4. Μεταθέσεις

Μετάθεση του $[n]$ λέγεται κάθε αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $w : [n] \to [n]$. Το σύνολο $\mathfrak{S}_n$ των μεταθέσεων του $[n]$ αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση (γινόμενο) απεικονίσεων (συμμετρική ομάδα).

Μια μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_n$ παριστάνεται ως η διάταξη

- $$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ w(1) & w(2) & \cdots & w(n) \end{pmatrix}$$

ή ως η αναδιάταξη $(w(1), w(2), \ldots, w(n))$ ή ως η λέξη $w(1)\,w(2) \cdots w(n)$, ή με την κυκλική της μορφή (γινόμενο ξένων κύκλων, καθώς και με πολλούς άλλους τρόπους. Ειδικότερα,

$$\# \mathfrak{S}_n = n!$$

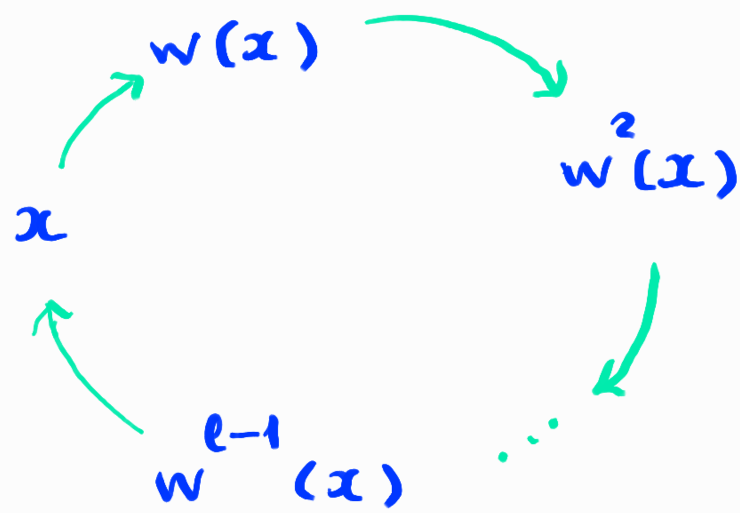
για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

<u>Κυκλική μορφή</u>: Για κάθε $x \in [n]$ η ακολουθία

- $x,\ w(x),\ w^2(x) = w(w(x)),\ w^3(x), \ldots$

παίρνει πεπερασμένου πλήθους τιμές. Επομένως, $w^i(x) = w^j(x)$ για κάποιους δείκτες $i<j$ και συνεπώς $w^\ell(x) = x$

για $\ell = j - i \geq 1$. Αν ℓ είναι ο ελάχιστος θετικός ακέραιος με $w^{\ell}(x) = x$,



ονομάζουμε την ακολουθία

- $(x, w(x), \ldots, w^{\ell-1}(x))$

κύκλο (μήκους ℓ) της w. Η w είναι ίση με το γινόμενο των (ξένων ανά δύο κύκλων της. Π.χ. αν $n=7$ και

- $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 7 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$,

δηλαδή $w(1)=4$, $w(2)=2$, $\ldots$, $w(7)=5$, τότε

- $w = (1\ 4)(2)(3\ 7\ 5)(6)$

είναι η κυκλική μορφή της w. Φυσικά μπορούμε να γράψουμε και

- $$\begin{aligned} w &= (4\ 1)(2)(3\ 7\ 5)(6) \\ &= (2)(1\ 4)(3\ 7\ 5)(6) \\ &= (1\ 4)(2)(6)(7\ 5\ 3) \end{aligned}$$

