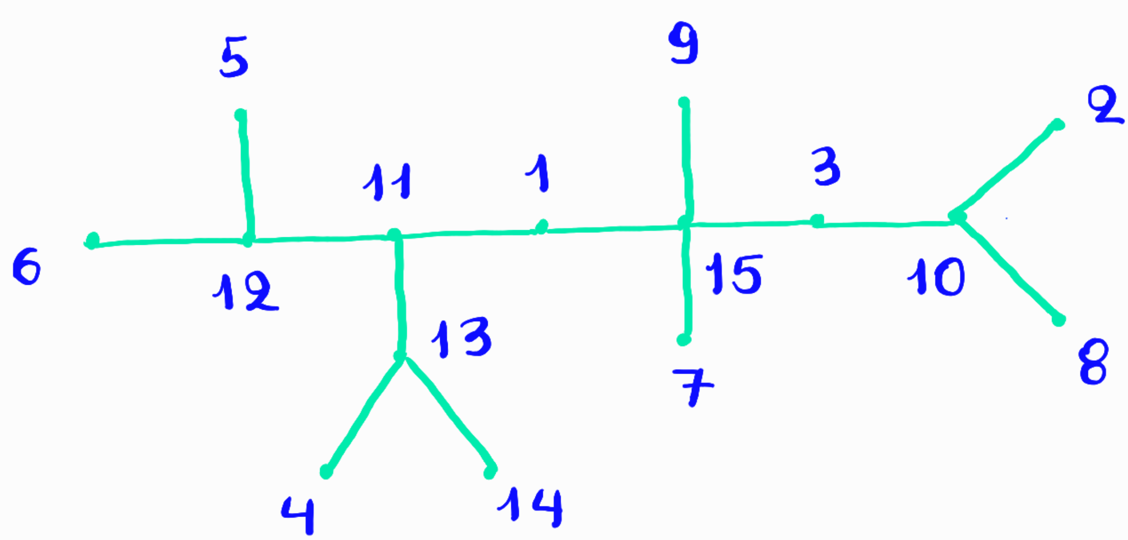
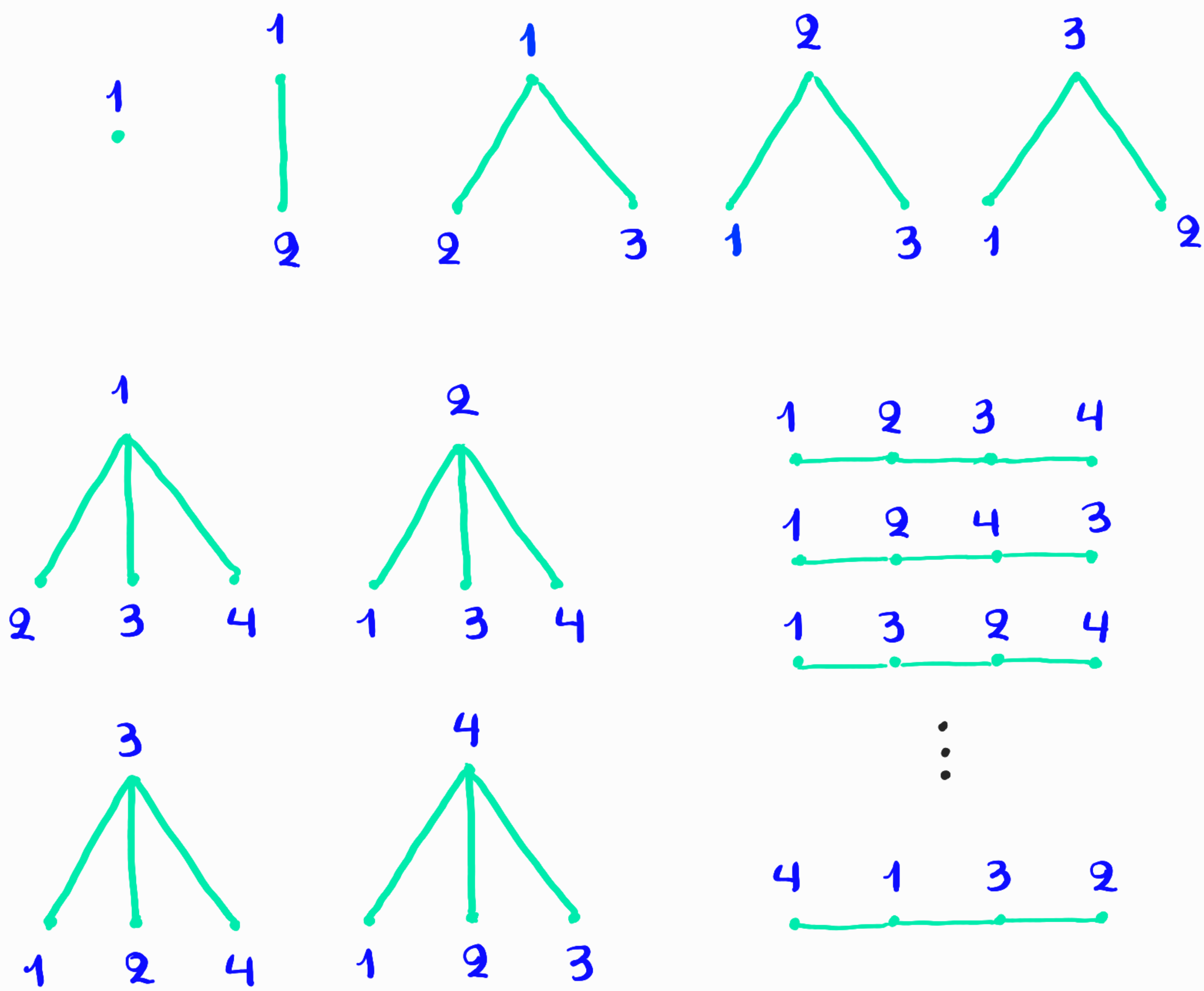
6. Αντιστροφή Lagrange

