5. Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις

Για $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ (ισοδύναμα, για ακολουθία $f(0), f(1), f(2), \ldots$ μιγαδικών αριθμών γράφουμε

$$E_f(x) = \sum_{n \geq 0} f(n) \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{C}[[x]]$$

για την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της f. Π.χ. αν $f(n) = 2^n$, $g(n) = n!$ και $h(n) = 2^n n!$ για $n \in \mathbb{N}$, τότε

- $$E_f(x) = \sum_{n \geq 0} 2^n \frac{x^n}{n!} = e^{2x}$$

- $E_g(x) = \sum_{n\geq 0} n! \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1-x}$

- $E_h(x) = \sum_{n\geq 0} 2^n n! \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} (2x)^n$

$$= \frac{1}{1-2x}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$$

στο $\mathbb{C}[[x]]$, όπου

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Θέτοντας

- $a_n = f(n)/n!$
- $b_n = g(n)/n!$

για $n \in \mathbb{N}$ προκύπτει ο κανόνας

$$E_f(x)\, E_g(x) = \sum_{n \geq 0} h(n) \frac{x^n}{n!}$$

όπου

- $$h(n) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{f(k)}{k!} \cdot \frac{g(n-k)}{(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k)\, g(n-k) \qquad (5,1)$$

Πρόταση 5.1. Δοσμένων των $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ ορίζουμε την $h : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ από τον τύπο

$$h(\#X) = \sum_{(S,T)} f(\#S)\, g(\#T),$$

όπου X είναι πεπερασμένο σύνολο και το άθροισμα στο δεξιό μέλος διατρέχει τις ασθενείς διατεταγμένες διαμερίσεις (S,T) του X, δηλαδή τα ζεύγη (S,T) υποσυνόλων $S, T \subseteq X$ με $S \cap T = \varnothing$ και $S \cup T = X$. Τότε,

$$E_h(x) = E_f(x)\, E_g(x).$$

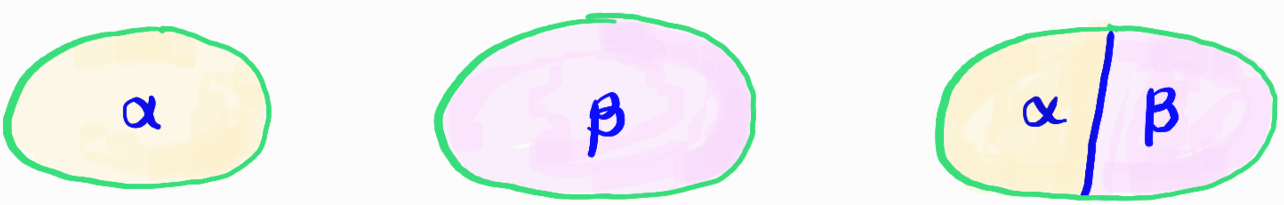
Απόδειξη. Έστω $\#X = n$. Υπάρχουν $\binom{n}{k}$

ζεύγη (S, T) με $\#S = k$ και $\#T = n-k$, οπότε

$$h(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k)\, g(n-k),$$

σε συμφωνία με την (5.1). ■

Σχηματικά,



"α δομές" "β δομές" "α/β δομές"

αν οι f και g απαριθμούν κάποιες α και β δομές στο X, αντίστοιχα, τότε η h απαριθμεί α/β δομές, δηλαδή ασθενείς διαμερίσεις (S,T) του X με μια α δομή στο S και μια β δομή στο T.

Παράδειγμα 5.2. Για σύνολο X με $\# X = n$, έστω $h(n)$ το πλήθος των τρόπων να χωρίσουμε το X σε υποσύνολα S, T με $S \cap T = \emptyset$ και $S \cup T = X$ και να επιλέξουμε μια αναδιάταξη του S και ένα υποσύνολο του T.

Υπάρχουν $f(k) = k!$ τρόποι να αναδιατάξει κανείς ένα σύνολο με k στοιχεία και $g(k) = 2^k$ τρόποι να επιλέξει ένα υποσύνολό του. Από αυτά και την Πρόταση 5.1 προκύπτει ότι

- $$\sum_{n \geq 0} h(n) \frac{x^n}{n!} = \left(\sum_{n \geq 0} f(n) \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \geq 0} g(n) \frac{x^n}{n!} \right)$$

$$= \left(\sum_{n \geq 0} x^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} 2^n \frac{x^n}{n!} \right)$$

$$= \frac{e^{2x}}{1-x}. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 5.3. Για απεικόνιση $\varphi : X \to X$ συμβολίζουμε με

$$\mathrm{Fix}(\varphi) = \{ x \in X : \varphi(x) = x \}$$

το σύνολο των σταθερών σημείων της φ. Θα υπολογίσουμε το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_n$ με $\mathrm{Fix}(w) = \emptyset$.