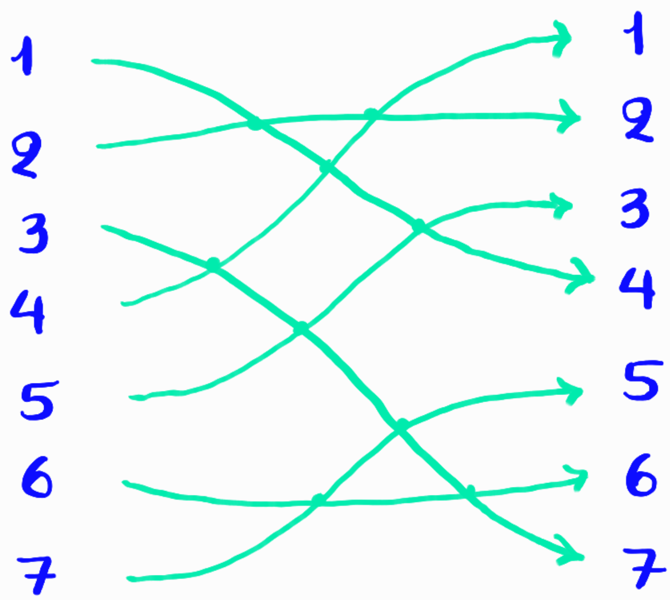
κ.ο.κ.

Έστω $w \in \mathfrak{S}_n$.

Ορισμός 4.1. Το ζεύγος $(i,j) \in [n] \times [n]$ λέγεται αντιστροφή (inversion) της w αν $i<j$ και $w(i) > w(j)$.

Συμβολίζουμε με $\mathrm{inv}(w)$ το πλήθος των αντιστροφών της w.

Π.χ. για $n=7$ και $w = 4271365$ έχουμε $\mathrm{inv}(w) = 9$.



Παρατήρηση 4.2. Για κάθε $w \in \mathfrak{S}_n$:

(α) $0 \leq \mathrm{inv}(w) \leq \binom{n}{2}$.

(β) $\mathrm{inv}(w^{-1}) = \mathrm{inv}(w)$.

Άσκηση 4.3. Δείξτε ότι για κάθε $w \in \mathfrak{S}_n$, το $\mathrm{inv}(w)$ ισούται με το ελάχιστο $k \in \mathbb{N}$ για το οποίο η w μπορεί να γραφεί ως το γινόμενο k γειτονικών αντιμεταθέσεων $(i \ i+1)$.

Πόσες $w \in \mathfrak{S}_n$ έχουν δοσμένο πλήθος αντιστροφών; Π.χ. για $n=3$

w	123	132	213	312	231	321
$\mathrm{inv}(w)$	0	1	1	2	2	3

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_3} x^{inv(w)} = 1 + 2x + 2x^2 + x^3 = (1+x)(1+x+x^2).$$

Πρόταση 4.4. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{inv(w)} = (1+x)(1+x+x^2)\cdots(1+x+\cdots+x^{n-1})$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

- $\mathcal{B}_n = \{0\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1,\ldots,n-1\}$

$$= \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : 0 \le a_i \le i-1\}$$

και την απεικόνιση $\varphi : \mathfrak{S}_n \to \mathcal{B}_n$ που ορίζεται ως εξής. Για $w \in \mathfrak{S}_n$ θέτουμε

- $\varphi(w) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

όπου για $t \in [n]$, το a_t είναι ίσο με το πλήθος των ακεραίων $1 \leq s < t$ που εμφανίζονται στα δεξιά του t στην αναδιάταξη $(w(1), w(2), \ldots, w(n))$ του $[n]$. Π.χ. αν $n=7$ και $w = 4271365$, τότε

- $a_1 = 0$
- $a_2 = 1$
- $a_3 = 0$
- $a_4 = 3$

$a_5 = 0$
$a_6 = 1$
$a_7 = 4$

και συνεπώς $\varphi(w) = (0, 1, 0, 3, 0, 1, 4)$. Παρατηρούμε ότι η $\varphi : \mathfrak{S}_n \to \mathcal{B}_n$ είναι αμφιμονοσήμαντη και ότι

- $\mathrm{inv}(w) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Πράγματι, αν $\varphi(w) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, τότε το a_t καθορίζει τη θέση του t ως προς τα $1, 2, \ldots, t-1$ στην αναδιάταξη $(w(1), w(2), \ldots, w(n))$ και συνεπώς η w καθορίζεται μονοσήμαντα από το $\varphi(w)$.

