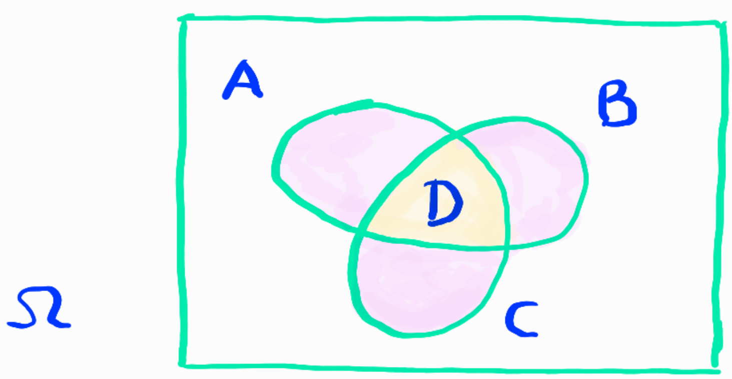
8. Μερικώς Διατεταγμένα Σύνολα

Έστω υποσύνολα A, B, C πεπερασμένου συνόλου Ω τέτοια ώστε $A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C := D$.

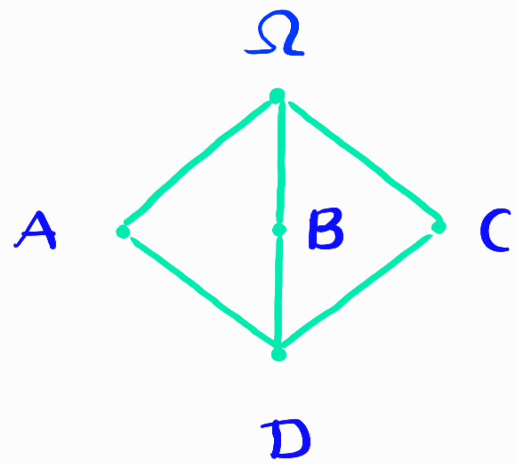


Τότε, $\#(\Omega - A \cup B \cup C) =$

$$= \#\Omega - \#A - \#B - \#C + \#A\cap B + \#A \cap C + \#B \cap C - \#A\cap B\cap C$$

$$= \#\Omega - \#A - \#B - \#C + 2\#D$$

Ο συντελεστής +2 είναι μια από τις τιμές της συνάρτησης Möbius στο σύνολο όλων των τομών μεταξύ των A, B και C, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του εγκλεισμού.



Ορισμός 8.1. Μερική διάταξη σε ένα σύνολο P λέγεται κάθε διμελής σχέση $\leqslant$ στο P με τις εξής ιδιότητες:

(i) $x \leq x$ (αυτοπάθεια)

(ii) $x \leq y$ και $y \leq x \Rightarrow x = y$

(αντισυμμετρία)

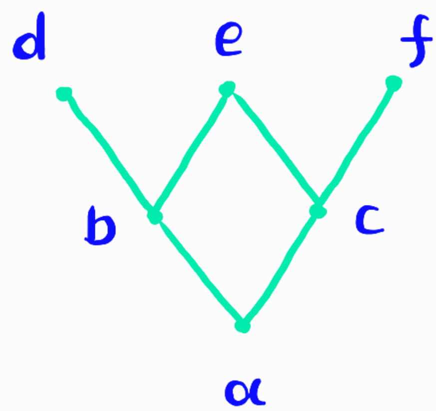
(iii) $x \leq y$ και $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(μεταβατικότητα)

για όλα τα $x, y, z \in P$. Το ζεύγος $(P, \leq)$ (ή απλά το P, όταν εννοείται η $\leq$) λέγεται μερικώς διατεταγμένο σύνολο.

Ορολογία. Τα $x, y \in P$ λέγονται συγκρίσιμα στο $(P, \leq)$ αν $x \leq y$ ή $y \leq x$ (διαφορετικά, λέγονται μη συγκρίσιμα). Γράφουμε $y \geq x$ αν $x \leq y$, $x < y$ (ή $y > x$) αν $x \leq y$ και $x \neq y$ κ.ο.κ.

Λέμε ότι το y καλύπτει το x στο P και ότι η $x<y$ (ή το ζεύγος (x,y)) αποτελεί σχέση κάλυψης στο P, όταν $x<y$ και $x<z\leqslant y \Rightarrow z=y$ για $z\in P$.