Παρατηρούμε ότι κάθε $w \in \mathfrak{S}_n$ ορίζει την ασθενή διαμέριση (S, T) του $[n]$ με

- $S = \{ i \in [n] : w(i) \neq i \}$
- $T = \{ j \in [n] : w(j) = j \}$.

Ορίζουμε τις $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ έτσι ώστε για κάθε πεπερασμένο σύνολο X,

- $f(\#X) = \# \{ w \in \mathfrak{S}(X) : \mathrm{Fix}(w) = \emptyset \}$
- $g(\#X) = \# \{ w : X \to X : \mathrm{Fix}(w) = X \}$
- $h(\#X) = \# \, \mathfrak{S}(X)$,

όπου $\mathfrak{S}(X)$ είναι το σύνολο όλων των μεταθέσεων $w : X \to X$. Για τις f, g και h ισχύει η υπόθεση της Πρότασης 5.1, οπότε

$$E_f(x)\, E_g(x) = E_h(x).$$

Αφού προφανώς $g(n)=1$ και $h(n)=n!$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, έχουμε

- $E_g(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$

- $E_h(x) = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$

οπότε

$$\sum_{n\geq 0} f(n)\frac{x^n}{n!} = E_f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Γράφοντας

$$\frac{e^{-x}}{1-x} = \left(\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0} n!\,\frac{x^n}{n!}\right)$$

προκύπτει ο γνωστός τύπος

- $$g(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)!$$

$$= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

για το πλήθος των $w \in \mathfrak{S}_n$ χωρίς σταθερά σημεία.

Πρόταση 5.4 Δοσμένων των $f_1, f_2, \dots, f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, ορίζουμε την $h : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ θέτοντας

- $$h(\#X) = \sum_{(S_1, \dots, S_k)} f_1(\#S_1) \cdots f_k(\#S_k)$$

για πεπερασμένο σύνολο X, όπου το άθροισμα διατρέχει όλες τις ασθενείς διατεταγμένες διαμερίσεις $(S_1, S_2, \dots, S_k)$ του X, δηλαδή $S_i \cap S_j = \emptyset$ για $i \neq j$ και $X = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$. Τότε,

$$E_h(x) = \prod_{i=1}^{k} E_{f_i}(x).$$

Απόδειξη. Άμεση με επαγωγή στο k, δεδομένης της Πρότασης 5.1 (περίπτωση $k=2$). ■

Π.χ. αν $f_i(n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $i \in [k]$, τότε $E_{f_i}(x) = e^x$ για κάθε i και συνεπώς

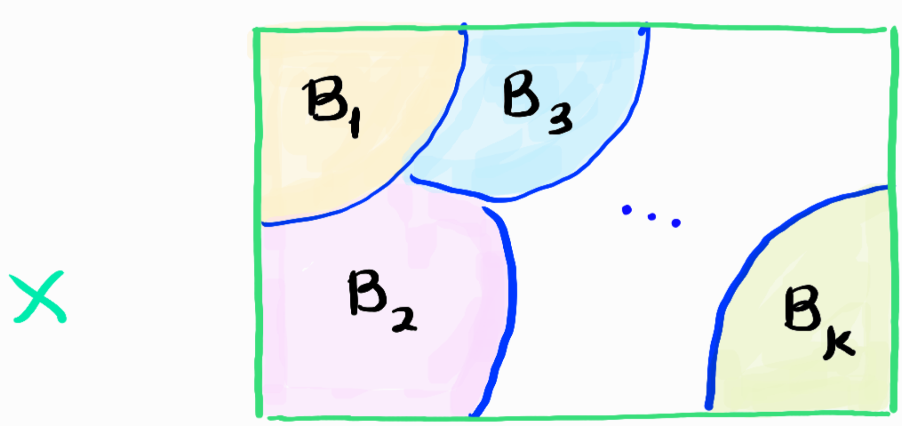
- $$\sum_{n \geq 0} h(n) \frac{x^n}{n!} = \prod_{i=1}^{k} E_{f_i}(x) = e^{kx}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{k^n x^n}{n!}.$$

Άρα, $h(n) = k^n$ για $n \in \mathbb{N}$, όπως θα περίμενε κανείς.

