8. Μερικώς Διατεταγμένα Σύνολα (συνέχεια)

Κατασκευές Μερικών Διατάξεων. Θεωρούμε μερικώς διατεταγμένα σύνολα $(P, \leq_P)$ και $(Q, \leq_Q)$ με $P \cap Q = \emptyset$. Το ευθύ άθροισμα (ή ξένη ένωση) $P+Q$ ορίζεται ως η ένωση $P \cup Q$, μερικώς διατεταγμένη με τη σχέση

- $x \leq_{P+Q} y \iff x, y \in P$ και $x \leq_P y$, ή $x, y \in Q$ και $x \leq_Q y$.

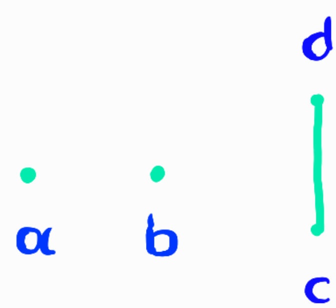
Το διατακτικό άθροισμα $P \oplus Q$ ορίζεται ως η ένωση $P \cup Q$, μερικώς διατεταγμένη με τη σχέση

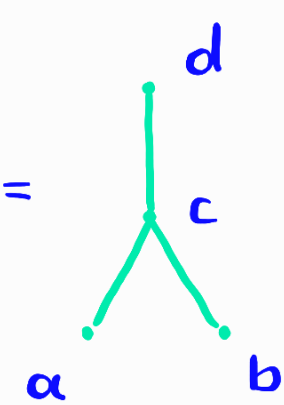
- $x \leq_{P \oplus Q} y \iff x \leq_{P+Q} y$, ή $x \in P$ και $y \in Q$.

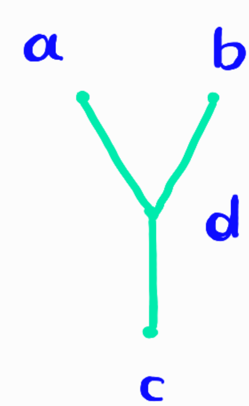
Π.χ. αν

$P =$ 

$Q =$ 

τότε $P+Q =$ 

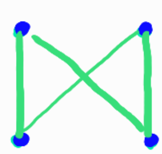
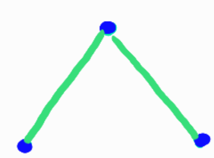
$P \oplus Q =$ 

$Q \oplus P =$ 

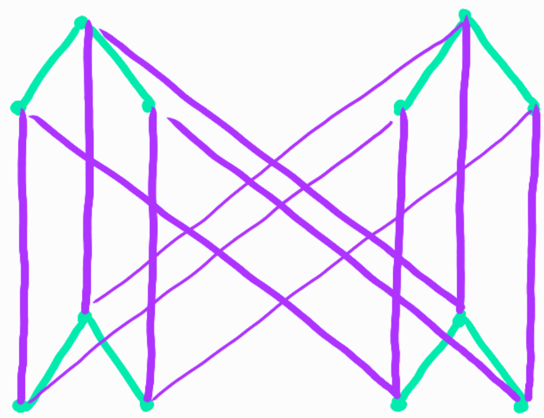
Το ευθύ γινόμενο $P \times Q$ ορίζεται ως το καρτεσιανό γινόμενο $\{(x,y) : x \in P, y \in Q\}$ εφοδιασμένο με τη μερική διάταξη

$$(x,y) \leq (x',y') \iff x \leq_P x' \text{ και } y \leq_Q y'.$$

Το διάγραμμα Hasse του $P \times Q$ προκύπτει αντικαθιστώντας κάθε $x \in P$ με ένα αντίτυπο $Q_x = \{(x,y) : y \in Q\}$ του διαγράμματος Hasse του Q και ενώνοντας τα αντίστοιχα στοιχεία (x,y) και (x',y) των Q_x και $Q_{x'}$ αν το x' καλύπτει το x στο P. Π.χ. αν

$P =$  $Q =$ 

τότε

$P \times Q =$ 

<u>Παράδειγμα 8.10</u> (και λύση της Άσκησης 8.6)

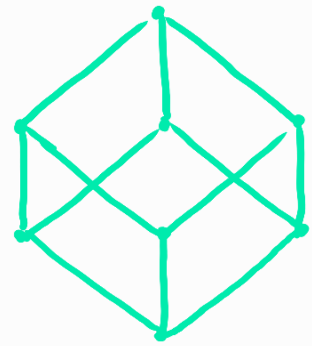
έχουμε τον ισομορφισμό

$$\psi : \underbrace{\mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \cdots \times \mathbf{2}}_{n \text{ παράγοντες}} \longrightarrow B_n$$

με

$$\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = \{ i \in [n] : \varepsilon_i = 2 \}$$

για $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in \mathbf{2} = \{1 < 2\}$.

