7. Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού

Έστω σύνολο I με n στοιχεία και έστω 2^I το δυναμοσύνολο (σύνολο όλων των 2^n υποσυνόλων) του I.

Έστω V ο 2^n-διάστατος $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος των συναρτήσεων $f : 2^I \to \mathbb{C}$.

Θεώρημα 7.1. (Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού)

Έστω $\varphi : V \to V$ ο γραμμικός ενδομορφισμός του V που ορίζεται θέτοντας

$$(\varphi f)(X) = \sum_{X \subseteq Y \subseteq I} f(Y)$$

για κάθε $f \in V$ και κάθε $X \in 2^I$.

Τότε, ο $\varphi : V \to V$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(\varphi^{-1} f)(X) = \sum_{X \subseteq Y \subseteq I} (-1)^{|Y \setminus X|} f(Y)$$

για κάθε $f \in V$ και κάθε $X \in 2^I$.

<u>Απόδειξη</u>. Για $f \in V$ θέτουμε

$$(\psi f)(X) = \sum_{X \subseteq Y \subseteq I} (-1)^{|Y \setminus X|} f(Y)$$

για κάθε $X \in 2^I$. Προφανώς, ο $\psi : V \to V$ είναι γραμμικός ενδομορφισμός, δηλαδή

$$\psi(af + bg) = a\psi(f) + b\psi(g)$$

για όλα τα $f, g \in V$ και $a, b \in \mathbb{C}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $(\psi\varphi)(f) = f$ για κάθε $f \in V$.

Πράγματι, για $f \in V$ και $X \in 2^I$

- $(\psi\varphi)(f)(X) = (\psi(\varphi f))(X)$

$$= \sum_{X \subseteq Y \subseteq I} (-1)^{|Y \setminus X|} (\varphi f)(Y)$$

$$= \sum_{X \subseteq Y \subseteq I} (-1)^{|Y \setminus X|} \sum_{Y \subseteq Z \subseteq I} f(Z)$$

$$= \sum_{X \subseteq Z \subseteq I} f(Z) \sum_{X \subseteq Y \subseteq Z} (-1)^{|Y \setminus X|}.$$

Όμως, αν $m = |Z \setminus X|$, τότε

$$\sum_{X \subseteq Y \subseteq Z} (-1)^{|Y \setminus X|} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{αν } m \geq 1 \\ 1, & \text{αν } m = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{αν } X \subset Z \\ 1, & \text{αν } X = Z. \end{cases}$$

Έπεται ότι

$$(\psi\varphi)(f)(X) = f(X)$$

για κάθε $X \in 2^I$, οπότε $(\psi\varphi)(f) = f$. ∎

Παρατήρηση 7.2. Αλλάζοντας το συμβολισμό και γράφοντας $f_{\geq}$ αντί για $\varphi(f)$, έχουμε δείξει ότι

- $f_{\geq}(X) = \sum_{X \subseteq Y \subseteq I} f(Y)$ για κάθε $X \subseteq I$ $\Leftrightarrow$

$$f(X) = \sum_{X \subseteq Y \subseteq I} (-1)^{|Y \setminus X|} f_{\geq}(Y) \text{ για κάθε } X \subseteq I$$

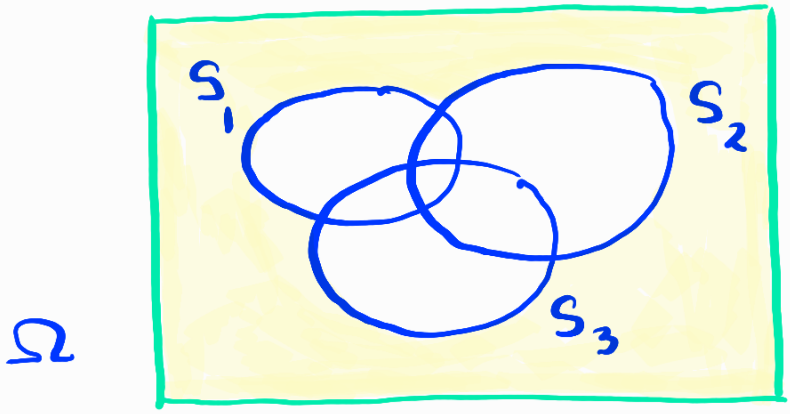
Ομοίως δείχνουμε ότι

- $f_{\leq}(X) = \sum_{Y \subseteq X} f(Y)$ για κάθε $X \subseteq I$ $\Leftrightarrow$

$$f(X) = \sum_{Y \subseteq X} (-1)^{|X \setminus Y|} f_{\leq}(Y) \text{ για κάθε } X \subseteq I.$$