Ορισμός 5.5. Διαμέριση συνόλου X λέγεται κάθε σύνολο $\pi = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ ξένων ανά δύο, μη κενών υποσυνόλων του X με $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k = X$.

Τα υποσύνολα B_i λέγονται μέρη της π. Συμβολίζουμε με $\Pi(X)$ το σύνολο όλων των διαμερίσεων του X.



π.χ. για $X = \{a, b, c\}$ έχουμε τις διαμερίσεις

- $\{abc\}$
- $\{ab, c\}$, $\{ac, b\}$, $\{bc, a\}$
- $\{a, b, c\}$

όπου $abc \cdots = \{a, b, c, \ldots\}$ για συντομία.

Συμβολίζουμε με $B(n)$ και με $S(n,k)$ το πλήθος των διαμερίσεων του $[n]$ και εκείνων με ακριβώς k μέρη, αντίστοιχα (αριθμοί Bell και Stirling του δεύτερου είδους). Π.χ.

- $B(3) = 5$,
- $S(3,1) = 1$, $S(3,2) = 3$, $S(3,3) = 1$.

Πρόταση 5.6. Έχουμε

$$\sum_{n\geq 0} S(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^x-1)^k \qquad (5.2)$$

για $k\in\mathbb{N}$ και

$$\sum_{n\geq 0} B(n)\frac{x^n}{n!} = e^{e^x-1}. \qquad (5.3)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις $f_1, f_2, \dots, f_k : \mathbb{N}\to\mathbb{C}$ με

$$f_i(n) = \begin{cases} 0, & n=0 \\ 1, & n\geq 1 \end{cases}$$

για $n\in\mathbb{N}$ και κάθε $i\in[k]$. Από την Πρόταση 5.4 παίρνουμε

$$E_h(x) = \prod_{i=1}^{k} E_{f_i}(x)$$

όπου

- $h(n) := \sum_{(S_1,\dots,S_k)} f_1(\# S_1)\cdots f_k(\# S_k)$

$$= k!\ \#\{\text{διαμερίσεις } \{S_1,\dots,S_k\} \text{ του } [n]\}$$

$$= k!\ S(n,k).$$

Αφού

$$E_{f_i}(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$$

για κάθε $i \in [k]$, έπεται ότι

$$\sum_{n\geq 0} k!\ S(n,k) \frac{x^n}{n!} = (e^x - 1)^k,$$

δηλαδή η (5.2). Κατά συνέπεια

- $$\sum_{n\geq 0} B(n)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k\geq 0} S(n,k)\right)\frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{n\geq 0} S(n,k)\frac{x^n}{n!}\right)$$

$$= \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}(e^x-1)^k$$

$$= \exp(e^x-1). \quad \blacksquare$$

Πόρισμα 5.7.

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i} i^n.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

- $$(e^x-1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} e^{ix} (-1)^{k-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \sum_{n\geq 0} \frac{i^n x^n}{n!}$$

και εξισώνουμε τους συντελεστές του $x^n/n!$ στα δύο μέλη της (5.2). ■

Θεώρημα 5.8. (Τύπος Συνθέσεως)

Δοσμένων των $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ με $g(0)=1$, ορίζουμε την $h : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ θέτοντας $h(0)=1$ και

$$h(\#X) = \sum_{\pi \in \Pi(X)} f(\#B_1) \cdots f(\#B_k)\, g(k) \qquad (5.4)$$

όπου $\Pi(X)$ είναι το σύνολο των διαμερίσεων $\pi = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ του πεπερασμένου συνόλου X. Τότε,

$$E_h(x) = E_g(E_f(x))$$

όπου $E_f(x) = \sum_{n \geq 1} f(n) x^n / n!$.