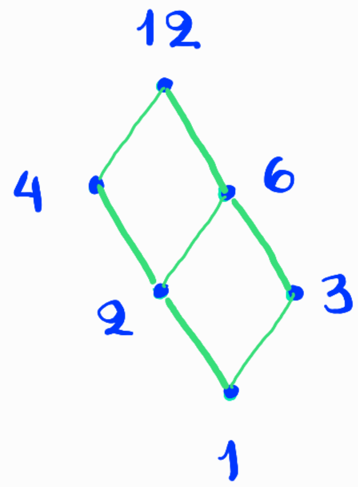
 $\cong$  $= B_3$

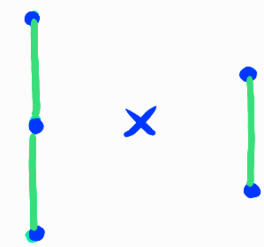
Πράγματι, η ψ είναι 1-1 και επί και για $x, y \in \mathbf{2}^n$ έχουμε

- $x \leq y \iff (i \in \psi(x) \Rightarrow i \in \psi(y))$

$$\iff \psi(x) \subseteq \psi(y).$$

<u>Παράδειγμα 8.11.</u> Έχουμε τον ισομορφισμό

$D_{12} =$ 

$\cong$ 

Γενικότερα, έστω θετικός ακέραιος

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

όπου $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ είναι πρώτοι αριθμοί και $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Τότε,

$$D_n \cong a_1+1 \times a_2+1 \times \cdots \times a_k+1$$

με ισομορφισμό $\psi : \prod_{i=1}^{k} (a_i+1) \longrightarrow D_n$

με

$$\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\varepsilon_i}$$

για $\varepsilon_i \in \{0, 1, \ldots, a_i\} = a_i + 1$. Πράγματι, η ψ είναι αμφιμονοσήμαντη και $x \leq y \Leftrightarrow \psi(x) \mid \psi(y)$ για $x, y \in \prod_{i=1}^{k} (a_i + 1)$. ■

Πρόταση 8.12. Αν τα P και Q είναι διαβαθμισμένα τάξης m και n, αντίστοιχα, τότε το $P \times Q$ είναι επίσης διαβαθμισμένο, έχει τάξη $m+n$ και

$$F(P \times Q, y) = F(P, y) F(Q, y).$$

Απόδειξη. Οι μεγιστικές αλυσίδες ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου $(R, \preccurlyeq)$ είναι εκείνες της μορφής

$$c_0 \prec c_1 \prec \cdots \prec c_k$$

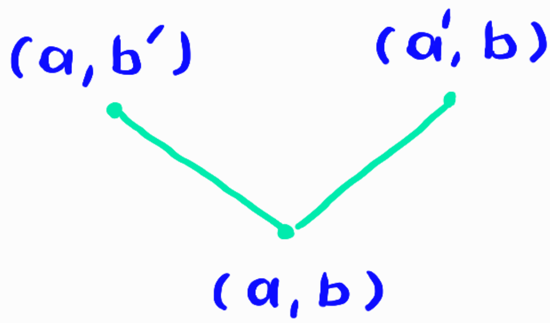
όπου

- το c_i καλύπτει το c_{i-1} στο R για $i \in [k-1]$
- το c_0 είναι ελαχιστικό στοιχείο του R
- το c_k είναι μεγιστικό στοιχείο του R.

Για το ευθύ γινόμενο $P \times Q$ έχουμε:

- το $(a, b) \in P \times Q$ καλύπτεται από το $(a', b') \in P \times Q$ εάνν $a = a'$ και το b καλύπτεται από το b' στο Q, ή $b = b'$

και το a καλύπτεται από το a' στο P.



- τα ελαχιστικά στοιχεία του $P \times Q$ είναι τα (a,b), όπου a και b είναι ελαχιστι-στικά στοιχεία των P και Q, αντίστοιχα

- τα μεγιστικά στοιχεία του $P \times Q$ είναι τα (a,b), όπου a και b είναι τα μεγιστικά στοιχεία των P και Q, αντίστοιχα.