Αν το P είναι πεπερασμένο, τότε παριστάται με το διάγραμμα Hasse, το οποίο έχει τα στοιχεία του P ως κορυφές και μία ακμή μεταξύ των x,y για κάθε σχέση κάλυψης $x<y$ στο P, με το y να εμφανίζεται ψηλότερα του x.

Λέμε επίσης ότι το στοιχείο $a \in P$ είναι

- ελάχιστο αν $a \leq x$ για κάθε $x \in P$
- μέγιστο αν $a \geq x$ για κάθε $x \in P$
- ελαχιστικό αν δεν υπάρχει $x \in P$ με $x < a$
- μεγιστικό αν δεν υπάρχει $x \in P$ με $x > a$.

Ορισμός 8.2 Θεωρούμε σύνολα P, Q με μερικές διατάξεις $\leq_P, \leq_Q$ αντίστοιχα. Μια απεικόνιση $f : P \to Q$ διατηρεί τη διάταξη (και λέγεται μορφισμός μερικώς διατεταγμένων συνόλων) αν

$$x \leqslant_P y \Rightarrow f(x) \leqslant_Q f(y)$$

για $x, y \in P$. Η $f: P \to Q$ λέγεται ισομορφισμός μερικώς διατεταγμένων συνόλων αν είναι αμφιμονοσήμαντη και οι $f: P \to Q$ και $f^{-1}: Q \to P$ διατηρούν τη διάταξη, δηλαδή

$$x \leqslant_P y \iff f(x) \leqslant_Q f(y)$$

για $x, y \in P$. Τα P και Q λέγονται ισόμορφα (ως μερικώς διατεταγμένα σύνολα) αν υπάρχει ισομορφισμός $f: P \to Q$.

Παράδειγμα 8.3. Έστω ότι

$P =$ 

$Q =$ 

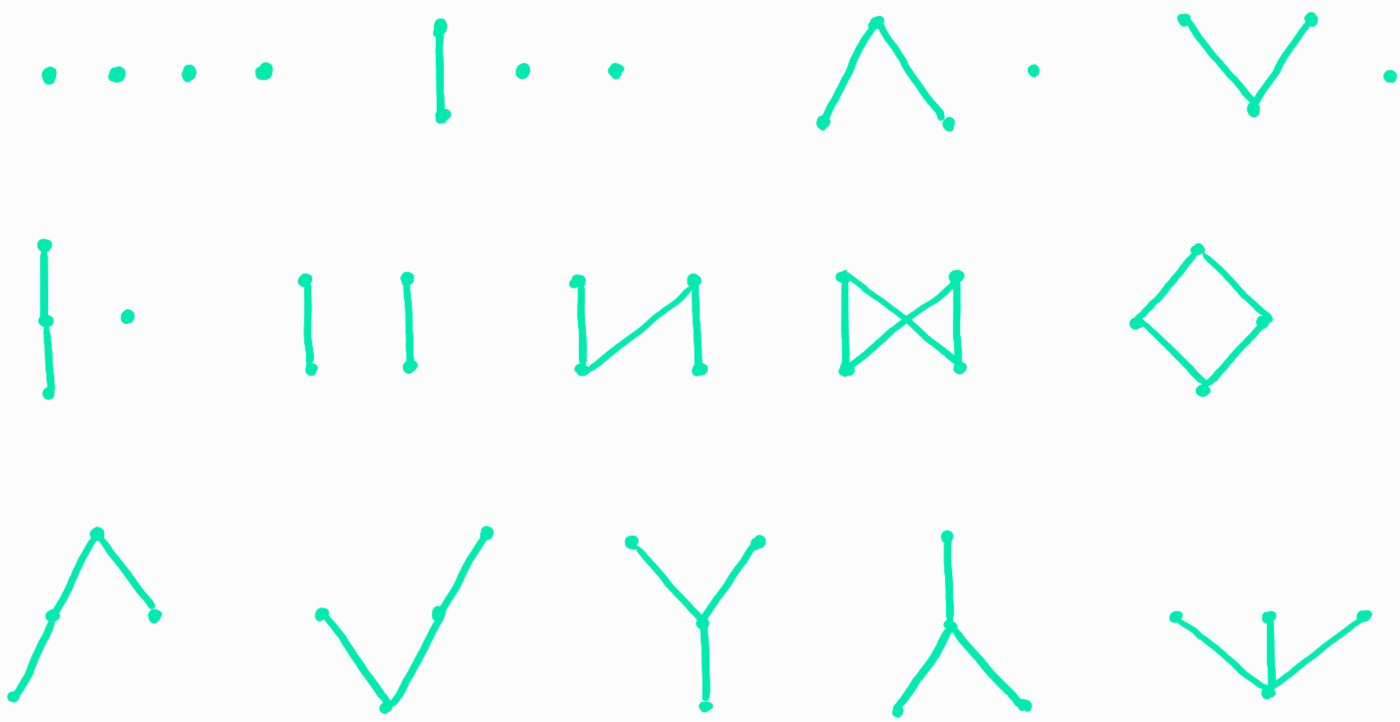
Τότε, κάθε αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f: P \to Q$ διατηρεί τη διάταξη, αλλά δεν είναι ισομορφισμός.