Απόδειξη 'Εστω $\# X = n$ και έστω $h_k(n)$ το δεξιό μέλος της (5.4) για σταθερό k. Αφού τα $B_1, B_2, \dots, B_k$ είναι μη κενά, άρα διαφορετικά ανά δύο, από την Πρόταση 5.4 παίρνουμε

$$k!\, E_{h_k}(x) = g(k)\, (E_f(x))^k.$$

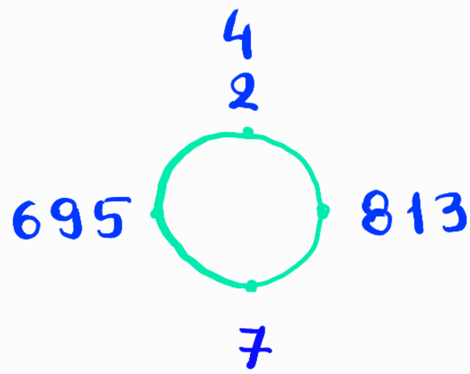
'Επεται ότι

- $$E_h(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} g(k) \left(E_f(x)\right)^k$$

$$= E_g(E_f(x)). \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 5.9. Έστω $h(n)$ το πλήθος των τρόπων με τους οποίους n μαθητές μπορούν να διαμεριστούν σε μη κενές γραμμές και μετά οι γραμμές να διαταχθούν σε κυκλική διάταξη.

Π.χ. για $n=9$



Υπάρχουν $f(k)=k!$ τρόποι να διαταχθούν γραμμικά k μαθητές και $g(k)=(k-1)!$ τρόποι να διαταχθούν κυκλικά k διαφορετικά αντικείμενα. Συνεπώς, σύμφωνα με την Πρόταση 5.8,

$$E_h(x) = E_g(E_f(x))$$

όπου

$$E_f(x) = \sum_{n\geq 1} n!\, \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{1-x}$$

και

- $$E_g(x) = 1 + \sum_{n\geq 1} (n-1)!\, \frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = 1 - \log(1-x)$$

$$= 1 + \log \frac{1}{1-x}.$$

Άρα,

- $$\sum_{n \geq 0} h(n) \frac{x^n}{n!} = E_h(x) = E_g(E_f(x))$$

$$= 1 + \log \frac{1}{1 - x/(1-x)}$$

$$= 1 + \log \frac{1-x}{1-2x}$$

$$= 1 + \log \frac{1}{1-2x} - \log \frac{1}{1-x}$$

$$= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(2x)^n}{n} - \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$$

$$= 1 + \sum_{n \geq 1} (2^n - 1)\, x^n / n$$

$$= 1 + \sum_{n \geq 1} (2^n - 1)(n-1)! \, \frac{x^n}{n!}$$

και συνεπώς $h(n) = (2^n - 1)(n-1)!$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. ■

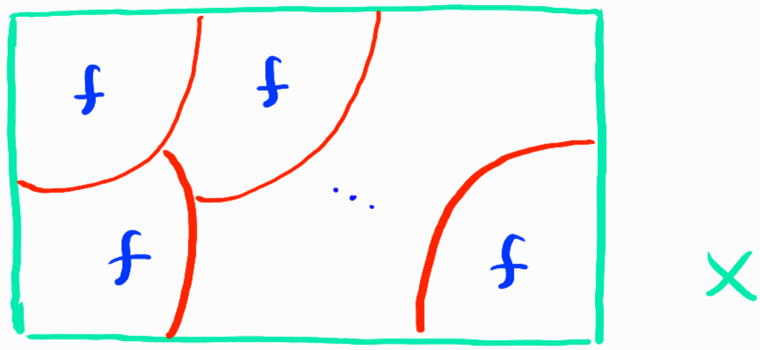
Πόρισμα 5.10. (Εκθετικός Τύπος) Δοσμένης της $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ με $f(0) = 0$, ορίζουμε την $h: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ θέτοντας $h(0) = 1$ και

$$h(\#X) = \sum_{\{B_1, \ldots, B_k\} \in \Pi(X)} f(\#B_1) \cdots f(\#B_k). \qquad (5.5)$$

Τότε

$$E_h(x) = \exp(E_f(x)).$$

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.8 για $g(n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. ■



Παράδειγμα 5.11. Έστω ότι $f(n) = (n-1)!\, t$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Τότε, από την (5.5) έχουμε

$$\bullet \; h(n) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} t^{c(w)} = \sum_{k=1}^{n} c(n,k)\, t^k$$

$$:= C_n(t)$$

και συνεπώς

$$E_h(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} C_n(t) \frac{x^n}{n!}.$$

Επίσης,

- $$E_f(x) = \sum_{n\geq 1} f(n)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} (n-1)!\,t\,\frac{x^n}{n!}$$

$$= t\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n} = t\log\frac{1}{1-x}.$$

