10. Η άλγεβρα $I(P)$

Έστω ένα τοπικά πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(P, \leq)$.

Συμβολίζουμε με $I(P)$ το σύνολο των συναρτήσεων $f: \mathrm{Int}(P) \to \mathbb{C}$ και, ως συνήθως για $x, y \in P$ με $x \leq y$ γράφουμε $f(x,y)$ αντί για $f([x,y])$.

Το $I(P)$ έχει τη συνήθη δομή $\mathbb{C}$-διανυσματικού χώρου.

<u>**Ορισμός 10.1**</u> Ο $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος $I(P)$, εφοδιασμένος με την πράξη του γινομένου (συνέλιξη) που ορίζεται θέτοντας

$$(fg)(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x,z)\, g(z,y) \qquad (10.1)$$

για $f, g \in I(P)$ και $x, y \in P$ με $x \leq y$ λέγεται άλγεβρα πρόσπτωσης (incidence algebra) του P.

Παρατήρηση 10.2 Το $I(P)$ είναι προσεταιριστική άλγεβρα, αφού

$$((fg)h)(x,y) = (f(gh))(x,y)$$

$$= \sum_{x \leq z \leq w \leq y} f(x,z)\, g(z,w)\, h(w,y)$$

για $f, g, h \in I(P)$ και $x, y \in P$ με $x \leq y$. Επιπλέον, η $I(P)$ έχει αμφίπλευρη μονάδα $\delta \in I(P)$ με

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = y \\ 0, & \text{αν } x < y \end{cases}$$

για $x, y \in P$ με $x \leq y$, δηλαδή $f \cdot \delta = \delta \cdot f = f$ για κάθε $f \in I(P)$.

<u>Παρατήρηση 10.3</u> Ισοδύναμα, η $I(P)$ μπορεί να οριστεί ως η $\mathbb{C}$-άλγεβρα των τυπικών εκφράσεων

$$f = \sum_{x \leq y} \lambda_{xy} [x, y], \qquad \lambda_{xy} \in \mathbb{C}$$

όπου η συνέλιξη ορίζεται επεκτείνοντας γραμμικά την ισότητα

$$[x,y] \cdot [z,w] = \begin{cases} [x,w], & \text{αν } y = z \\ 0, & \text{αν } y \neq z \end{cases}$$

για $x \leq y$ και $z \leq w$ στο P.

Πρόταση 10.4 Για $f \in I(P)$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) υπάρχει $g \in I(P)$ με $fg = \delta$

(ii) υπάρχει $h \in I(P)$ με $hf = \delta$

(iii) υπάρχει $g \in I(P)$ με $fg = gf = \delta$

(iv) $f(x,x) \neq 0$ για κάθε $x \in P$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $fg = \delta$ εάνν

$$\sum_{x \leq z \leq y} f(x,z)\, g(z,y) = \delta(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x < y \end{cases}$$

για $x \leq y$, δηλαδή εάνν $f(x,x)\, g(x,x) = 1$ για κάθε $x \in P$ και

$$f(x,x)g(x,y) = -\sum_{x<z\leq y} f(x,z)g(z,y)$$

για $x,y \in P$ με $x<y$. Έπεται ότι υπάρχει $g \in I(P)$ με $fg=\delta$ εάνν $f(x,x) \neq 0$ για κάθε $x \in P$, δηλαδή (i) $\Leftrightarrow$ (iv).

Ομοίως δείχνουμε ότι (ii) $\Leftrightarrow$ (iv). Τέλος, η (iii) $\Rightarrow$ (i), (ii) είναι τετριμμένη και η (i) και (ii) $\Rightarrow$ (iii) ισχύει αφού (σε κάθε προσεταιριστική άλγεβρα με μονάδα δ) αν $fg = hf = \delta$, τότε $h = h\delta = h(fg) = (hf)g = \delta g = g$. ■

<u>Παράδειγμα 10.5</u> Θεωρούμε τη $J \in I(P)$ με

$$\zeta(x,y)=1$$

για όλα τα $x,y\in P$ με $x\leq y$. Έχουμε

- $$\zeta^2(x,y)=\sum_{x\leq z\leq y}\zeta(x,z)\zeta(z,y)$$

$$=\sum_{x\leq z\leq y}1=\#[x,y].$$

Γενικότερα, εφαρμόζοντας επαγωγή στο m

- $$\zeta^m(x,y)=\sum_{x=x_0\leq x_1\leq\cdots\leq x_m=y}\zeta(x_0,x_1)\cdots\zeta(x_{m-1},x_m)$$

$$=\sum_{x=x_0\leq x_1\leq\cdots\leq x_m=y}1$$

είναι το πλήθος των πολυαλυσίδων (multichains) $x = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_m = y$ μήκους m στο P με ελάχιστο στοιχείο x και μέγιστο y, δηλαδή ακολουθιών

$$(x_0, x_1, \ldots, x_m)$$

στοιχείων του P με $x = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_m = y$. ■