Π.χ. αν $n=7$ και $\varphi(w) = (0,1,0,3,0,1,4)$ τότε η w καθορίζεται μονοσήμαντα από τη διαδικασία

1
2 1
2 1 3
4 2 1 3
4 2 1 3 5
4 2 1 3 6 5
4 2 7 1 3 6 5 = w.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{\mathrm{inv}(w)} = \sum_{(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{B}_n} x^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{0 \le a_i < i} x^{a_i} \Big)$$

$$= 1 \cdot (1+x)(1+x+x^2) \cdots (1+x+\cdots+x^{n-1}).$$

■

Έστω τώρα $c(w)$ το πλήθος των κύκλων της $w \in \mathfrak{S}_n$. Πόσες μεταθέσεις $w \in \mathfrak{S}_n$ έχουν δοσμένο πλήθος κύκλων $c(w)$;

Π.χ. για $n=3$ οι μεταθέσεις σε κυκλική μορφή είναι οι

- $(1)(2)(3)$ $\quad$ $(1)(2\,3)$
- $(1\,2)(3)$ $\quad$ $(1\,2\,3)$
- $(1\,3)(2)$ $\quad$ $(1\,3\,2)$

και

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_3} x^{c(w)} = x^3 + 3x^2 + 2x = x(x+1)(x+2).$$

Πρόταση 4.5. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{c(w)} = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1). \tag{4.1}$$

Ισοδύναμα,

$$\sum_{k=1}^{n} c(n,k)\, x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$$

όπου $c(n,k)$ είναι το πλήθος των $w \in \mathfrak{S}_n$ με $c(w) = k$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε την (4.1) για κάθε $x \in \mathbb{Z}_{>0}$, αφού είναι ισότητα μεταξύ δύο πολυωνύμων.

Έστω $x \in \mathbb{Z}_{>0}$. Το αριστερό μέλος της (4.1) απαριθμεί τους τρόπους να επιλεγεί μια μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_n$ και να χρωματισθεί κάθε κύκλος της με ένα από τα χρώματα $1, 2, \ldots, x$. Κάθε τέτοια επιλογή προκύπτει από μια ανάλογη επιλογή μετάθεσης $u \in \mathfrak{S}_{n-1}$ και χρωματισμού των κύκλων της

- είτε προσθέτοντας στη u τον κύκλο (n) χρωματισμένο με ένα από τα χρώματα $1, 2, \ldots, x$
- είτε παρεμβάλλοντας το n σε κάποιον από τους κύκλους της u με $n-1$ δυνατούς τρόπους.

Άρα, με κατάλληλη εφαρμογή της Πρότασης 1.4 παίρνουμε

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{c(w)} = (x+n-1) \sum_{u \in \mathfrak{S}_{n-1}} x^{c(u)}$$

από όπου η (4.1) προκύπτει εύκολα με επαγωγή στο n. ■

Παράδειγμα 4.6. Έχουμε

$$\begin{aligned} c(n,2) &= [x^2]\; x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) \\ &= [x]\; (x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) \\ &= (n-1)!\; \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right) \end{aligned}$$

για κάθε n. ■

Έστω πάλι $w \in \mathfrak{S}_n$.

Ορισμός 4.7. Ο ακέραιος $i \in [n-1]$ λέγεται κάθοδος της w αν $w(i) > w(i+1)$ και άνοδος διαφορετικά.

Συμβολίζουμε με

- $\mathrm{Des}(w) = \{ i \in [n-1] : w(i) > w(i+1) \}$
- $\mathrm{des}(w) = \# \mathrm{Des}(w)$

το σύνολο και το πλήθος των καθόδων της w, αντίστοιχα. Π.χ. για $n=7$ και

$$w = 4 \cdot 2 \quad 7 \cdot 1 \quad 3 \quad 6 \cdot 5$$

έχουμε $\mathrm{Des}(w) = \{1, 3, 6\}$ και $\mathrm{des}(w) = 3$.

Ορισμός 4.8. Το

$$A_n(x) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{\mathrm{des}(w)}$$

λέγεται πολυώνυμο Euler τάξης n.

Π.χ.