■

Πώς σχετίζονται αυτά με τη συνήθη μορφή της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού; Έστω πεπερασμένο σύνολο Ω και υποσύνολα αυτού $S_1, S_2, \ldots, S_n$.



$$
\begin{aligned}
\#(\Omega - S_1 \cup S_2 \cup S_3) = {} & \#\Omega - \#S_1 - \#S_2 - \#S_3 \\
& + \#S_1 \cap S_2 + \# S_1 \cap S_3 \\
& + \# S_2 \cap S_3 - \# S_1 \cap S_2 \cap S_3
\end{aligned}
$$

Θέτουμε $I = [n]$ και για $X \subseteq I$ συμβολίζουμε με $f(X)$ το πλήθος των στοιχείων του Ω που ανήκουν στο S_i για $i \in X$ αλλά όχι στο S_j για $j \notin X$. Για παράδειγμα,

$$f(\emptyset) = \#\left(\Omega - \bigcup_{i=1}^{n} S_i\right).$$

Τότε, για $X \subseteq I$,

$$f_{\geqslant}(X) := \sum_{X \subseteq Y \subseteq I} f(Y) = \# \bigcap_{i \in X} S_i$$

είναι το πλήθος των στοιχείων του Ω που ανήκουν στο S_i για κάθε $i \in X$ (και πιθανώς και σε άλλα σύνολα S_j).

Από το Θεώρημα 7.1 παίρνουμε

- $$f(X) = \sum_{X \subseteq Y \subseteq I} (-1)^{|Y \setminus X|} f_{\geqslant}(Y)$$
$$= \sum_{X \subseteq Y \subseteq I} (-1)^{|Y \setminus X|} \# \bigcap_{i \in Y} S_i .$$

Θέτοντας $X = \emptyset$ παίρνουμε

- $$\# \left(\Omega - \bigcup_{i=1}^{n} S_i \right) = f(\emptyset)$$

(7.1) $$= \sum_{Y \subseteq [n]} (-1)^{|Y|} \# \bigcap_{i \in Y} S_i .$$

Παράδειγμα 7.3. Έστω $D(n)$ το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_n$ χωρίς σταθερά σημεία. Γενικότερα, για $X \subseteq [n]$ θέτουμε

- $$f(X) = \# \, w \in \mathfrak{S}_n \text{ με } w(i) = i \Leftrightarrow i \in X$$
$$= \# \, w \in \mathfrak{S}_n \text{ με } \mathrm{Fix}(w) = X$$

και

- $f_{\geq}(X) = \# w \in \mathfrak{S}_n$ με $w(i) = i$ για κάθε $i \in X$
$= \# w \in \mathfrak{S}_n$ με $\mathrm{Fix}(w) \supseteq X$.

Τότε, $D(n) = f(\emptyset)$ και

$$f_{\geq}(X) = \sum_{X \subseteq Y \subseteq [n]} f(Y)$$

για κάθε $X \subseteq [n]$. Επιπλέον, $f_{\geq}(Y) = (n-i)!$ για κάθε $Y \subseteq [n]$ με $\# Y = i$.

Από αυτά και την (7.1) συμπεραίνουμε ότι

- $D(n) = f(\emptyset) = \sum_{Y \subseteq [n]} (-1)^{|Y|} f_{\geq}(Y)$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!$$

$$= n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

$$= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right). \blacksquare$$

Παράδειγμα 7.4. Ας υπολογίσουμε ξανά το πλήθος $S(n,k)$ των διαμερίσεων του $[n]$ με k μέρη. Αν $a(n,k)$ είναι το πλήθος των διατεταγμένων διαμερίσεων του

$[n]$ με k μέρη, τότε

$$a(n,k) = k!\, S(n,k)$$

και επομένως αρκεί να υπολογίσουμε το $a(n,k)$. Ας θεωρήσουμε τις k^n ασθενείς διατεταγμένες διαμερίσεις

$$\pi = (B_1, B_2, \ldots, B_k)$$

του $[n]$ με k μέρη. Για $X \subseteq [k]$ θέτουμε

- $f(X) = \#\, \pi$ με $B_i = \emptyset \iff i \in X$
- $f_{\geq}(X) = \#\, \pi$ με $B_i = \emptyset$ για κάθε $i \in X$.

Τότε, $a(n,k) = f(\emptyset)$,

$$f_{\geq}(X) = \sum_{X \subseteq Y \subseteq [k]} f(Y)$$

για κάθε $X \subseteq [k]$ και $f_{\geq}(Y) = (k-i)^n$ για κάθε $Y \subseteq [k]$ με $\# Y = i$.