έστω

- $\rho_P : P \longrightarrow \mathbb{N}$
- $\rho_Q : Q \longrightarrow \mathbb{N}$

οι συναρτήσεις τάξης των P και Q και έστω

$$\rho(a,b) = \rho_P(a) + \rho_Q(b)$$

για $(a,b) \in P \times Q$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η $\rho : P \times Q \longrightarrow \mathbb{N}$ έχει τις εξής ιδιότητες:

- αν το $(a,b) \in P \times Q$ καλύπτεται από το (a',b'), τότε $\rho(a',b') = \rho(a,b) + 1$
- $\rho(a,b) = 0$ για κάθε ελαχιστικό στοιχείο $(a,b) \in P \times Q$

- $\rho(a,b) = m+n$ για κάθε μεγιστικό στοιχείο $(a,b) \in P \times Q$.

Από αυτά προκύπτει ότι το $P \times Q$ είναι διαβαθμισμένο τάξης $m+n$, με συνάρτηση τάξης ρ. Επιπλέον,

- $$F(P \times Q, y) = \sum_{(a,b) \in P \times Q} y^{\rho(a,b)}$$

$$= \sum_{(a,b) \in P \times Q} y^{\rho_P(a) + \rho_Q(b)}$$

$$= \left(\sum_{a \in P} y^{\rho_P(a)} \right) \left(\sum_{b \in Q} y^{\rho_Q(b)} \right)$$

$$= F(P, y) F(Q, y). \quad ■$$

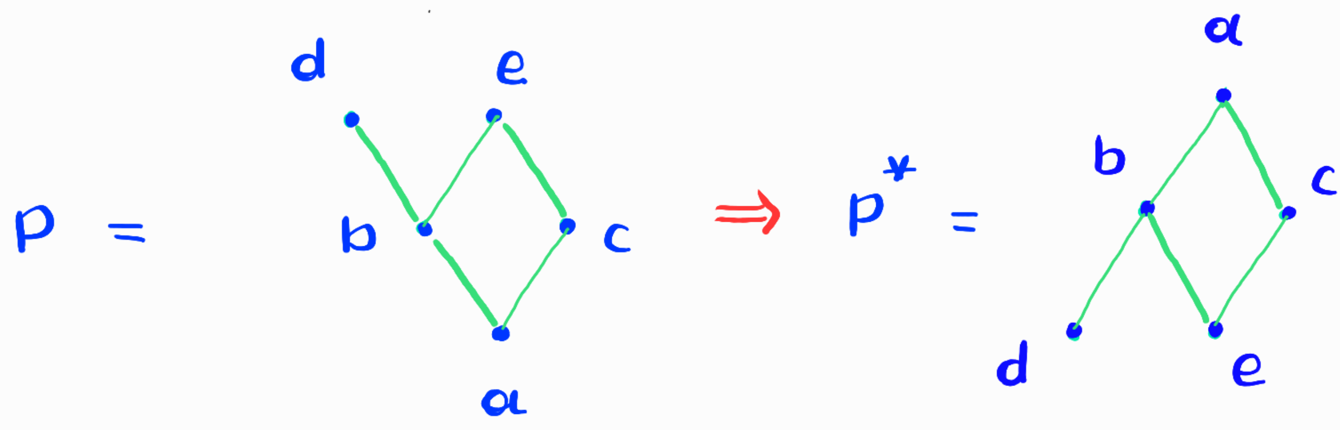
Πόρισμα 8.13 Αν $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} \in \mathbb{Z}_{>0}$ είναι όπως στο Παράδειγμα 8.11, τότε

$$F(D_n, y) = \prod_{i=1}^{k} (1 + y + y^2 + \cdots + y^{a_i}). \quad \blacksquare$$

Για μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(P, \leq)$, το δυϊκό $(P, \leq)^*$ (ή, απλούστερα, P^*) ορίζεται ως το ζεύγος $(P, \leq^*)$, όπου

$$x \leq^* y \iff y \leq x$$

για $x, y \in P$. Π.χ.