Έστω σύνολο V με n στοιχεία. Δένδρο επί του V λέγεται κάθε απλό γράφημα με σύνολο κορυφών V το οποίο είναι συνεκτικό και περιέχει ακριβώς $n-1$ ακμές. Π.χ. το

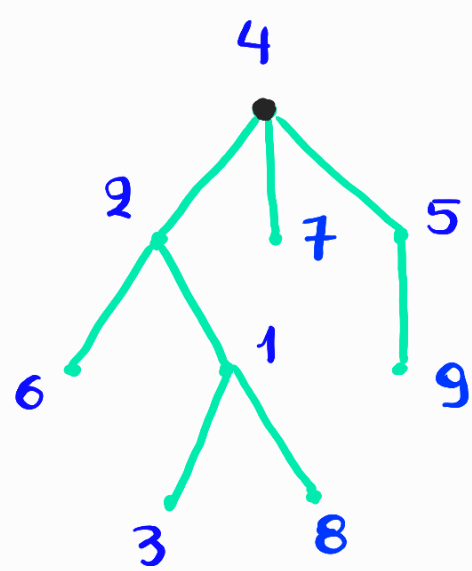


είναι δένδρο επί του $V = [15]$.

Έστω $t(n)$ το πλήθος των δένδρων επί του συνόλου κορυφών $[n]$. Έχουμε $t(1) = t(2) = 1$, $t(3) = 3$, $t(4) = 16$ και $t(5) = 125$.



Θα δείξουμε ότι $t(n) = n^{n-2}$ για κάθε n.
Δένδρο με ρίζα (ή ριζωμένο δένδρο) επί του V λέγεται ένα δένδρο επί του V το οποίο έχει μια διακεκριμένη κορυφή, τη ρίζα. Π.χ. το

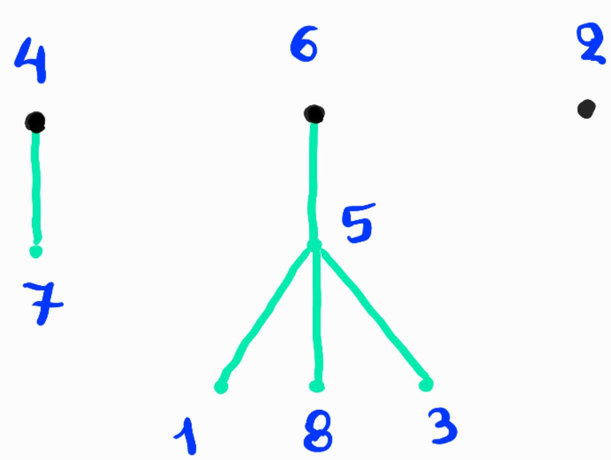


είναι δένδρο επί του [9] με ρίζα το 4.
Προφανώς

$$r(n) = n \cdot t(n) \qquad (6.1)$$

όπου $r(n)$ είναι το πλήθος των δένδρων με ρίζα επί του $[n]$.