- $A_1(x) = 1$
- $A_2(x) = 1+x$
- $A_3(x) = 1+4x+x^2$
- $A_4(x) = 1+11x+11x^2+x^3$
- $A_5(x) = 1+26x+66x^2+26x^3+x^4$.

Πρόταση 4.9. Για $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{m \geq 1} m^n x^{m-1} = \frac{A_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$$

όπου $A_0(x) := 1$.

Η πρόταση αυτή γενικεύει τις γνωστές ταυτότητες

$$\sum_{m\geq 0} x^m = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{m\geq 1} m x^{m-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{m\geq 1} m^2 x^{m-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{m\geq 1} m^3 x^{m-1} = \frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}$$

κ.ο.κ.

<u>Απόδειξη</u> της <u>Πρότασης 4.9</u>. Θεωρούμε τις αναδιατάξεις της συλλογής που αποτελείται από τα $1, 2, \ldots, n$ και $m-1$ όμοιες μπάλες ○. Π.χ. για $m=9$ και $n=6$

έχουμε την

2 0 0 4 1 0 5 0 0 0 6 0 3 0

Έστω $\Gamma(m,n)$ το σύνολο εκείνων χωρίς κάθοδο, δηλαδή με την εξής ιδιότητα: αν $1 \leq i < j \leq n$ και το i βρίσκεται στα δεξιά του j, τότε μεταξύ των i, j βρίσκεται τουλάχιστον ένα στοιχείο της συλλογής. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\# \Gamma(m,n) = m^n \qquad (4.2)$$

διότι υπάρχουν m^n τρόποι να παρεμβάλλει κανείς τους $1, 2, \ldots, n$ ανάμεσα (ή πριν ή μετά) στις μπάλλες στη διάταξη

$$\underbrace{\circ \quad \circ \quad \circ \quad \cdots \quad \circ}_{m-1}$$

ώστε να μην υπάρξει κάθοδος. Παρατηρούμε έπειτα ότι για κάθε $w \in \mathfrak{S}_n$ τα στοιχεία της $\Gamma(m,n)$ που δίνουν την αναδιάταξη

$$w(1) \quad w(2) \quad \cdots \quad w(n)$$

όταν διαγραφούν οι μπάλες $\circ$ είναι τόσα, όσες και οι λύσεις της εξίσωσης

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{a_0} w(1) \underbrace{\qquad\qquad}_{a_1} w(2) \cdots w(n) \underbrace{\qquad\qquad}_{a_n}$$

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n = m-1$$

με

$$a_i \in \begin{cases} \mathbb{Z}_{>0}, & \text{αν } w(i) > w(i+1) \\ \mathbb{N}, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Άρα,

$$\sum_{m \geq 1} \# \Gamma(m,n)\, x^{m-1} = \sum_{w \in G_n} \sum x^{a_0 + a_1 + \dots + a_n}$$

$$= \sum_{w \in G_n} \left(\frac{x}{1-x} \right)^{des(w)} \left(\frac{1}{1-x} \right)^{n+1-des(w)}$$

$$= \frac{\sum_{w \in G_n} x^{des(w)}}{(1-x)^{n+1}} = \frac{A_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

Συνδυάζοντας το αποτέλεσμα αυτό με την (4.2) προκύπτει το ζητούμενο. ■

Τα πολυώνυμα Euler απαντώνται συχνά σε διάφορες περιοχές των μαθηματικών. Π.χ. είναι γνωστό (Laplace) ότι αν $R_{n,k}$ είναι η περιοχή του $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται από τις ανισότητες

$$\begin{cases} 0 \leq x_i \leq 1 \text{ για } i \in [n] \\ k \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq k+1 \end{cases}$$

τότε

$$\mathrm{vol}(R_{n,k}) = \frac{1}{n!} [x^k] A_n(x)$$

για κάθε $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Θα περιγράψουμε μια ακόμα σημαντική συνδυαστική ερμηνεία του $A_n(x)$ ως εξής. Έστω $w \in \mathfrak{S}_n$.