Από αυτά και την (7.1) προκύπτει ότι

- $$a(n,k) = f(\emptyset) = \sum_{Y \subseteq [k]} (-1)^{|Y|} f_{\geq}(Y)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$$

και συνεπώς ότι

- $$S(n,k) = \frac{1}{k!}\, a(n,k)$$
$$= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

(Πόρισμα 5.7).

Παράδειγμα 7.5. Υπενθυμίζουμε ότι για μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_n$

$$\mathrm{Des}(w) = \{ i \in [n-1] : w(i) > w(i+1) \}$$

είναι το σύνολο των καθόδων της w. Πόσες $w \in \mathfrak{S}_n$ έχουν δοσμένο σύνολο καθόδων S; Θέτουμε

$$\beta_n(S) = \#\{w \in \mathfrak{S}_n : \mathrm{Des}(w) = S\}$$

για $S \subseteq [n-1]$. Π.χ. για $n=4$ και $S=\{2\}$ έχουμε $\beta_n(S) = 5$ διότι οι

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{matrix}$$

είναι όλες οι μεταθέσεις $w \in \mathfrak{S}_4$ με μόνη κάθοδο το $i=2$.

Για να υπολογίσουμε το $\beta_n(S)$ θέτουμε

$$\alpha_n(S) = \#\{ w \in \mathfrak{S}_n : \mathrm{Des}(w) \subseteq S \}$$

για $S \subseteq [n-1]$, οπότε

$$\alpha_n(S) = \sum_{T \subseteq S} \beta_n(T) \qquad (7.2)$$

για κάθε $S \subseteq [n-1]$. Αντιστρέφοντας αυτές τις ισότητες παίρνουμε

$$\beta_n(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S-T|} \alpha_n(T) \qquad (7.3)$$

για κάθε $S \subseteq [n-1]$. Αν $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subseteq [n-1]$ με $s_1 < s_2 < \cdots < s_k$, τότε

• $$\alpha_n(S) = \binom{n}{s_1}\binom{n-s_1}{s_2-s_1}\binom{n-s_2}{s_3-s_2}\cdots$$

$$= \binom{n}{s_1 \;\; s_2-s_1 \cdots n-s_k}$$

$$= \frac{n!}{s_1!\,(s_2-s_1)!\cdots(n-s_k)!}$$

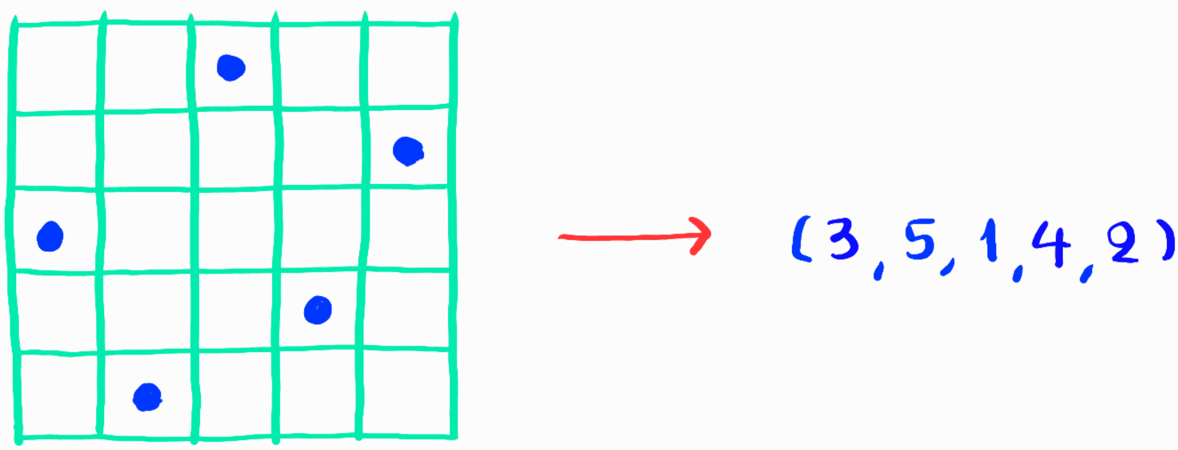
οπότε

$$\beta_n(S) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le k} (-1)^{k-j}\binom{n}{s_{i_1} \;\; s_{i_2}-s_{i_1} \cdots n-s_{i_j}}.$$

