3. Υποσύνολα, συνθέσεις, διαμερίσεις (συνέχεια)

Έστω $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Ορισμός 3.4. Σύνθεση του n λέγεται κάθε διάνυσμα

$$\rho = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$$

όπου $r_1, r_2, \ldots, r_k$ είναι θετικοί ακέραιοι με $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$. Οι r_i λέγονται μέρη της ρ.

Π.χ. το $n = 3$ έχει τις συνθέσεις

- (3), $(2,1)$, $(1,2)$, $(1,1,1)$

οι οποίες γράφονται και ως

- $3,\ 2+1,\ 1+2,\ 1+1+1.$

Πρόταση 3.5. Το πλήθος των συνθέσεων του n είναι ίσο με 2^{n-1}. Το πλήθος εκείνων με k μέρη είναι ίσο με $\binom{n-1}{k-1}$.

Πρώτη Απόδειξη. Έστω c_n το πλήθος των συνθέσεων του n. Έχουμε

- $$\sum_{n\geq 1} c_n x^n = \sum_{k\geq 1} \sum_{r_i \in \mathbb{Z}_{>0}} x^{r_1+r_2+\cdots+r_k}$$

$$= \sum_{k\geq 1} \sum_{r_i \in \mathbb{Z}_{>0}} x^{r_1} \cdot x^{r_2} \cdots x^{r_k}$$

$$= \sum_{k \geq 1} \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{r_i \in \mathbb{Z}_{>0}} x^{r_i} \right)$$

$$= \sum_{k \geq 1} \prod_{i=1}^{k} (x + x^2 + x^3 + \cdots)$$

$$= \sum_{k \geq 1} (x + x^2 + x^3 + \cdots)^k$$

$$= \frac{x + x^2 + \cdots}{1 - (x + x^2 + \cdots)} = \frac{x/(1-x)}{1 - x/(1-x)} = \frac{x}{1-2x}$$

$$= x \sum_{n \geq 0} (2x)^n = \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} x^n$$

και συνεπώς $c_n = 2^{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Ομοίως, αν $c_{n,k}$ είναι το πλήθος των συνθέσεων του n με k μέρη, τότε

- $$\sum_{n\geq 0} c_{n,k}\, x^n = \sum_{r_i \in \mathbb{Z}_{>0}} x^{r_1+r_2+\cdots+r_k}$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \Big(\sum_{r_i \in \mathbb{Z}_{>0}} x^{r_i} \Big)$$

$$= (x+x^2+\cdots)^k = \left(\frac{x}{1-x}\right)^k = x^k (1-x)^{-k}$$

$$= x^k \sum_{n\geq 0} \binom{-k}{n} (-x)^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{(-k)(-k-1)\cdots(-k-n+1)}{n!} x^{k+n}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!} x^{k+n}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \binom{k+n-1}{k-1} x^{k+n} = \sum_{n\geq k} \binom{n-1}{k-1} x^n$$

και συνεπώς $c_{n,k} = \binom{n-1}{k-1}$ για $n \in \mathbb{N}$.

<u>Δεύτερη Απόδειξη.</u> Αρκεί να βρεθεί μια 1-1 αντιστοιχία

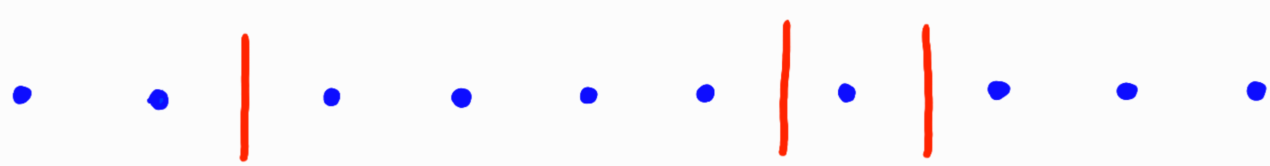
$$\theta = \theta_{n,k} : A_{n,k} \longrightarrow \binom{[n-1]}{k-1}$$

όπου $A_{n,k}$ είναι το σύνολο των συν-θέσεων του n με k μέρη. Πράγματι, για τη σύνθεση $\rho = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$ του n με k μέρη θέτουμε

- $\theta(\rho) = \{r_1, r_1 + r_2, \ldots, r_1 + r_2 + \cdots + r_{k-1}\}$.

Π.χ. αν $n = 10$, $k = 4$ και $\rho = (2, 4, 1, 3)$, τότε $\theta(\rho) = \{2, 6, 7\}$. Σχηματικά,

$$2 + 4 + 1 + 3$$



$\{2, 6, 7\}$

Προφανώς, $\theta(p) \in \binom{[n-1]}{k-1}$ και η θ είναι αντιστρέψιμη. Η αντίστροφη απεικόνιση στέλνει το

$$\{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}\} \in \binom{[n-1]}{k-1}$$

με $s_1 < s_2 < \cdots < s_{k-1}$ στη σύνθεση

$$(s_1, s_2 - s_1, \dots, n - s_{k-1})$$

του n. Έπεται ότι $\# A_{n,k} = \# \binom{[n-1]}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$. ■

Οι συνθέσεις του n με k μέρη συμπίπτουν με τις λύσεις της εξίσωσης

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n \qquad (3.3)$$

στο $\mathbb{Z}_{>0}$. Έστω $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$ το πλήθος των λύσεων της

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = k \qquad (3.4)$$

στο $\mathbb{N}$. Ισοδύναμα, $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$ είναι το πλήθος των μονωνύμων

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$$

στις μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ βαθμού $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = k$.

π.χ. $\left(\!\binom{4}{2}\!\right) = 10$ αφού υπάρχουν τα μονώνυμα

- $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2,$

  $x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4$

βαθμού 2 στις μεταβλητές x_1, x_2, x_3, x_4.