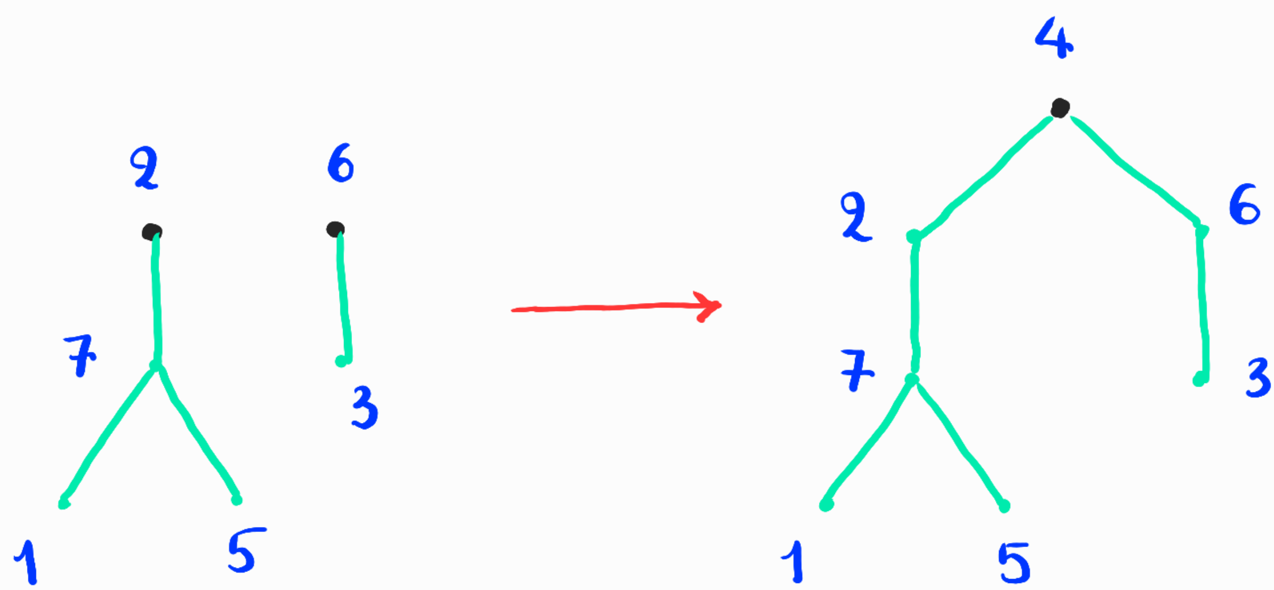
Η ξένη ένωση δένδρων (με ρίζα) λέγεται δάσος (με ρίζες). Π.χ. το



είναι δάσος με ρίζες επί του συνόλου κορυφών $[8]$. Αν $p(n)$ είναι το πλήθος των δασών με ρίζες επί του $[n]$, τότε

$$r(n) = n\,p(n-1). \tag{6.2}$$

Πράγματι, αφαιρώντας τη ρίζα $k \in [n]$ από ένα ριζωμένο δένδρο επί του $[n]$ προκύπτει δάσος με ρίζες (οι γειτονικές κορυφές του k) επί του συνόλου των κορυφών $[n] \setminus \{k\}$, το καθένα ακριβώς μία φορά.



Πρόταση 6.1. Αν $R(x) = \sum_{n \geq 1} r(n) x^n / n!$, τότε

$$R(x) = x \exp(R(x)) \qquad (6.3)$$

Απόδειξη. Από τον Εκθετικό Τύπο παίρνουμε

$$\exp(R(x)) = \sum_{n\geq 0} p(n) \frac{x^n}{n!}$$

όπου $p(0) := 1$. Κατά συνέπεια,

- $$x \exp(R(x)) = \sum_{n\geq 0} p(n) \frac{x^{n+1}}{n!}$$

$$= \sum_{n\geq 1} p(n-1) \frac{x^n}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n\geq 1} n\, p(n-1) \frac{x^n}{n!} = R(x),$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω της (6.2). ∎

Θέτοντας $y = R(x)$, η (6.3) γράφεται ισοδύναμα

$$x = y e^{-y},$$

το οποίο σημαίνει ότι η $y = R(x)$ είναι η αντίστροφη της xe^{-x} ως προς την πράξη της σύνθεσης (compositional inverse).