Ο εκθετικός τύπος δίνει

$$1 + \sum_{n\geq 1} c_n(t)\frac{x^n}{n!} = \exp\left(t\log\frac{1}{1-x}\right)$$

$$= \exp(\log(1-x)^{-t})$$

$$= (1-x)^{-t} = \sum_{n\geq 0}\binom{-t}{n}(-x)^n$$

$$= \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(-t)(-t-1)\cdots(-t-n+1)}{n!}x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!} x^n.$$

Συμπεραίνουμε ότι $c_n(t) = t(t+1)\cdots(t+n-1)$, δηλαδή την Πρόταση 4.5. ■

Παράδειγμα 5.12. Έστω a_n το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_n$ με $w^{-1} = w$ (αυτοαντίστροφες μεταθέσεις) ή, ισοδύναμα, το πλήθος των απεικονίσεων $w : [n] \to [n]$ με

$$w(w(x)) = x$$

για κάθε $x \in [n]$. Έχουμε $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 10$ κ.ο.κ.

Προφανώς, η $w \in \mathfrak{S}_n$ είναι αυτοαντίστροφη αν και μόνο αν κάθε κύκλος στην κυκλι κή παράσταση της w έχει ένα ή δύο στοιχεία. Π.χ. για $n=7$ η $w=(14)(2)(37)(56)$ είναι αυτοαντίστροφη αλλά η $u=(14)(2)(375)(6)$ όχι.

Έπεται ότι

$$a_n = \sum_{\{B_1,\dots,B_k\}\in\Pi([n])} f(\#B_1)\cdots f(\#B_k)$$

για $n\geq 1$, όπου

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n\in\{1,2\} \\ 0, & \text{αν } n\geq 3. \end{cases}$$

Από τα παραπάνω και τον Εκθετικό Τύπο συμπεραίνουμε ότι

- $$\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} = \exp(E_f(x))$$

$$= \exp\left(\sum_{n\geq 1} f(n) \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$= \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$$

$$= e^{x + x^2/2}. \qquad (5.6)$$

Πόρισμα 5.13. Έστω a_n το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_n$ με $w = w^{-1}$.

(α) $a_{n+1} = a_n + n\, a_{n-1}$ για $n \geq 1$.

(β) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{2^k k!}$ για $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη Παραγωγίζοντας την (5.6) βρίσκουμε ότι

- $$\sum_{n\geq 1} a_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{d}{dx} e^{x+x^2/2}$$

$$= (1+x)\, e^{x+\frac{x^2}{2}} = (1+x) \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 1} a_{n-1} \frac{x^n}{(n-1)!}$$

και εξισώνουμε τους συντελεστές του $x^n/n!$. Αυτό αποδεικνύει το (α). Για το (β) γράφουμε

$$e^{x+\frac{x^2}{2}} = e^{x} \cdot e^{x^2/2} = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2^n n!} \right)$$

και συμπεραίνουμε ότι

$$a_n = n!\,[x^n]\, e^{x+\frac{x^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{2^k \cdot k!\,(n-2k)!}$$

δηλαδή το ζητούμενο. ■

Άσκηση 5.14. Δείξτε ότι τον τύπο του Euler

$$\sum_{n\geq 0} A_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{(1-x)\, e^{(1-x)t}}{1-x\, e^{(1-x)t}}$$

όπου $A_n(x) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{\mathrm{des}(w)}$ για $n \geq 1$ και $A_0(x) = 1$.

Λύση. Εφαρμόζοντας την ταυτότητα

$$\sum_{m\geq 1} m^n x^{m-1} = \frac{A_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$$

της Πρότασης 4.9 βρίσκουμε ότι

- $$\sum_{n\geq 0} A_n(x)\frac{t^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n\geq 0} (1-x)^{n+1}\Big(\sum_{m\geq 1} m^n x^{m-1}\Big)\frac{t^n}{n!}$$

$$= (1-x)\sum_{m\geq 1} x^{m-1} \sum_{n\geq 0}\frac{m^n(1-x)^n t^n}{n!}$$

$$= (1-x)\sum_{m\geq 1} x^{m-1} e^{m(1-x)t}$$

$$= (1-x) \sum_{m \geqslant 0} x^m e^{(m+1)(1-x)t}$$

$$= (1-x) e^{(1-x)t} \sum_{m \geqslant 0} x^m e^{m(1-x)t}$$

$$= \frac{(1-x) e^{(1-x)t}}{1 - x e^{(1-x)t}} .$$