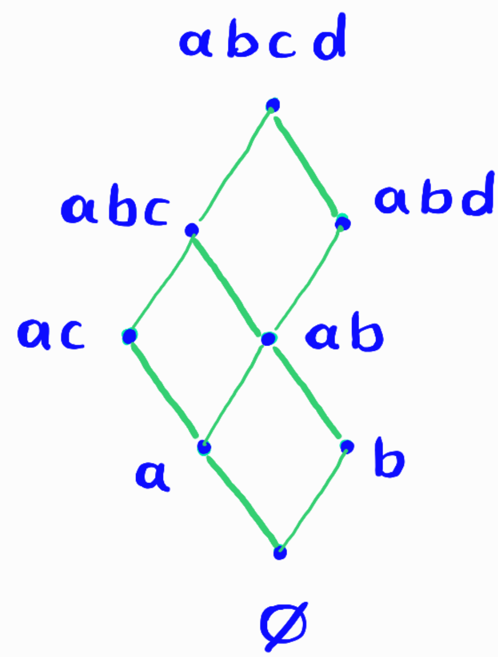
$$X = \{ \{i\} : i \in [n] \}$$

το σύνολο των ατόμων της B_n. Τότε, για $x \in B_n$ υπάρχει μοναδικό $S \subseteq X$ με $\bigvee S = x$, συγκεκριμένα το $S = \{ \{i\} : i \in x \}$. Από την Πρόταση 11.8 έπεται ότι $\mu_L(\hat{0}, x) = = (-1)^{\# x}$. ■

Έστω τώρα πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P και έστω $J(P)$ το σύνολο των ιδεωδών του P, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του εγκλεισμού:

$x \leq y \iff x \subseteq y$.

$P =$ 

$J(P) =$ 

Το $J(P)$ είναι σύνδεσμος με ελάχιστο στοιχείο $\varnothing = \hat{0}$, μέγιστο στοιχείο $\hat{1} = P$ και

- $I_1 \vee I_2 = I_1 \cup I_2$
- $I_1 \wedge I_2 = I_1 \cap I_2$

για $I_1, I_2 \in J(P)$. Μάλιστα, το $J(P)$ είναι επιμεριστικός σύνδεσμος, δηλαδή ισχύουν οι ιδιότητες

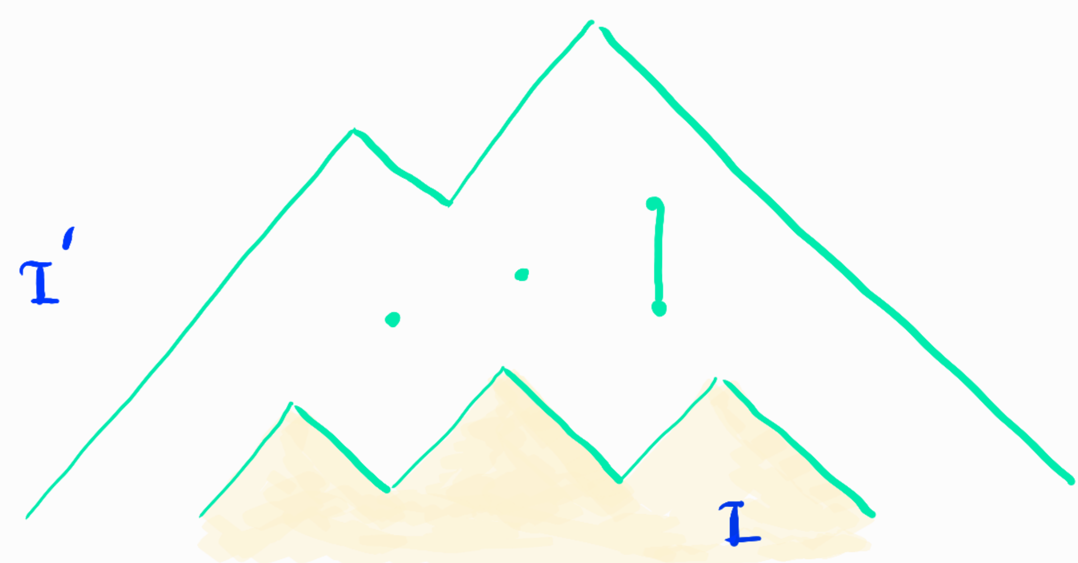
- $(I_1 \vee I_2) \wedge I = (I_1 \wedge I) \vee (I_2 \wedge I)$
- $(I_1 \wedge I_2) \vee I = (I_1 \vee I) \wedge (I_2 \vee I)$