Ορισμός 6.2. Έστω

$$F(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n \in x\,\mathbb{C}[[x]].$$

Αντίστροφη της $F(x)$ ως προς τη σύνθεση λέγεται κάθε τυπική δυναμοσειρά $G(x) \in x\,\mathbb{C}[[x]]$ τέτοια ώστε

$$F(G(x)) = G(F(x)) = x.$$

Π.χ. αν $F(x) = \sum_{n \geq 1} x^n = x/(1-x)$, έχουμε

- $F(y) = x \iff y = x/(1+x)$.

Η $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ είναι αντιστρέψιμη ως προς τη σύνθεση και μοναδική αντίστροφή της είναι η

$$G(x) = \frac{x}{1+x} = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} x^n.$$

__Πρόταση 6.3.__ Για την τυπική δυναμοσειρά $F(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n \in x\,\mathbb{C}[[x]]$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η $F(x)$ είναι αντιστρέψιμη ως προς τη σύνθεση.

(ii) Υπάρχει $G(x) \in x\,\mathbb{C}[[x]]$ τέτοια ώστε $F(G(x)) = x$.

(iii) Υπάρχει $G(x) \in x\,\mathbb{C}[[x]]$ τέτοια ώστε $G(F(x)) = x$.

(iv) $a_1 \neq 0$.

<u>Απόδειξη</u> Θέτοντας $G(x) = \sum_{n\geq 1} b_n x^n$, έχουμε

- $$\begin{aligned} F(G(x)) &= \sum_{n\geq 1} a_n \, (G(x))^n \\ &= \sum_{n\geq 1} a_n (b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots)^n \\ &= a_1 b_1 x + (a_1 b_2 + a_2 b_1^2) x^2 + \cdots \end{aligned}$$

και συνεπώς η ισότητα $F(G(x)) = x$ είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{cases} a_1 b_1 & = 1 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1^2 & = 0 \\ a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3 & = 0 \\ \quad\vdots & \\ a_1 b_n + \cdots + a_n b_1^n & = 0 \end{cases}$$

$$\vdots$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση $(b_1, b_2, \dots)$ αν και μόνο αν $a_1 \neq 0$. Αυτό δείχνει ότι (ii) $\Leftrightarrow$ (iv). Ομοίως προκύπτει ότι (iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Οι συνεπαγωγές (i) $\Rightarrow$ (ii) και (i) $\Rightarrow$ (iii) είναι τετριμμένες.

Μένει να δείξουμε ότι (ii), (iii) $\Rightarrow$ (i)

Πράγματι, έστω ότι υπάρχουν $G(x)$, $H(x)$ $\in x\,\mathbb{C}[[x]]$ τέτοιες ώστε $F(G(x)) = x$ και $H(F(x)) = x$. Τότε,

$$G(x) = H(F(G(x))) = H(x)$$

και συνεπώς η $F(x)$ είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφη την $G(x) = H(x)$. ∎

<u>Συμβολισμός</u> Η μοναδική αντίστροφη, ως προς τη σύνθεση, της $F(x)$, όταν υπάρχει, συμβολίζεται με $F^{\langle -1 \rangle}(x)$.

Π.χ. λύνοντας την $F(y) = x$ βρίσκουμε ότι

- $(e^x - 1)^{\langle -1 \rangle} = \log(1+x)$

- $\left(\dfrac{x}{1-ax}\right)^{\langle -1 \rangle} = \dfrac{x}{1+ax}$.

Ο τύπος αντιστροφής του Lagrange δίνει έναν τρόπο να υπολογιστούν οι συντελεστές την $F^{\langle -1 \rangle}(x)$ και, γενικότερα, κάθε δύναμης $(F^{\langle -1 \rangle}(x))^k$.

Θεώρημα 6.4. (Αντιστροφή Lagrange)

Έστω $F(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n \in x\mathbb{C}[[x]]$ με $a_1 \neq 0$.