■

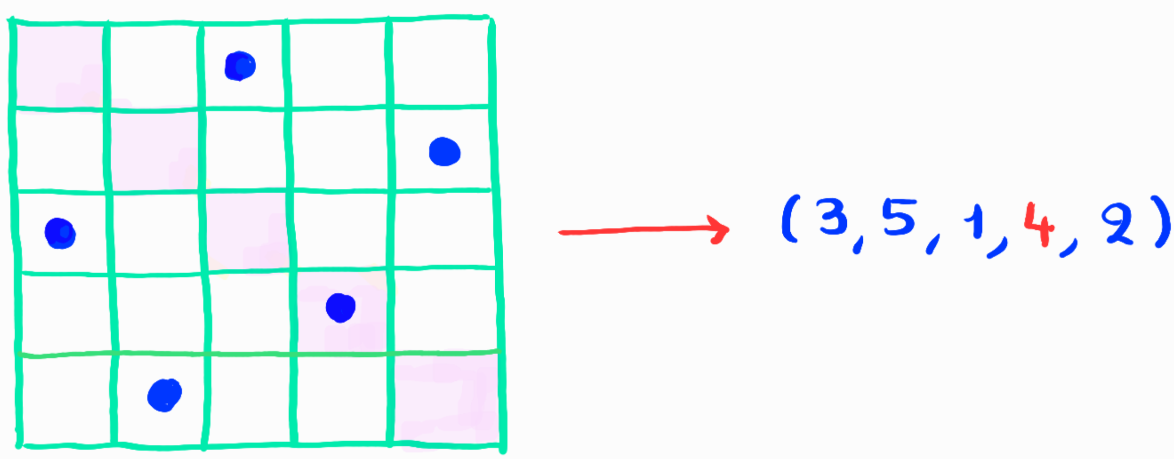
Πιόνια στη σκακιέρα.

Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν n όμοια πιόνια στα τετράγωνα μιας $n \times n$ σκακιέρας, έτσι ώστε διαφορετικά πιόνια να βρίσκονται σε διαφορετικές γραμμές και στήλες;



Υπάρχει μια εμφανής 1-1 αντιστοιχία μεταξύ αυτών των τοποθετήσεων και των αναδιατάξεων του $[n]$ και επομένως η απάντηση είναι $n!$

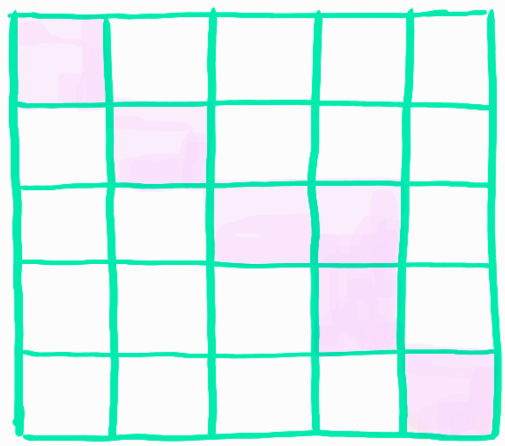
Με την αντιστοιχία αυτή, τα σταθερά σημεία μιας αναδιάταξης αντιστοιχούν στα πιόνια της αντίστοιχης τοποθέτησης που βρίσκονται επί της κύριας διαγωνίου της σκακιέρας.



Ειδικότερα, το $D(n)$ ισούται με το πλήθος εκείνων των τοποθετήσεων που δεν έχουν κανένα πιόνι επί της κύριας διαγωνίου.

Γενικότερα, έστω $\mathcal{B}$ ένα υποσύνολο του συνόλου των τετραγώνων μιας $n \times n$ σκακιέρας.

$\mathcal{B}$



Ερώτημα. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε n όμοια πιόνια στα τετράγωνα της $n \times n$ σκακιέρας, ανά δύο σε διαφορετικές γραμμές και στήλες, έτσι ώστε ακριβώς i πιόνια να βρίσκονται σε τετράγωνα της $\mathcal{B}$;

Έστω N_i το πλήθος αυτών των τοποθετήσεων και έστω

$$N_{\mathcal{B}}(x) = \sum_{i \geq 0} N_i x^i.$$

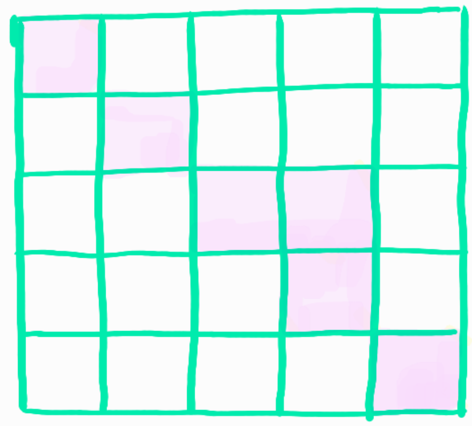
Πρόταση 7.6.