Παρατήρηση 8.4. Υπάρχουν δύο μερικές διατάξεις με δύο στοιχεία (μέχρις ισομορφισμού), 5 με τρία στοιχεία, 16 με τέσσερα στοιχεία, 63 με πέντε στοιχεία, 318 με έξι στοιχεία.

$n = 1$

$n = 2$

$n = 3$

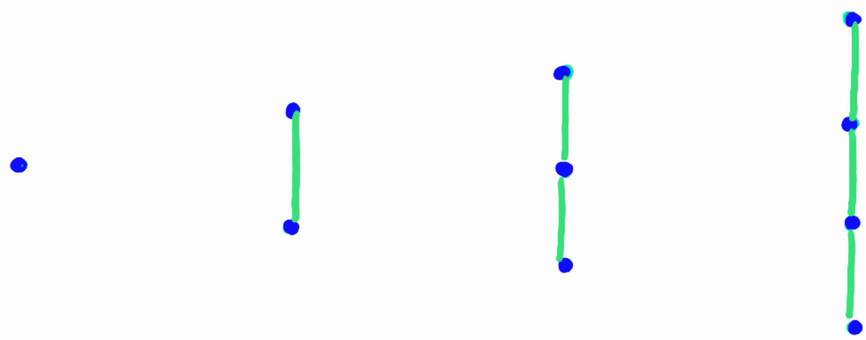


$n = 4$

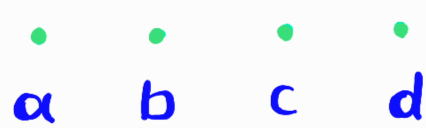
κλάσεις ισομορφισμού μερικώς διατεταγμένων συνόλων με $n \leq 4$ στοιχεία

Παραδείγματα 8.5.

(α) Η φυσική διάταξη $1 < 2 < \cdots < n$ στο $[n]$ είναι ολική διάταξη (μερική διάταξη στην οποία οποιαδήποτε δύο στοιχεία είναι μεταξύ τους συγκρίσιμα), ή γραμμική διάταξη, ή αλυσίδα, και συμβολίζεται με $\mathbf{n}$.



(β) Η σχέση $\leq$ που ορίζεται σε τυχαίο σύνολο θέτοντας $x \leq y \iff x = y$ είναι μερική διάταξη στην οποία οποιαδήποτε δύο διαφορετικά στοιχεία του P είναι μεταξύ τους μη συγκρίσιμα και λέγεται αντιαλυσίδα στο P.