Παρατήρηση 10.6 Εφόσον $J(x,x) \neq 0$ για κάθε $x \in P$, η J είναι αντιστρέψιμο στοιχείο της $I(P)$. Ποια είναι η αντίστροφή; Η ισότητα $fJ = \delta$ σημαίνει ότι

$$\sum_{x \leq z \leq y} f(x,z) = \delta(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = y \\ 0, & \text{αν } x < y \end{cases}$$

για $x \leq y$ στο P, οπότε $f = J^{-1} = \mu_P$ είναι η συνάρτηση Möbius του P. Παρατηρούμε ότι η ισότητα $J\mu = Jf = \delta$ δίνει

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu(z,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = y \\ 0, & \text{αν } x < y \end{cases} \qquad (10.2)$$

για $x, y \in P$ με $x \leq y$.

Θεώρημα 9.4 (αντιστροφή Möbius, Rota '64)

Έστω ότι κάθε πρωτεύον ιδεώδες του P είναι πεπερασμένο (ειδικότερα, το P είναι τοπικά πεπερασμένο. Για $f, g : P \to \mathbb{C}$,

- $g(y) = \sum_{x \leq y} f(x)$ για κάθε $y \in P$ $\Leftrightarrow$

$$f(y) = \sum_{x \leq y} \mu_P(x,y)\, g(x) \text{ για κάθε } y \in P.$$

Πρώτη Απόδειξη Ας υποθέσουμε ότι

$$g(y) = \sum_{x \leq y} f(x)$$

για κάθε $y \in P$. Τότε, για $y \in P$

$$\sum_{x \leq y} \mu_P(x,y)\, g(x) = \sum_{x \leq y} \mu_P(x,y) \sum_{u \leq x} f(u)$$

$$= \sum_{u \leq y} f(u) \sum_{u \leq x \leq y} \mu_P(x,y)$$

$$= \sum_{u \leq y} f(u)\, \delta(u,y)$$

$$= f(y),$$

όπου εφαρμόσαμε τη (10.2). Αντιστρόφως, αν

$$f(y) = \sum_{x \leq y} \mu_P(x,y)\, g(x)$$

για κάθε $y \in P$ τότε, για $y \in P$

$$\begin{aligned} \sum_{x \leq y} f(x) &= \sum_{x \leq y} \sum_{u \leq x} \mu_P(u,x)\, g(u) \\ &= \sum_{u \leq y} g(u) \sum_{u \leq x \leq y} \mu_P(u,x) \\ &= \sum_{u \leq y} g(u)\, \delta(u,y) = g(y), \end{aligned}$$

όπου εφαρμόσαμε τον ορισμό (9.1) της μ_P.

<u>Δεύτερη Απόδειξη</u> Το σύνολο $\mathbb{C}^P$ των συναρτήσεων $f : P \to \mathbb{C}$ αποτελεί $\mathbb{C}$-διανυσματικό χώρο, πάνω στον οποίο η άλγεβρα $I(P)$ δρα από τα δεξιά ως άλγεβρα γραμμικών ενδομορφισμών με

$$(f\xi)(y) = \sum_{x \le y} \xi(x,y) f(x), \quad y \in P$$

για $f \in \mathbb{C}^P$ και $\xi \in I(P)$. Δηλαδή έχουμε μια απεικόνιση

$$\mathbb{C}^P \times I(P) \longrightarrow \mathbb{C}^P$$

με τις ιδιότητες

- $(f+g)\xi = f\xi + g\xi$
- $(\lambda f)\xi = \lambda(f\xi)$
- $f(\xi+\xi') = f\xi + f\xi'$
- $(f\xi)\xi' = f(\xi\xi')$

για $f, g \in \mathbb{C}^P$, $\xi, \xi' \in I(P)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, αφού

- $$((f\xi)\xi')(z) = \sum_{y \leq z} \xi'(y,z)\,(f\xi)(y)$$

$$= \sum_{y \leq z} \xi'(y,z) \sum_{x \leq y} \xi(x,y) f(x)$$

$$= \sum_{x \leq z} f(x) \sum_{x \leq y \leq z} \xi(x,y)\xi'(y,z)$$

$$= \sum_{x \leq z} f(x)\,(\zeta \cdot \zeta')(x,z)$$

$$= \sum_{x \leq z} (\zeta\zeta')(x,z)\, f(x)$$

$$= (f \cdot (\zeta\zeta'))(z)$$

για κάθε $z \in P$. Η αντιστροφή Möbius τώρα ισοδυναμεί με την προφανή σχέση

$$f \cdot \zeta = g \iff f = g \cdot \mu_P$$

για $f, g \in \mathbb{C}^P$. Πράγματι,

- $f\zeta = g \iff (f\zeta)\mu_P = g\mu_P \iff f(\zeta\mu_P) = g\mu_P$

$$\iff f\delta = g\mu_P \iff f = g\mu_P. \blacksquare$$

Ομοίως αποδεικνύεται και η δυϊκή μορφή (Θεώρημα 9.7) χρησιμοποιώντας την αριστερή δράση

$$(\xi f)(x) = \sum_{y \geq x} \xi(x,y) f(y), \qquad x \in P$$

για $f \in \mathbb{C}^P$ και $\xi \in I(P)$.