$$N_{\mathcal{B}}(x) = \sum_{k=0}^{n} r_k (n-k)! \, (x-1)^k,$$

όπου για $0 \leq k \leq n$, $r_k = r_k(\mathcal{B})$ είναι το πλήθος των τοποθετήσεων k όμοιων πιονιών επί των τετραγώνων της $\mathcal{B}$, ανά δύο σε διαφορετικές γραμμές και διαφορετικές στήλες. Ειδικότερα,

$$N_{\mathcal{B}}(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k r_k (n-k)!$$

Π.χ. για

$\mathcal{B} =$ 

έχουμε $r_0 = 1$, $r_1 = 6$, $r_2 = 13$, $r_3 = 13$, $r_4 = 6$ και $r_5 = 1$ και συνεπώς

$$N_{\mathcal{B}}(x) = 33 + 47x + 26x^2 + 12x^3 + x^4 + x^5.$$

<u>Απόδειξη της</u> <u>Πρότασης 7.6</u>. Θεωρούμε τις τοποθετήσεις n όμοιων πιονιών στην $n \times n$ σκακιέρα, ανά δύο σε διαφορετικές γραμμές και στήλες.

Έστω $\mathcal{T}_n$ το σύνολο αυτό και για $X \subseteq \mathcal{B}$ έστω

- $f(X) = \#\{\tau \in \mathcal{T}_n : \tau \cap \mathcal{B} = X\}$
- $f_{\geqslant}(X) = \#\{\tau \in \mathcal{T}_n : \tau \cap \mathcal{B} \supseteq X\}$.

Τότε,

$$f_{\geqslant}(X) = \sum_{X \subseteq Y \subseteq \mathcal{B}} f(Y), \qquad X \subseteq \mathcal{B}$$

και

$$N_i = \sum_{\substack{X \subseteq \mathcal{B} \\ |X| = i}} f(X).$$

Από την (7.1) έχουμε

$$f(X) = \sum_{X \subseteq Y \subseteq \mathcal{B}} (-1)^{|Y \setminus X|} f_{\geq}(Y)$$

και συνεπώς

- $$N_i = \sum_{\substack{X \subseteq \mathcal{B} \\ |X| = i}} \sum_{X \subseteq Y \subseteq \mathcal{B}} (-1)^{|Y \setminus X|} f_{\geq}(Y)$$

$$= \sum_{Y \subseteq \mathcal{B}} f_{\geq}(Y) \sum_{\substack{X \subseteq Y \\ |X| = i}} (-1)^{|Y \setminus X|}$$

$$= \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{Y \subseteq \mathcal{B} \\ |Y| = k}} f_{\geq}(Y) \sum_{\substack{X \subseteq Y \\ |X| = i}} (-1)^{|Y \setminus X|}$$

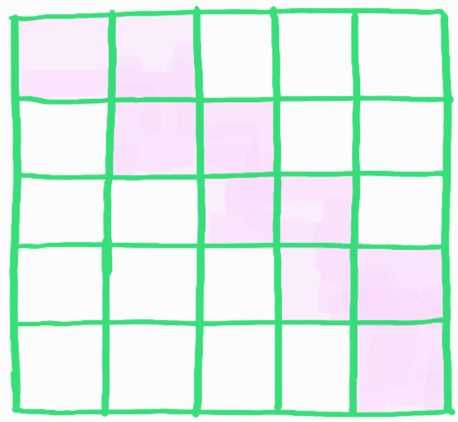
$$= \sum_{k \geq 0} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \sum_{\substack{Y \subseteq B \\ |Y| = k}} f_{\geq}(Y)$$

$$= \sum_{k \geq 0} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} r_k (n-k)!$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} r_k (n-k)!$$

$$= [x^i] \sum_{k=0}^{n} r_k (n-k)! (x-1)^k . \blacksquare$$

<u>Παράδειγμα 7.7.</u> Έστω ότι η B αποτελείται από τα τετράγωνα της κύριας διαγωνίου και εκείνης ακριβώς από πάνω:



Αφήνεται ως άσκηση να δείξετε ότι στην περίπτωση αυτή

$$r_k(\mathcal{B}) = \binom{2n-k}{k}$$

για $0 \leq k \leq n$. Από την Πρόταση 7.6 συμπεραίνουμε ότι

- $N_{\mathcal{B}}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{k} (n-k)! \, (x-1)^k$
- $N_{\mathcal{B}}(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n-k}{k} (n-k)!$

Το $N_{\mathcal{B}}(0)$ ισούται με το πλήθος των αναδιατάξεων $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ του $[n]$ με $\sigma_i \neq i, i+1$ για $i \in [n]$.