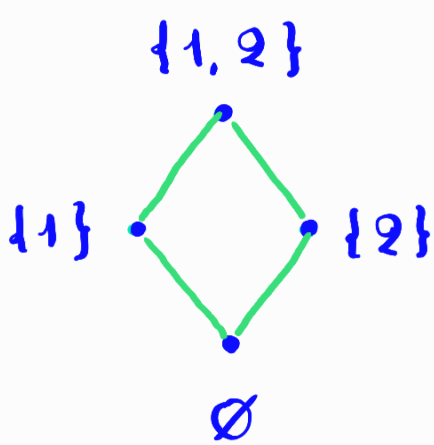


αντιαλυσίδα στο $\{a, b, c, d\}$

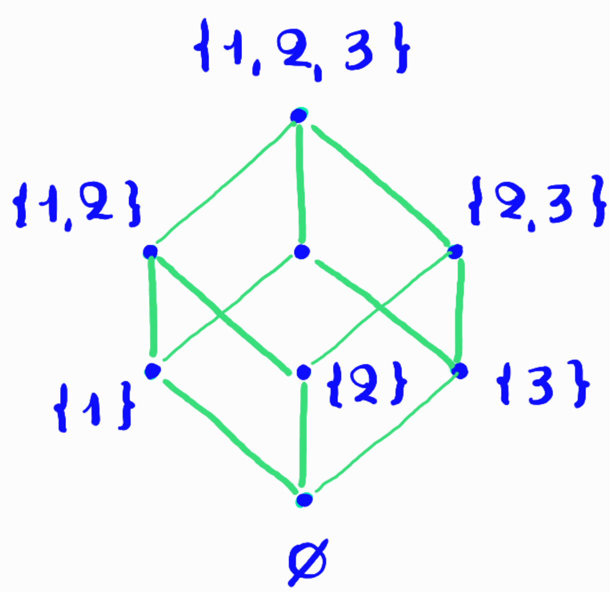
(γ) Το δυναμοσύνολο $2^{[n]}$ του συνόλου $[n]$, εφοδιασμένο με τη σχέση του εγκλεισμού

$$x \le y \iff x \subseteq y$$

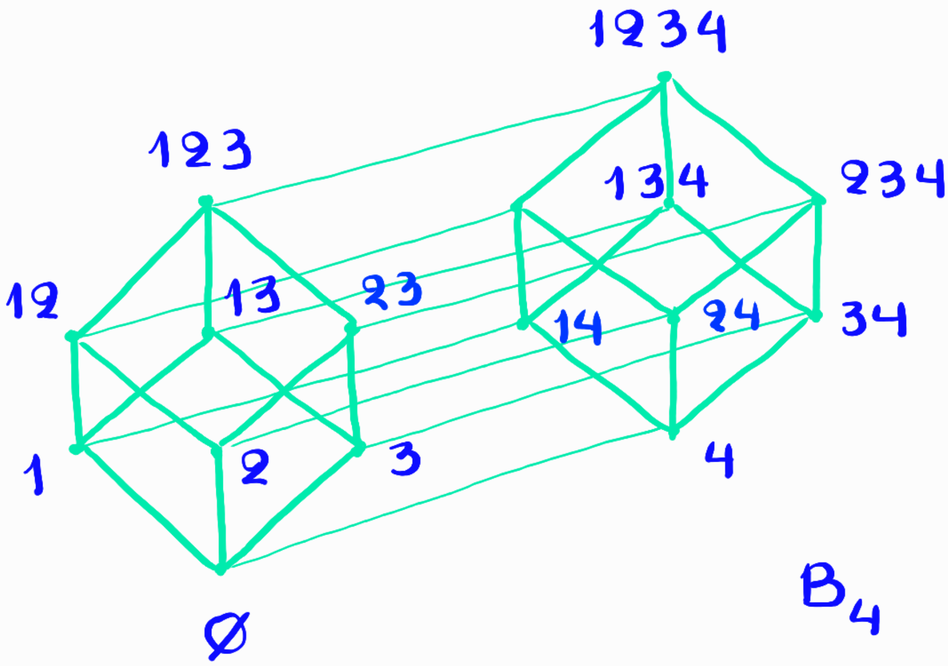
για $x, y \subseteq [n]$ είναι μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Λέγεται άλγεβρα Boole τάξης n και συμβολίζεται με B_n.



B_2



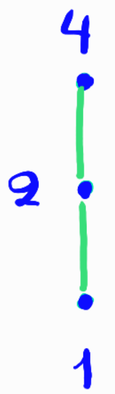
B_3



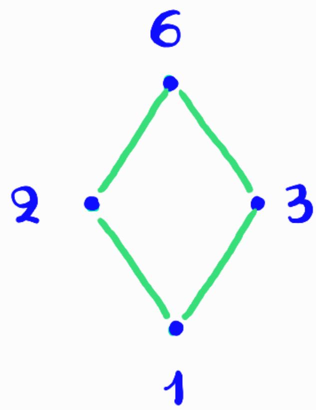
(δ) Για $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ έστω D_n το σύνολο των θετικών διαιρετών του ακεραίου n, εφοδιασμένο με τη μερική διάταξη της διαιρετότητας:

$$x \leq y \iff x \mid y$$

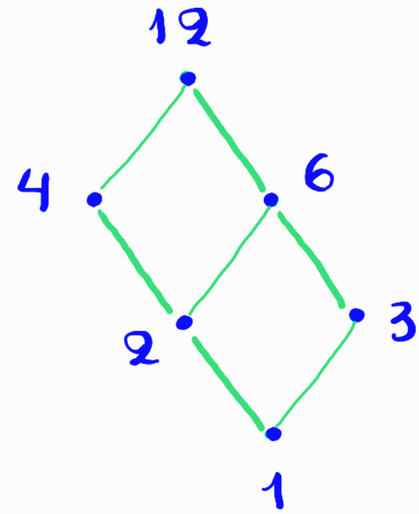
για $x, y \in D_n$.



D_4



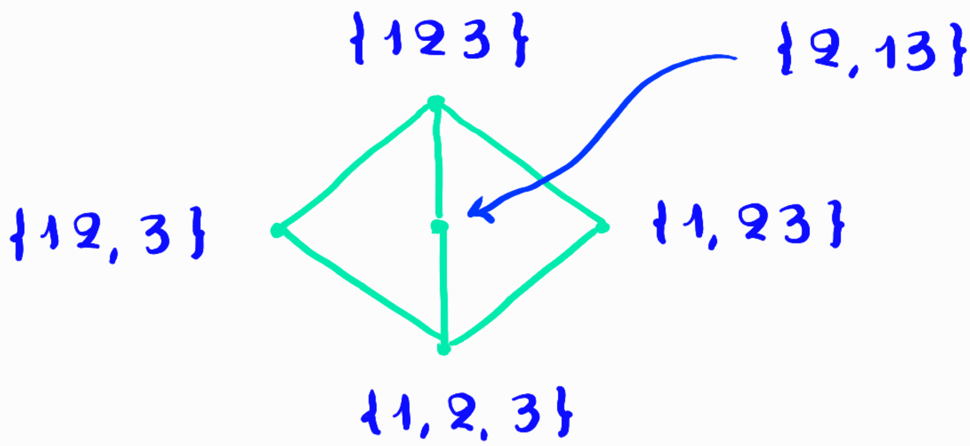
D_6



D_{12}

(ε) Για $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, έστω Π_n το σύνολο των διαμερίσεων του συνόλου $[n]$, εφοδιασμένο με τη σχέση της εκλέπτυνσης (refinement):

- $\pi \leq \sigma \Leftrightarrow$ κάθε μέρος της π περιέχεται σε κάποιο μέρος της σ.