Πόρισμα 10.7. Για το δυϊκό P^* του P έχουμε

$$\mu_{P^*}(y,x) = \mu_P(x,y)$$

για $x, y \in P$ με $x \leq y$.

Απόδειξη. Η μ_{P^*} ορίζεται μονοσήμαντα από την ισότητα

$$\sum_{y \leq^* z \leq^* x} \mu_{P^*}(y,z) = \begin{cases} 1, & y = x \\ 0, & y <^* x \end{cases}$$

όπου $\leq^*$ είναι η μερική διάταξη του P^*.

Ισοδύναμα,

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu_{P^*}(y,z) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x < y. \end{cases}$$

Από τη (10.2) έπεται ότι

$$\mu_{P^*}(y,z) = \mu_P(z,y)$$

για $y, z \in P$ με $y \leq z$. ■

Πρόταση 10.8. Για τοπικά πεπερασμένα P, Q και για $(x,y), (x',y') \in P \times Q$ με $(x,y) \leq_{P\times Q} (x',y')$,

$$\mu_{P\times Q}((x,y),(x',y')) = \mu_P(x,x')\, \mu_Q(y,y').$$

Απόδειξη. Θεωρώντας την $f \in I(P\times Q)$ με

$$f((x,y),(x',y')) = \mu_P(x,x')\, \mu_Q(y,y')$$

για $(x,y) \leq_{P\times Q} (x',y')$, υπολογίζουμε ότι

$$\sum_{(x,y)\leq(u,v)\leq(x',y')} f((x,y),(u,v))$$

$$= \sum_{x\leq u\leq x'} \sum_{y\leq v\leq y'} \mu_P(x,u)\, \mu_Q(y,v)$$

$$= \left(\sum_{x \le u \le x'} \mu_P(x,u) \right) \left(\sum_{y \le v \le y'} \mu_Q(y,v) \right)$$

$$= \delta_P(x,x') \, \delta_Q(y,y')$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{αν } (x,y) = (x',y') \\ 0, & \text{αν } (x,y) < (x',y'). \end{cases}$$

Το ζητούμενο έπεται από αυτό και τον ορισμό της $\mu_{P \times Q}$. ■

Π.χ. για $S \subseteq T \subseteq [n]$, το κλειστό διάστημα $[S,T]$ στη B_n είναι ισόμορφο με το γινόμενο $\mathbf{2}^k$, όπου $\mathbf{2} = \{1 < 2\}$ και $k = \#(T \setminus S)$. Από την Πρόταση 10.8 συμπεραίνουμε ότι

$$\mu_{B_n}(S,T) = (-1)^{k} = (-1)^{\#(T \setminus S)}.$$

Παράδειγμα 10.9. Θεωρούμε το ευθύ γινόμενο αλυσίδων

$$P = \mathbf{a_1+1} \times \mathbf{a_2+1} \times \cdots \times \mathbf{a_k+1}$$

όπου $\mathbf{a+1} = \{0 < 1 < \cdots < a\}$ για $a \in \mathbb{N}$. Για $x = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k)$, $y = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k) \in P$ έχουμε $x \leq_P y \iff \varepsilon_i \leq \zeta_i$ για κάθε $i \in [k]$. Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 10.8 και το Παράδειγμα 9.2,

- $$\mu_P(x,y) = \prod_{i=1}^{k} \mu_{\mathbf{a_i+1}}(\varepsilon_i, \zeta_i)$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{αν } \zeta_i - \varepsilon_i \geq 2 \text{ για κάποιο } i \in [k] \\ (-1)^{\sum(\zeta_i - \varepsilon_i)}, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Έστω τώρα ότι

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

για πρώτους $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ και $a_i \in \mathbb{Z}_{>0}$. Τότε, $P \cong D_n$ (Παράδειγμα 8.11) και η ισότητα για τη μ_P γράφεται ισοδύναμα

$$\mu_{D_n}(d, d') = \mu(d'/d)$$

για θετικούς διαιρέτες d, d' του n με $d \mid d'$, όπου $\mu : \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται θέτοντας

$$\mu(m) = \begin{cases} (-1)^t, & \text{αν ο } m \text{ είναι γινόμενο } t \text{ διακεκριμένων πρώτων,} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