Για $k, n \in \mathbb{Z}$

$$n\,[x^n]\,(F^{\langle -1 \rangle}(x))^k = k\,[x^{n-k}]\left(\frac{x}{F(x)}\right)^n.$$

Ισοδύναμα, αν $G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ με $G(0) \neq 0$ και η $f(x) \in x\,\mathbb{C}[[x]]$ ορίζεται από την

$$f(x) = x\, G(f(x)),$$

τότε

$$n\,[x^n]\,(f(x))^k = k\,[x^{n-k}]\,(G(x))^n.$$

Παρατήρηση 6.5. Οι δύο μορφές του θεωρήματος είναι ισοδύναμες διότι για $G(x) = x/F(x)$ έχουμε

$$f(x) = x\,G(f(x)) \iff f(x) = F^{\langle -1 \rangle}(x).$$

Πόρισμα 6.6. (Τύπος Cayley - Sylvester)

Έχουμε $r(n) = n^{n-1}$ και $t(n) = n^{n-2}$ για $n \geq 1$.

Απόδειξη. Στην Πρόταση 6.1 δείξαμε ότι αν $R(x) = \sum_{n\geq 1} r(n)\, x^n / n!$, τότε

$$R(x) = (x e^{-x})^{\langle -1 \rangle}.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 6.4 για $F(x) = x e^{-x}$ παίρνουμε

$$\frac{r(n)}{n!} = [x^n]\, R(x) = [x^n]\, F^{\langle -1 \rangle}(x)$$

$$= \frac{1}{n} [x^{n-1}] \left(\frac{x}{F(x)} \right)^n = \frac{1}{n} [x^{n-1}]\, e^{nx}$$

$$= \frac{1}{n} [x^{n-1}] \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} n^m x^m$$

$$= n^{n-1} / n!.$$

Έπεται ότι $r(n) = n^{n-1}$ και επομένως ότι $t(n) = r(n)/n = n^{n-2}$ για $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. ■

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.4. Κρίσιμη παρατήρηση: αν

$$y = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n x^n$$

είναι τυπική δυναμοσειρά Laurent, τότε $[x^{-1}]\, y' = 0$. Έστω

$$(F^{\langle -1 \rangle}(x))^k = \sum_{i \geq k} p_i x^i,$$

οπότε

$$x^k = \sum_{i \geq k} p_i \,(F(x))^i.$$

Παραγωγίζοντας ως προς x παίρνουμε

$$k x^{k-1} = \sum_{i \geq k} i p_i F'(x) (F(x))^{i-1}$$

η, ισοδύναμα,

$$\frac{k x^{k-1}}{(F(x))^n} = \sum_{i \geq k} i p_i F'(x) (F(x))^{i-n-1} . \qquad (6.4)$$

Τα δύο μέλη νοούνται ως τυπικές δυναμοσειρές με πεπερασμένου πλήθους μονώνυμα με αρνητικούς εκθέτες, π.χ.

$$\frac{k x^{k-1}}{(F(x))^n} = \frac{k x^{k-1}}{(a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^n} = \frac{k x^{k-n-1}}{(a_1 + a_2 x + \cdots)^n} .$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του x^{-1} στα δύο μέλη της (6.4) βρίσκουμε ότι το

$$k\,[x^{-k}]\,(F(x))^{-n} = k\,[x^{n-k}]\left(\frac{x}{F(x)}\right)^{n}$$

από το αριστερό μέλος είναι ίσο με

$$n p_n\,[x^{-1}]\,F'(x)\cdot(F(x))^{-1}$$

διότι

- $$[x^{-1}]\,F'(x)\,(F(x))^{i-n-1} = \frac{[x^{-1}]}{i-n}\,\frac{d}{dx}\,(F(x))^{i-n}$$

$$= 0$$

για $i \neq n$, σύμφωνα με την αρχική μας παρατήρηση. Τέλος, υπολογίζουμε ότι

- $n p_n [x^{-1}] F'(x)(F(x))^{-1} =$

$$= n p_n [x^{-1}] \frac{a_1 + 2a_2 x + \cdots}{a_1 x + 2a_2 x^2 + \cdots}$$

$$= n p_n [x^0] \frac{a_1 + 2a_2 x + \cdots}{a_1 + a_2 x + \cdots}$$

$$= n p_n$$

$$= n [x^n] \left(F^{\langle -1 \rangle}(x)\right)^k. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 6.7. Ας βρούμε τις τυπικές δυναμοσειρές $y = G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$y^p - y + x = 0 \qquad (6.5)$$

όπου $p \geq 2$ είναι ακέραιος.