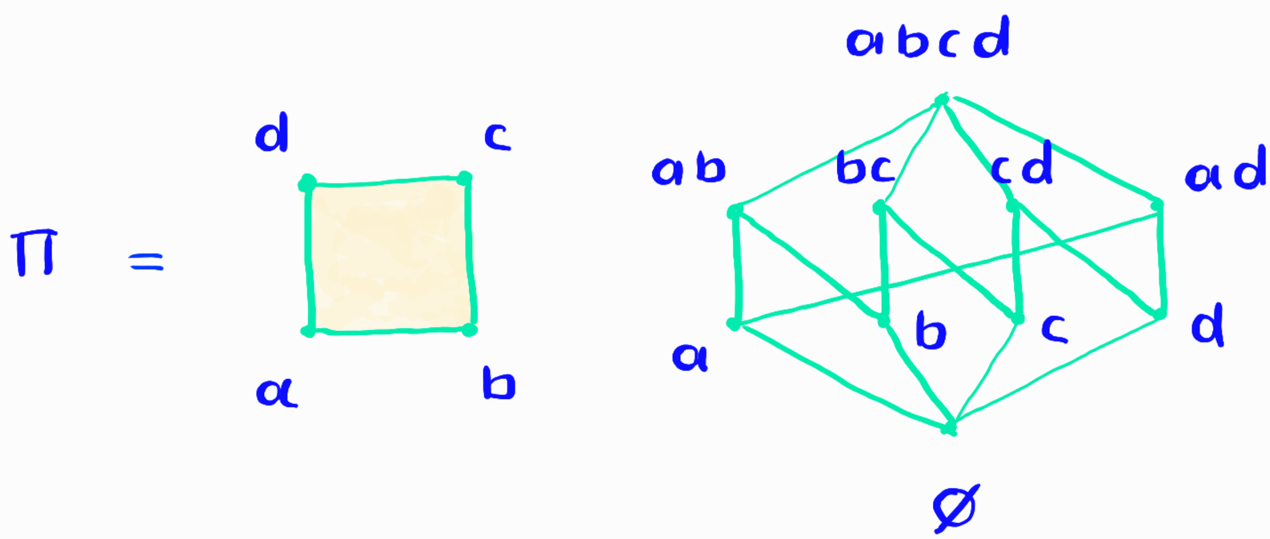


Π_3

Με τη σχέση αυτή το Π_n καθίσταται μερικώς διατεταγμένο σύνολο με μέγιστο στοιχείο τη διαμέριση του $[n]$ με ένα μόνο μέρος και ελάχιστο εκείνη με n μέρη.

Ποιες είναι οι σχέσεις κάλυψης στο Π_n;

(στ) Το σύνολο των πλευρών (όψεων) ενός πολυγώνου Π, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του εγκλεισμού.



(ζ) Θεωρούμε n-διάστατο διανυσματικό χώρο $V_n(q)$ επί του πεπερασμένου σώματος $\mathbb{F}_q$ με q στοιχεία. Το σύνολο των διανυσματικών υπόχωρων του $V_n(q)$, μερικώς διατεταγμένο με τη μερική διάταξη του εγκλεισμού, συμβολίζεται με $L_n(q)$ και αποτελεί 'q-ανάλογο' της B_n.

Άσκηση 8.6. Θεωρούμε το σύνολο $A_n = \{0,1\}^n$, εφοδιασμένο με τη σχέση

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \leq (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \Leftrightarrow \varepsilon_i \leq \zeta_i \text{ για } i \in [n].$$

(α) Δείξτε ότι η $\leq$ είναι μερική διάταξη στο σύνολο A_n.

(β) Δείξτε ότι το A_n είναι ισόμορφο με την άλγεβρα Boole B_n καθώς και με τη D_m, αν $m = p_1 p_2 \cdots p_n$ για κάποιους πρώτους $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$.

Επιπλέον ορισμοί και ορολογία.

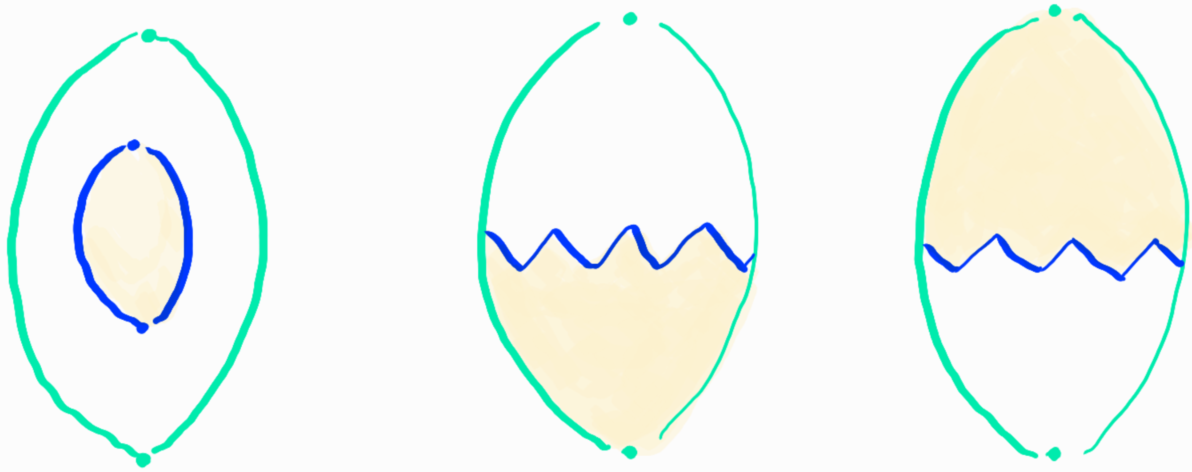
Έστω μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(P, \leq_P)$. Η σχέση $\leq_P$ επάγει μια μερική διάταξη σε κάθε υποσύνολο S του P:

$$x \leq y \iff x \leq_P y, \quad x, y \in S.$$

Τα παρακάτω υποσύνολα του P θεωρούνται πάντοτε μερικώς διατεταγμένα με την επαγόμενη από το P μερική διάταξη:

- τα κλειστά διαστήματα $[x, y] = \{z \in P : x \leq_P z \leq_P y\}$
- τα ανοικτά διαστήματα $(x, y) = \{z \in P : x <_P z <_P y\}$

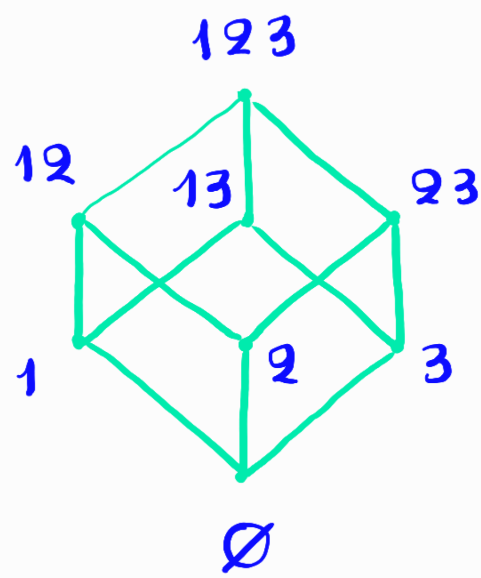
- τα ιδεώδη του P, δηλαδή τα σύνολα $I \subseteq P$ τέτοια ώστε $x \leq_P y \in I \Rightarrow x \in I$
- τα δυϊκά ιδεώδη, ή φίλτρα, του P, δηλαδή τα σύνολα $J \subseteq P$ τέτοια ώστε $y \geq_P x \in J \Rightarrow y \in J$.



διάστημα ιδεώδες φίλτρο

'ένα υποσύνολο του P λέγεται αλυσίδα

ή αντιαλυσίδα οποιαδήποτε δύο στοιχεία του είναι μεταξύ τους συγκρίσιμα, ή μεταξύ τους μη συγκρίσιμα, αντίστοιχα. Π.χ. αν

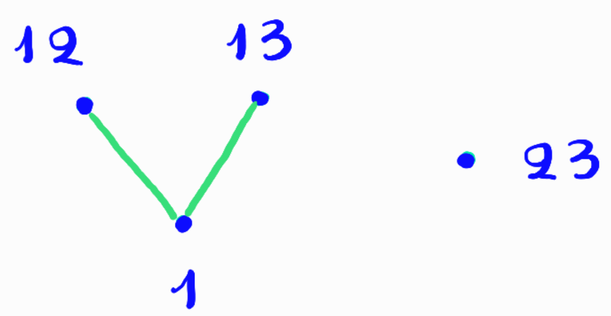
$P = B_3 =$ 

τότε έχουμε

- τις αλυσίδες $\{\varnothing, 3, 23, 123\}$, $\{\varnothing, 123\}$, $\{\varnothing, 12, 123\}$, $\{3, 13, 123\}$

- τις αντιαλυσίδες $\{1, 2, 3\}$, $\{12, 13, 23\}$
- τα ιδεώδη $\{\emptyset, 2, 3\}$, $\{\emptyset, 1, 2, 3, 12\}$
- τα φίλτρα $\{12, 123\}$, $\{2, 12, 13, 23, 123\}$.

Η επαγόμενη μερική διάταξη στο $S = \{1, 12, 13, 23\}$ είναι η

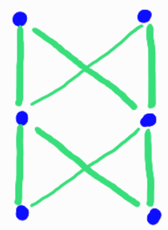


Μια αλυσίδα $C \subseteq P$ λέγεται μεγιστική αν δεν υπάρχει $x \in P \setminus C$ για το οποίο το $C \cup \{x\}$ είναι επίσης αλυσίδα του P.

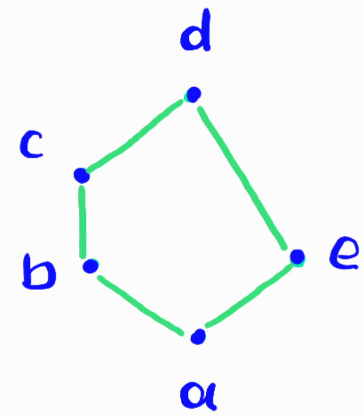
Ορισμός 8.7. Το P λέγεται διαβαθμισμένο (graded) αν όλες οι μεγιστικές αλυσίδες του P έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων $n+1$. Το n λέγεται τάξη του P.