για $I_1, I_2 \in J(P)$, και κάθε πεπερασμένος επιμεριστικός σύνδεσμος είναι ισόμορφος με τον $J(P)$ για κάποιο P (Θεώρημα του Birkhoff).

Πρόταση 11.11. Στο σύνδεσμο $L = J(P)$ έχουμε

$$\mu_L(I, I') = \begin{cases} (-1)^{\#(I' \setminus I)}, & \text{αν το } I' \setminus I \text{ είναι αντιαλυσίδα στο } P, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Απόδειξη. Στην πρώτη περίπτωση το κλειστό διάστημα $[I, I']$ του L είναι ισόμορφο με την άλγεβρα Boole όλων των υποσυνόλων του $I' \setminus I$ και συνεπώς $\mu_L(I, I') = (-1)^{\#(I' \setminus I)}$.



Έστω τώρα ότι το $I' \setminus I$ δεν είναι αντιαλυσίδα του P. Το $[I, I']$ είναι σύνδεσμος με άτομα τα σύνολα (ιδεώδη) της μορφής $I \cup \{a\}$, όπου a είναι ελαχιστικό στοιχείο του $I' \setminus I$. Αφού, λόγω της υπόθεσής μας, η ένωση αυτών των ιδεωδών είναι γνήσιο υποσύνολο του I', από το Πόρισμα 11.9 έπεται ότι $\mu_L(I, I') = 0$. ■

Πρόταση 11.12 Έστω πεπερασμένος σύνδεσμος L με τουλάχιστον δύο στοιχεία. Για κάθε $a \in L \setminus \{\hat{0}\}$,

$$\sum_{x \in L : x \vee a = \hat{1}} \mu_L(\hat{0}, x) = 0.$$

Ισοδύναμα, για κάθε $a \in L \setminus \{\hat{1}\}$,

$$\sum_{x \in L : x \wedge a = \hat{0}} \mu_L(x, \hat{1}) = \hat{0}.$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε την πρώτη διατύπωση. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 11.8 όταν το X είναι το σύνολο των ατόμων του L, έχουμε

$$\mu_L(\hat{0}, x) = \sum_{\substack{S \subseteq X \\ \vee S = x}} (-1)^{\# S}$$

οπότε

$$\sum_{x \in L :\, x \vee a = \hat{1}} \mu_L(\hat{0}, x) = \sum_{\substack{S \subseteq X \\ \vee(S \cup \{a\}) = \hat{1}}} (-1)^{\# S}.$$

Εφόσον $a \neq \hat{0}$, υπάρχει $x_0 \in X$ με $x_0 \leq a$ στο L. Παρατηρούμε ότι το $S \subseteq X$ έχει την ιδιότητα

$$V(S\cup\{a\}) = \hat{1}$$

αν και μόνο αν το ίδιο ισχύει για το $S\cup\{x_0\}$ (ή το $S\setminus\{x_0\}$). Επομένως, το δεξιό μέλος της προηγούμενης ισότητας διασπάται σε άθροισμα προσθετέων της μορφής

$$(-1)^{\#S} + (-1)^{\#(S\cup\{x_0\})}$$

για κάποια $S\subseteq X\setminus\{x_0\}$ και συνεπώς ισούται με μηδέν. ■

<u>**Παράδειγμα 11.13**</u> Έστω $L=\Pi_n$ και έστω $\mu_n=\mu_L(\hat{0},\hat{1})$. Έχουμε $\mu_1=1$, $\mu_2=-1$, $\mu_3=2$.