Ορισμός 4.10. Υπέρβαση (excedance) της w λέγεται κάθε δείκτης $i \in [n-1]$ με $w(i) > i$.

Συμβολίζουμε με

- $\mathrm{EXC}(w) = \{ i \in [n-1] : w(i) > i \}$
- $\mathrm{exc}(w) = \# \mathrm{EXC}(w)$

το σύνολο και το πλήθος των υπερβάσεων της $w \in \mathfrak{S}_n$, αντίστοιχα. Για $n=3$

w	123	132	213	312	231	321
$\mathrm{exc}(w)$	0	1	1	1	2	1

και συνεπώς $\sum_{w \in \mathfrak{S}_3} x^{\mathrm{exc}(w)} = 1 + 4x + x^2$
$= A_3(x)$.

Πρόταση 4.11. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{\mathrm{exc}(w)} = A_n(x).$$

Λήμμα 4.12. Για κάθε $k \in [n-1]$,

$$[x^k]\, A_n(x) = [x^{n-k-1}]\, A_n(x).$$

Απόδειξη. Η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $\imath : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n$ με

- $\imath(w) = (w_n, w_{n-1}, \dots, w_1)$

για $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathfrak{S}_n$ επάγει μια

1-1 αντιστοιχία από το σύνολο των $w \in \mathfrak{S}_n$ με $\mathrm{des}(w) = k$ σε εκείνο των $u \in \mathfrak{S}_n$ με $\mathrm{des}(u) = n-1-k$. ∎

<u>Απόδειξη της Πρότασης 4.11.</u> Θα βρούμε κατάλληλη 1-1 αντιστοιχία.

Ονομάζουμε κανονική κυκλική μορφή μιας μετάθεσης $w \in \mathfrak{S}_n$ εκείνη που προκύπτει γράφοντας κάθε κύκλο με το ελάχιστο στοιχείο του να εμφανίζεται πρώτο (από αριστερά) και διατάσσοντας τους κύκλους σε φθίνουσα διάταξη των ελάχιστων στοιχείων τους. Π.χ. η

$$w = (6)(375)(2)(14)$$

είναι η κανονική κυκλική μορφή της w

$= 4\,2\,7\,1\,3\,6\,5 \in \mathfrak{S}_7.$

Συμβολίζουμε με $\varphi(w)$ τη μετάθεση που, ως αναδιάταξη, προκύπτει διαβάζοντας από αριστερά προς τα δεξιά τα στοιχεία που εμφανίζονται στην κανονική κυκλική μορφή της w. Στο παραπάνω παράδειγμα έχουμε

- $\varphi(w) = (6,3,7,5,2,1,4).$

Ισχυριζόμαστε ότι:

(α) Η $\varphi : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n$ είναι 1-1 και επί

(β) $\mathrm{exc}(w) = n-1-\mathrm{des}(\varphi(w))$ για κάθε $w \in \mathfrak{S}_n$.

Συνδυάζοντας τα (α) και (β) με το Λήμμα 4.12 συμπεραίνουμε ότι

- $\# \{ w \in \mathfrak{S}_n : \mathrm{exc}(w) = k \} =$

  $\# \{ w \in \mathfrak{S}_n : \mathrm{des}(w) = n-1-k \} =$

  $\# \{ w \in \mathfrak{S}_n : \mathrm{des}(w) = k \} =$

  $[x^k] \; A_n(x)$

για κάθε $k \in [n-1]$, που ήταν το ζητούμενο. Μένει να δείξουμε τα (α) και (β).

(α) Έχουμε να δείξουμε ότι για κάθε

- $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in \mathfrak{S}_n$

υπάρχει μοναδική $w \in \mathfrak{S}_n$ με $\varphi(w) = \sigma$. Πράγματι, αν $\sigma_i = 1$, τότε ο $(\sigma_i \, \sigma_{i+1} \cdots \sigma_n)$ πρέπει να είναι κύκλος μιας τέτοιας w. Ομοίως, αν σ_j είναι το ελάχιστο από τα υπόλοιπα στοιχεία της σ, τότε ο $(\sigma_j\,\sigma_{j+1}\cdots\sigma_{i-1})$ πρέπει επίσης να είναι κύκλος της w κ.ο.κ. Άρα, η μοναδική w με $\varphi(w)=\sigma$ είναι η

- $w = \cdots(\sigma_j\,\sigma_{j+1}\cdots\sigma_{i-1})(\sigma_i\,\sigma_{i+1}\cdots\sigma_n)$.