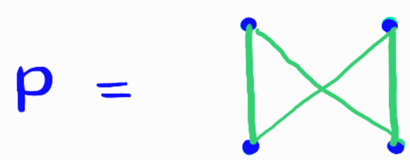
Το Θεώρημα 9.4 γράφεται

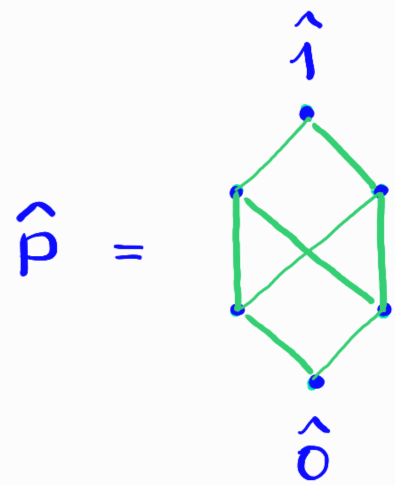
- $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ για κάθε $n|m$ $\Leftrightarrow$

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) \text{ για κάθε } n|m$$

για $f, g : D_n \to \mathbb{C}$. Αυτή είναι η κλασική αντιστροφή Möbius της Θεωρίας Αριθμών. ∎

Για κάθε πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P θέτουμε $\hat{P} = P \cup \{\hat{0}, \hat{1}\}$, όπου $\hat{0} < x < \hat{1}$ για κάθε $x \in P$.





Θεώρημα 10.10 Έστω c_k το πλήθος των αλυσίδων $\hat{0} = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = \hat{1}$ μήκους k στο $\hat{P}$, με ελάχιστο στοιχείο $\hat{0}$ και μέγιστο $\hat{1}$ (οπότε $c_0 = 0$, $c_1 = 1$). Τότε,

- $$\mu_{\hat{P}}(\hat{0},\hat{1}) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k c_k$$

$$= c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \cdots$$

Ισοδύναμα,

$$\mu_{\hat{P}}(\hat{0},\hat{1}) = \sum (-1)^{\#C-1}$$

όπου το άθροισμα διατρέχει όλες τις αλυσίδες C (συμπεριλαμβανομένης της $C=\emptyset$) στο P.

Στο παράδειγμα του σχήματος έχουμε $c_1=1$, $c_2=c_3=4$ και $c_k=0$ για $k\geq 4$, οπότε $\mu_{\hat{P}}(\hat{0},\hat{1}) = -1+4-4 = -1$.

Πρώτη Απόδειξη Θέτουμε $f(\hat{0}) = 1$ και

$$f(x) = \sum (-1)^{\#C-1}$$

για $x \in \hat{P} \setminus \{\hat{0}\}$, όπου το άθροισμα διατρέχει όλες τις αλυσίδες του διαστήματος $(\hat{0}, x)$ του P. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{\hat{0} \leq x \leq y} f(x) = 0$$

για κάθε $y \in \hat{P} \setminus \{\hat{0}\}$, δηλαδή ότι

$$\sum_{\hat{0} \leq x \leq y} \sum_{\substack{\text{chains } C \text{ in } \hat{P} \\ \min(C) = \hat{0} \\ \max(C) = x}} (-1)^{\#C} = 0.$$

Πράγματι, το αριστερό μέλος γράφεται ως άθροισμα όρων της μορφής

$$(-1)^{\#C} + (-1)^{\#(C\cup\{y\})}$$

για αλυσίδες C με $y \notin C$ και συνεπώς ισούται με 0.

<u>Δεύτερη Απόδειξη</u> Θέτουμε $\xi = \xi_P = \zeta - \delta \in I(P)$, δηλαδή

$$\xi(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = y \\ 1, & \text{αν } x < y \end{cases}$$

για $x, y \in \hat{P}$ με $x \leq y$. Τότε,

- $\mu_{\hat{P}}(\hat{0},\hat{1}) = \zeta^{-1}(\hat{0},\hat{1}) = (\delta+\xi)^{-1}(\hat{0},\hat{1})$
$$= (\delta - \xi + \xi^2 - \xi^3 + \cdots)(\hat{0},\hat{1}).$$

Όμως,

- $$\zeta^k(x,y) = \sum_{x=x_0<x_1<\cdots<x_k=y} \zeta(x_0,x_1)\cdots\zeta(x_{k-1},x_k)$$

$$= \sum_{x=x_0<x_1<\cdots<x_k=y} 1,$$

το οποίο είναι το πλήθος των αλυσίδων μή-κους k στο P με ελάχιστο στοιχείο x και μέγιστο y. Εφαρμόζοντας τα παραπάνω για $x=\hat{0}$ και $y=\hat{1}$ βρίσκουμε ότι

$$\mu_{\hat{P}}(\hat{0},\hat{1}) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k c_k . \quad \blacksquare$$