Παρατηρούμε ότι (6.5) $\Leftrightarrow$ $y - y^p = x$ $\Leftrightarrow$ $F(G(x)) = x$, όπου $F(x) = x - x^p$. Άρα, $G(x) = F^{\langle -1 \rangle}(x)$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 6.4 και την ταυτότητα

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{k} x^n$$

του Παραδείγματος 2.14 βρίσκουμε ότι

- $$[x^n]\, G(x) = \frac{1}{n} [x^{n-1}] \left(\frac{x}{F(x)} \right)^n$$

$$= \frac{1}{n} [x^{n-1}] \, (1 - x^{p-1})^{-n}$$

$$= \frac{1}{n} [x^{n-1}] \sum_{m \geq 0} \binom{m+n-1}{m} x^{(p-1)m}$$

για $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ και συνεπώς ότι

$$G(x) = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{(p-1)m+1} \binom{pm}{m} x^{(p-1)m+1}.$$

Γενικότερα,

- $$[x^n]\,(G(x))^k = \frac{k}{n}\,[x^{n-k}]\left(\frac{x}{F(x)}\right)^n$$

$$= \frac{k}{n}\,[x^{n-k}] \sum_{m \geq 0} \binom{m+n-1}{m} x^{(p-1)m}$$

και συνεπώς

$$(G(x))^k = \sum_{m \geq 0} \frac{k}{(p-1)m+k} \binom{pm+k-1}{m} x^{(p-1)m+k}.$$

Παράδειγμα 6.8. Έστω C_n το πλήθος των τριγωνισμών ενός κυρτού πολυγώνου με $n+2$ κορυφές και έστω

$$C(x) = \sum_{n\geq 0} C_n x^n = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + \cdots$$

Στο Παράδειγμα 3.14 δείξαμε ότι

$$C(x) = 1 + x\,(C(x))^2.$$

Θέτοντας $f(x) = C(x) - 1 = \sum_{n\geq 1} C_n x^n$, η προηγούμενη ισότητα γράφεται

- $$f(x) = x\,(1+f(x))^2 \iff$$
  $$f(x) = x\,G(f(x)),$$

όπου $G(x) = (1+x)^2$. Από τη δεύτερη μορφή του Θεωρήματος 6.4 συμπεραίνουμε ότι

- $$C_n = [x^n]\, f(x) = \frac{1}{n} [x^{n-1}]\, (G(x))^n$$
$$= \frac{1}{n} [x^{n-1}]\, (1+x)^{2n} = \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1}$$
$$= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Επιπλέον, για κάθε $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ παίρνουμε

- $$[x^n]\, (f(x))^k = \frac{k}{n} [x^{n-k}]\, (G(x))^n$$
$$= \frac{k}{n} [x^{n-k}]\, (1+x)^{2n}$$
$$= \frac{k}{n} \binom{2n}{n-k}$$

για $n \geq 1$. Δείξαμε την ταυτότητα

$$\Big(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n\Big)^k = \sum_{n\geq k} \frac{k}{n}\binom{2n}{n-k} x^n.$$

Αφού το αριστερό μέλος γράφεται ως $(C(x)-1)^k = (xC(x)^2)^k = x^k(C(x))^{2k}$, προκύπτει επίσης η ταυτότητα

$$\Big(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n\Big)^{2k} = \sum_{n\geq 0} \frac{k}{n+k}\binom{2n+2k}{n} x^n.$$

■

Πόρισμα 6.9. Αν $p_k(n)$ είναι το πλήθος των ριζωμένων δασών επί του συνόλου κορυφών $[n]$ με k συνεκτικές συνιστώσες, τότε,

$$p_k(n) = k \binom{n}{k} n^{n-k-1}.$$

Απόδειξη. Έστω πάλι $R(x) = \sum_{n \geq 1} r(n) \frac{x^n}{n!}$ και $F(x) = x e^{-x}$.

Από την Πρόταση 5.3 έχουμε

$$\frac{1}{k!} (R(x))^k = \sum_{n \geq 1} p_k(n) \frac{x^n}{n!}$$

και συνεπώς

- $p_k(n) = \frac{n!}{k!} [x^n] (R(x))^k$

$$= \frac{n!}{k!} [x^n] (F^{\langle -1 \rangle}(x))^k$$

$$= \frac{n!}{k!} \cdot \frac{k}{n} [x^{n-k}] \left(\frac{x}{F(x)} \right)^n$$

$$= \frac{n!}{k!} \cdot \frac{k}{n} [x^{n-k}] e^{nx}$$

$$= \frac{n!}{k!} \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{n^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= k \binom{n}{k} n^{n-k-1}. \quad \blacksquare$$