Το P λέγεται αυτοδυϊκό αν είναι ισόμορφο με το P^*, δηλαδή αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f: P \to P$, τέτοια ώστε

$$x \leq_P y \iff f(y) \leq_P f(x)$$

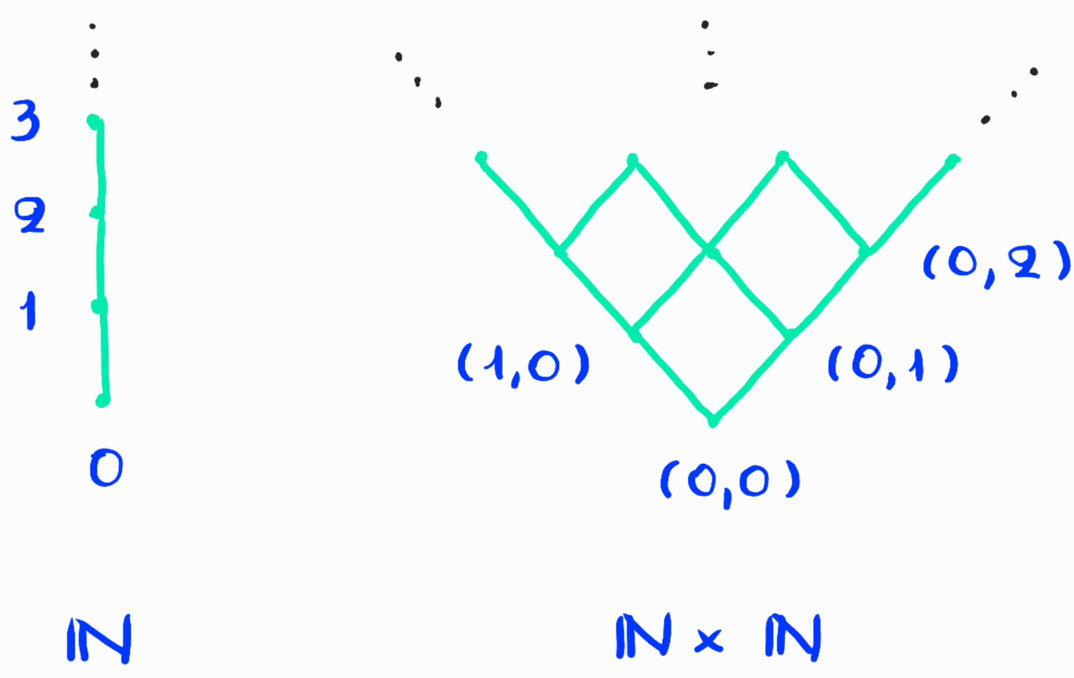
για $x, y \in P$.

Άσκηση 8.14. Αν τα P και Q είναι αυτοδυϊκά, δείξτε ότι ισχύει το ίδιο για το ευθύ γινόμενό τους $P \times Q$.

Ισχύει το αντίστροφο;

9. Η συνάρτηση Möbius

Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο P λέγεται τοπικά πεπερασμένο αν κάθε κλειστό διάστημα στο P είναι πεπερασμένο. Π.χ. τα



είναι άπειρα αλλά τοπικώς πεπερασμένα.

Συμβολίζουμε με $\mathrm{Int}(P)$ το σύνολο των (μη κενών) κλειστών διαστημάτων του P.

Ορισμός 9.1. Για τοπικά πεπερασμένο P, η συνάρτηση Möbius

$$\mu_P : \mathrm{Int}(P) \to \mathbb{Z}$$

ορίζεται αναδρομικά από τον τύπο

(9.1)
$$\mu_P(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = y \\ -\sum\limits_{x \leq z < y} \mu_P(x,z), & \text{αν } x < y \end{cases}$$

για $x \leq y$ στο P, όπου $\mu_P(x,y) := \mu_P([x,y])$.

Έτσι,

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu_P(x,z) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x=y \\ 0, & \text{αν } x<y \end{cases} \qquad (9.2)$$

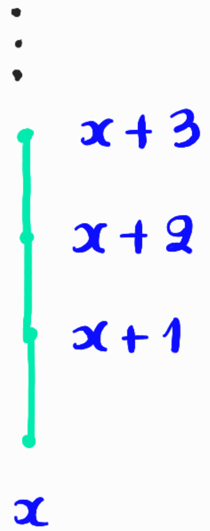
για $x, y \in P$ με $x \leq y$.

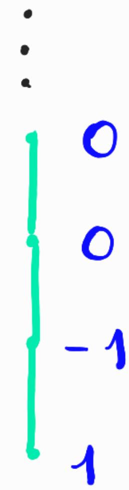
Παράδειγμα 9.2.