Π.χ. για

- $\sigma = (6,3,7,5,2,1,4)$

έχουμε

- $w = (6)(3\ 7\ 5)(2)(1\ 4)$.

(β) Επαληθεύουμε ότι για $w \in \mathfrak{S}_n$ και $\varphi(w) = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ έχουμε $w(i) > i$ αν και μόνο αν $\sigma_k < \sigma_{k+1}$ για το μοναδικό

$k \in [n]$ με $\sigma_k = i$. ∎

Άσκηση 4.13. Έστω $k \in [n]$. Επιλέγουμε τυχαία και ομοιόμορφα μια μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_n$. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει μήκος k ο κύκλος της w που περιέχει το 1;

Πρώτη Λύση. Ας απαριθμήσουμε τις μεταθέσεις w με την επιθυμητή ιδιότητα. Υπάρχουν $\binom{n-1}{k-1}$ τρόποι να επιλέξει κανείς τα στοιχεία του κύκλου που περιέχει το 1, $(k-1)!$ τρόποι να σχηματίσει αυτόν τον κύκλο και $(n-k)!$ τρόποι να μεταθέσει τα υπόλοιπα στοιχεί α του $[n]$ ώστε να σχηματιστούν οι υπόλοιποι κύκλοι της w. Άρα, το ζητούμενο πλήθος ισούται με

$$\binom{n-1}{k-1}(k-1)!\,(n-k)! = (n-1)!$$

και η πιθανότητα με $(n-1)!/n! = 1/n$, ανεξάρτητη του k.

<u>Δεύτερη</u> <u>Λύση</u>. Η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $\varphi : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n$ της απόδειξης της Πρότασης 4.11 δείχνει ότι η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με εκείνη να ισχύει $\sigma_{n-k+1} = 1$, όπου η

- $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$

επιλέγεται τυχαία και ομοιόμορφα από τις αναδιατάξεις του $[n]$. Η πιθανότητα αυτή είναι προφανώς ίση με $1/n$ για κάθε $k \in [n]$. ∎

Πρόταση 4.14. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, το πολυώνυμο $A_n(x)$ έχει μόνο πραγματικές ρίζες.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{d}{dx}\left(x \sum_{m \geq 1} m^n x^{m-1} \right) = \sum_{m \geq 1} m^{n+1} x^{m-1}.$$

Λόγω της Πρότασης 4.9, η ισότητα αυτή γράφεται ισοδύναμα ως

$$\frac{d}{dx}\frac{x A_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \frac{A_{n+1}(x)}{(1-x)^{n+2}} . \qquad (4.3)$$

Εφαρμόζουμε επαγωγή στο n. Έστω ότι το $A_n(x)$ έχει μόνο πραγματικές, απλές ρίζες $\zeta_{n-1} < \zeta_{n-2} < \cdots < \zeta_1 < 0$. Τότε, η

$$\frac{x A_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$$

έχει ρίζες

$$\zeta_{n-1} < \zeta_{n-2} < \cdots < \zeta_1 < \zeta_0 = 0.$$

Αφού

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x A_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = 0$$

από το Θεώρημα του Rolle συμπεραίνουμε ότι το αριστερό μέλος της (4.2), άρα και το $A_{n+1}(x)$, έχει ρίζες $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ με

$$\xi_n < \zeta_{n-1} < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_2 < \zeta_1 < \xi_1 < 0,$$

άρα η απλές (αρνητικές) πραγματικές ρίζες. ∎

<u>Παρατήρηση 4.15.</u> Η (4.3) γράφεται ισοδύναμα

$$A_{n+1}(x) = (1+nx) A_n(x) + x(1-x) \frac{d}{dx} A_n(x).$$