Έστω $\alpha\in\Pi_n$ η διαμέριση με δύο μέρη

$[n-1]$ και $\{n\}$. Για $x \in \Pi_n$ έχουμε $x \wedge a = \hat{0}$ εάνν $x = \hat{0}$ ή το x είναι άτομο του Π_n με μοναδικό μέρος με δύο στοιχεία της μορφής $\{i, n\}$ για κάποιο $i \in [n-1]$. Από την Πρόταση 11.12 συμπεραίνουμε ότι

- $$\mu_n = \mu_L(\hat{0}, \hat{1}) = -\sum_{x} \mu_L(x, \hat{1}) = -(n-1)\,\mu_{n-1},$$

όπου το άθροισμα διατρέχει τα εν λόγω $n-1$ άτομα του L και η τελευταία ισότητα προκύπτει από τον ισομορφισμό $[x, 1] \cong \Pi_{n-1}$ για κάθε άτομο $x \in \Pi_n$. Με επαγωγή στο n προκύπτει ο τύπος

$$\mu_n = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Η $\mu_L(\pi,\sigma)$ υπολογίζεται από αυτόν τον τύπο για τυχαίο κλειστό διάστημα $[\pi,\sigma] \subseteq \Pi_n$ αφού το $[\pi,\sigma]$ είναι ισόμορφο με το ευθύ γινόμενο συνδέσμων Π_m. Π.χ. αν

- $\pi = \{\{1\}, \{2,5\}, \{3,7\}, \{4\}, \{6,9\}, \{8\}\}$
- $\sigma = \{\{1,6,9\}, \{2,5\}, \{3,4,7,8\}\}$

τότε $[\pi,\sigma] \cong \Pi_1 \times \Pi_2 \times \Pi_3$, οπότε $\mu(\pi,\sigma) = \mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1\,(-1) \cdot 2 = -2$.

Παράδειγμα 11.14. Έστω ο σύνδεσμος $L = L_n(q)$ των υπόχωρων του $V_n(q)$. Ας υπολογίσουμε το $\mu_n(q) := \mu_L(\hat{0}, \hat{1})$.

Θεωρούμε τυχαίο υπόχωρο $a \in L$ του $V_n(q)$ διάστασης $n-1$. Για $x \in L$ έχουμε

- $x \wedge a = \hat{0} \iff x \cap a = \{0\}$
$\iff x = \{0\}$ ή $\dim(x) = 1$ και $x \notin a$.

Υπάρχουν

$$\frac{q^n - 1}{q-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

άτομα του L και $1 + q + \cdots + q^{n-2}$ από αυτά περιέχονται στο a. Από τις παρατηρήσεις αυτές και την Πρόταση 11.12 έπεται ότι

$$\mu_n(q) = -\sum_{x} \mu_L(x, \hat{1}) = -q^{n-1} \mu_{n-1}(q)$$

όπου το άθροισμα διατρέχει τα εν λόγω q^{n-1} άτομα $x \in L$, αφού $[x, \hat{1}] \cong L_{n-1}(q)$ για κάθε άτομο $x \in L$.

Με επαγωγή στο n βρίσκουμε ότι

$$\mu_n(q) = (-1)^n q^{1+2+\cdots+(n-1)} = (-1)^n q^{\binom{n}{2}}.$$

Γενικότερα, για $x \leq y$ στο L έχουμε $[x, y] \cong L_k(q)$, όπου $k = \dim(y) - \dim(x)$, οπότε

$$\mu_L(x, y) = (-1)^k q^{\binom{k}{2}}.$$