(α) Για την αλυσίδα $P = \mathbb{N} = \{0 < 1 < 2 < \cdots\}$ έχουμε

- $\mu(x,x) = 1$
- $\mu(x,x+1) = -\mu(x,x) = -1$
- $\mu(x,x+2) = -\mu(x,x) - \mu(x,x+1) = 0$
- $\mu(x,x+3) = -\mu(x,x) - \mu(x,x+1) - \mu(x,x+2)$

$$\vdots \qquad = 0$$





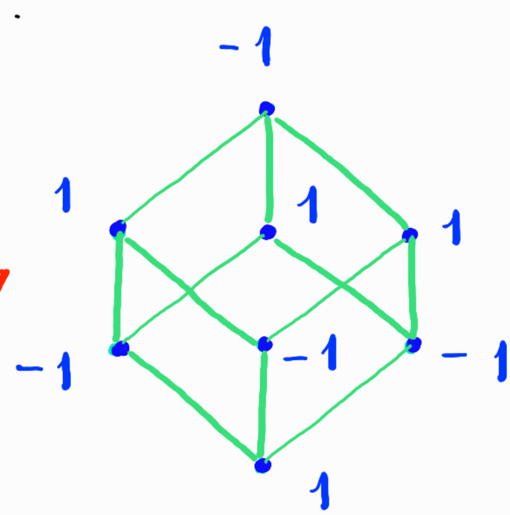
$\mu(x,y)\,,\ x \leq y$

και γενικώς

$$\mu_P(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } y = x \\ -1, & \text{αν } y = x+1 \\ 0, & \text{αν } y \geq x+2. \end{cases}$$

(β) Για $P = B_n$ βρίσκουμε ότι $\mu_P(\emptyset, x) = (-1)^{\# x}$ για $n \leq 3$.

$\mu(\emptyset, x)$



Γενικότερα,

$$\mu_P(x,y) = (-1)^{\#(y-x)}$$

για $x, y \in B_n$ με $x \subseteq y$. Πράγματι, θέτοντας

$$f(x,y) = (-1)^{\#(y-x)}$$

για $x, y \in B_n$ με $x \subseteq y$ βρίσκουμε ότι

$$\sum_{x \le z \le y} f(x,z) = \sum_{x \subseteq z \subseteq y} (-1)^{\#(z-x)}$$

$$= (1-1)^{\#(y-x)} = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \subset y \end{cases}$$

και συμπεραίνουμε ότι $f = \mu_P$. ■

Παρατήρηση 9.3. Η (9.2) ορίζει μονοσήμαντα τη συνάρτηση Möbius μ_P. Για κάθε $x \in P$, οι τιμές $\mu_P(x,y)$ της συνάρτησης για $y \in P$ με $y \geq x$ εξαρτώνται μόνο από το φίλτρο

$$P_{\geq x} = \{y \in P : y \geq x\}$$

του P.

Ορολογία. Το $P_{\geq x} = \{y \in P : y \geq x\}$ λέγε- πρωτεύον φίλτρο (ή πρωτεύον δυϊκό ιδεώδες) του P που παράγεται από το x. Αναλόγως, το $P_{\leq x} = \{y \in P : y \leq x\}$ είναι το πρωτεύον ιδεώδες που παράγεται από το x.

Θεώρημα 9.4 (αντιστροφή Möbius)

Έστω ότι κάθε πρωτεύον ιδεώδες του P είναι πεπερασμένο (ειδικότερα, το P είναι τοπικά πεπερασμένο). Για συναρτήσεις $f, g : P \to R$ (όπου R είναι αβελιανή ομάδα) έχουμε

- $$g(y) = \sum_{x \leq y} f(x) \text{ για κάθε } y \in P \iff$$

$$f(y) = \sum_{x \leq y} \mu_P(x,y)\, g(x) \text{ για κάθε } y \in P.$$

Παράδειγμα 9.5. (α) Για $P = \mathbb{N} = \{0 < 1 < 2 < \cdots\}$, το Θεώρημα 9.4 ισοδυναμεί με το γεγονός ότι για $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

- $g(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $\iff$

$$f(n) = \begin{cases} g(0), & \text{αν } n=0 \\ g(n) - g(n-1), & \text{αν } n \geq 1 \end{cases}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Για $P = B_n$ το Θεώρημα 9.4 ισοδυναμεί με την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού: για $f, g : 2^{[n]} \to \mathbb{R}$,