Στην περίπτωση αυτή υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\rho : P \to \mathbb{N}$ (συνάρτηση τάξης) με τις ιδιότητες:

- $\rho(x) = 0$ για κάθε ελαχιστικό στοιχείο $x \in P$,
- αν $x \lessdot y$ είναι σχέση κάλυψης στο P, τότε $\rho(y) = \rho(x) + 1$.
- $\rho(y) = n$ για κάθε μεγιστικό στοιχείο $y \in P$.



διαβαθμισμένο
τάξης 2



μη διαβαθμισμένο

<u>Ορισμός 8.7</u> (συνέχεια) Αν το P είναι διαβαθμισμένο, με συνάρτηση τάξης $\rho : P \to \mathbb{N}$ και $\#\{x \in P : \rho(x) = k\} < \infty$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε η

$$F(P, y) = \sum_{x \in P} y^{\rho(x)}$$

είναι η γεννήτρια συνάρτηση τάξης του P (rank generating function).

Παραδείγματα 8.8.

(α) Η αλυσίδα $P = \mathbf{n}$ είναι διαβαθμισμένη τάξης $n-1$, με $\rho(x) = x-1$ για κάθε $x \in P = [n]$ και συνεπώς

$$F(\mathbf{n}, y) = 1 + y + y^2 + \cdots + y^{n-1}.$$

(β) Η B_n είναι διαβαθμισμένη τάξης n με $\rho(x) = \# x$ για κάθε $x \in B_n = 2^{[n]}$ και

- $$F(B_n, y) = \sum_{S \subseteq [n]} y^{\# S} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k$$

$$= (1+y)^n.$$

(γ) Η Π_n είναι διαβαθμισμένη τάξης $n-1$, με $\rho(x) = n - \#x$ για κάθε $x \in \Pi_n$, και

$$F(\Pi_n, y) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\, y^{n-k}$$

όπου $S(n,k)$ είναι οι αριθμοί Stirling του δεύτερου είδους.

(δ) Το $L_n(q)$ είναι διαβαθμισμένο τάξης n, με $\rho(x) = \dim_{\mathbb{F}_q}(x)$ για κάθε $x \in L_n(q)$ και συνεπώς

$$F(L_n(q), y) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q y^k$$

όπου $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ είναι το πλήθος των υπόχωρων διάστασης k του n-διάστατου χώρου $V_n(q)$.

Πρόταση 8.9.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!}$$

όπου $[n]_q = 1+q+q^2+\dots+q^{n-1}$ και $[n]_q! =$
$= [1]_q [2]_q \cdots [n]_q$.

Απόδειξη Έστω $A_q(n,k)$ το σύνολο των k-άδων $(v_1, v_2, \dots, v_k)$, όπου $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $V_n(q)$. Τότε,

$$\# A_q(n,k) = (q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{k-1}).$$

Πράγματι, έχουμε $\# V_n(q) = q^n$ διότι κάθε $v \in V_n(q)$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως

$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n$$

με $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}_q$, όπου $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ είναι τυχαία διατεταγμένη βάση του $V_n(q)$. Άρα, για να επιλέξουμε το $(v_1, v_2, \ldots, v_k) \in A_q(n,k)$ υπάρχουν

- $q^n - 1$ επιλογές για το $v_1 \in V_n(q) \setminus \{0\}$
- $q^n - q$ επιλογές για το $v_2 \in V_n(q) \setminus \langle v_1 \rangle$

$\vdots$

- $q^n - q^{k-1}$ επιλογές για το $v_k \in V_n(q) \setminus \langle v_1, v_2, \ldots, v_{k-1} \rangle$

όπου με $\langle u_1, u_2, \ldots, u_m \rangle$ συμβολίζουμε τη γραμμική θήκη των $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Επίσης, αφού η $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ είναι διατεταγμένη βάση ενός υπόχωρου W του $V_n(q)$ διάστασης k, υπάρχουν

- $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ επιλογές για το W
- $(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1})$ επιλογές για τη διατεταγμένη βάση $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ του W.

Έπεται ότι,

$$(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1}) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (q^k - 1) \cdots (q^k - q^{k-1})$$

που ήταν το ζητούμενο. ■