- $g(y) = \sum_{x \subseteq y} f(x)$ για κάθε $y \subseteq [n]$ $\iff$

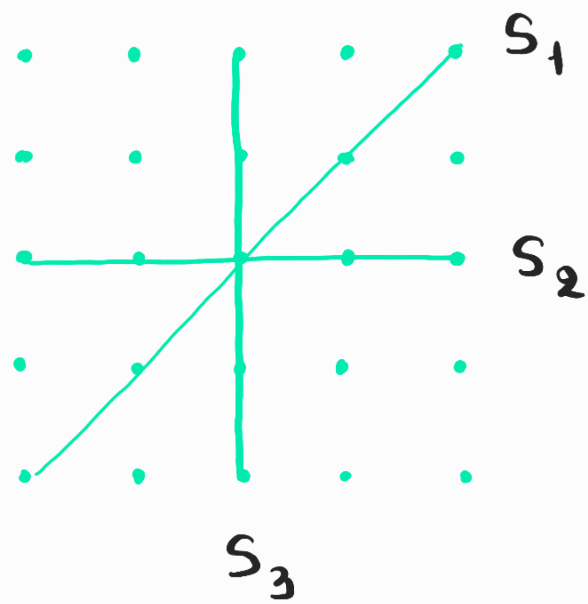
$$f(y) = \sum_{x \subseteq y} (-1)^{\#(y-x)} g(x) \text{ για κάθε } y \subseteq [n].$$

Παράδειγμα 9.6. Θεωρούμε πεπερασμένο σύνολο Ω και υποσύνολά του $S_1, S_2, \dots, S_n$. Έστω P το σύνολο όλων των μη κενών τομών

$$S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_k}$$

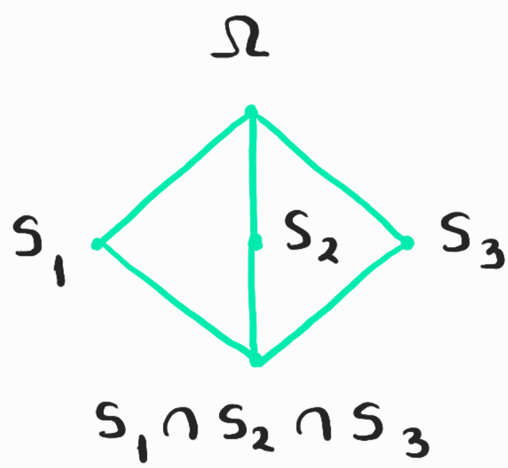
συνόλων από τα S_i, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του εγκλεισμού: $x \leq y \Leftrightarrow x \subseteq y$. Το $\hat{1} = \Omega$ είναι το μέγιστο στοιχείο του P. Π.χ. αν

$\Omega =$



τότε

$P =$



Για $y \in P$ θέτουμε $g(y) = \# y$ και

$$f(x) = \# \Big(x - \bigcup_{\substack{z \in P \\ z \subset x}} z \Big).$$

Τότε,

$$g(y) = \sum_{x \leq y} f(x), \quad y \in P$$

και συνεπώς

$$f(y) = \sum_{x \leq y} \mu_P(x, y)\, g(x)$$

για κάθε $y \in P$. Ειδικότερα,

- $$\#\left(\Omega - \bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = f(\hat{1})$$

$$= \sum_{x \in P} \mu_P(x, \hat{1})\, g(x)$$

$$= \sum_{x \in P} \mu_P(x, \hat{1})\, \# x.$$

Στο παράδειγμα,

- $\# (\Omega - S_1 \cup S_2 \cup S_3) = \# \Omega - \# S_1 - \# S_2 - \# S_3 + 2 \, \# S_1 \cap S_2 \cap S_3$
$= 25 - 3 \cdot 5 + 2 = 12.$

<u>Θεώρημα 9.7</u> (αντιστροφή Möbius, δυϊκή μορφή)

Έστω ότι κάθε πρωτεύον φίλτρο $P_{\geq x}$ του P είναι πεπερασμένο (ειδικότερα, το P είναι τοπικά πεπερασμένο). Για $f, g : P \to R$ (όπου R είναι αβελιανή ομάδα) έχουμε

- $$g(y) = \sum_{x \geq y} f(x) \text{ για κάθε } y \in P \iff$$

$$f(y) = \sum_{x \geq y} \mu_P(y,x)\, g(x) \text{ για κάθε } y \in P.$$