<u>Πρόταση 3.6.</u> $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$.

<u>Πρώτη</u> <u>Απόδειξη</u>. Εργαζόμενοι όπως πριν, βρίσκουμε ότι

- $$\sum_{k \geq 0} \left(\!\binom{n}{k}\!\right) x^k = \sum_{a_i \in \mathbb{N}} x^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{a_i \geq 0} x^{a_i} \right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (1 + x + x^2 + \cdots)$$

$$= \left(\frac{1}{1-x} \right)^n = (1-x)^{-n} = \sum_{k \geq 0} \binom{-n}{k} (-x)^k$$

και συμπεραίνουμε ότι

- $$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = (-1)^k \binom{-n}{k}$$

$$= (-1)^k \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}$$

$$= \binom{n+k-1}{k}.$$

Δεύτερη Απόδειξη. Θέτοντας $r_i = a_i + 1$ για $i \in [n]$, η (3.4) μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = n + k \qquad (3.5)$$

με αγνώστους $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Έτσι, ορίζεται μια 1-1 αντιστοιχία από το σύνολο των λύσεων της (3.4) σε εκείνο της (3.5), δηλαδή στο σύνολο των συνθέσεων του $n+k$ με n μέρη. Από αυτό και την Πρόταση 3.5 προκύπτει ότι

- $$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}. \qquad \blacksquare$$

Παράδειγμα 3.7. Αν $f(n)$ είναι το πλήθος των λύσεων της

$$a_1 + a_2 + a_3 = n$$

στο $\mathbb{N}^3$ με $a_1 \geq 2$, $a_2 \in 2\mathbb{N}$ και $a_3 \in (1+2\mathbb{N})$ τότε

- $$\sum_{n\geq 0} f(n) x^n = \sum_{\substack{a_1 \geq 2 \\ a_2 \in 2\mathbb{N} \\ a_3 \in 1+2\mathbb{N}}} x^{a_1+a_2+a_3}$$

$$= (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(x + x^3 + x^5 + \cdots)$$

$$= \frac{x^2}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{x}{1-x^2}$$

$$= \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)^2} = \frac{x^3(1+x)}{(1-x^2)^3}$$

$$= (x^3 + x^4) \sum_{m \geq 0} \binom{m+2}{2} x^{2m}$$

$$= \sum_{m \geq 0} \binom{m+2}{2} x^{2m+3} + \sum_{m \geq 0} \binom{m+2}{2} x^{2m+4}$$

$$= \sum_{m \geq 2} \binom{m}{2} x^{2m} + \sum_{m \geq 1} \binom{m+1}{2} x^{2m+1}.$$

Άρα,

$$f(n) = \begin{cases} \binom{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}{2}, & \text{αν } n \geq 3 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad \blacksquare$$

Άσκηση 3.8. Πόσες συνθέσεις του n έχουν μέρη περιττούς ακεραίους;

Λύση. Αν b_n είναι το πλήθος αυτό, τότε

- $$\sum_{n\geq 0} b_n x^n = \sum_{k\geq 0} \sum_{a_i \in 1+2\mathbb{N}} x^{a_1+a_2+\cdots+a_k}$$

$$= \sum_{k\geq 0} \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{a_i \in 1+2\mathbb{N}} x^{a_i} \right)$$

$$= \sum_{k\geq 0} (x + x^3 + x^5 + \cdots)^k$$

$$= \sum_{k\geq 0} \left(\frac{x}{1-x^2} \right)^k$$

$$= \frac{1}{1 - x/(1-x^2)} = \frac{1-x^2}{1-x-x^2}$$

$$= 1 + \frac{x}{1-x-x^2}$$

$$= 1 + \sum_{n\geq 1} F_n x^n,$$

όπου $F_1 = F_2 = 1$ και $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ για $n \geq 3$ και $b_0 := 1$. Έπεται ότι $b_n = F_n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. ■

Έστω $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 3.9. Διαμέριση του n λέγεται κάθε ακολουθία $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ θετικών ακεραίων

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$$

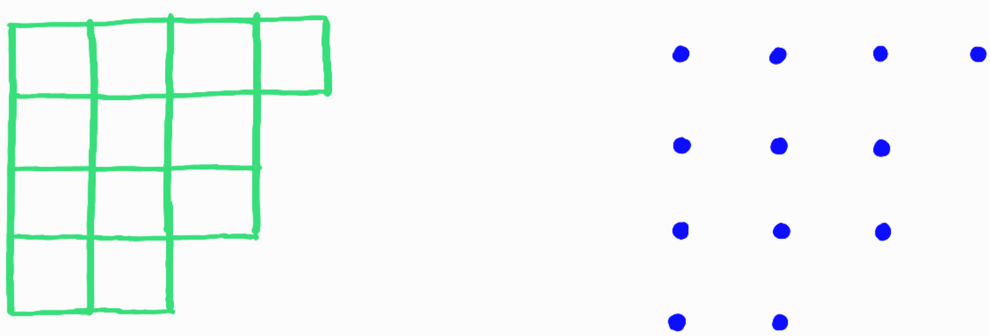
με $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n$. Οι λ_i λέγονται μέρη της λ. Γράφουμε $\lambda \vdash n$ και $|\lambda| = n$.

Π.χ. οι διαμερίσεις του $n=5$ είναι οι

- (5) $\quad (3,1,1) \quad (1,1,1,1,1)$
- $(4,1)$ $\quad (2,2,1)$
- $(3,2)$ $\quad (2,1,1,1)$

και η $\lambda = (4,3,3,2)$ είναι διαμέριση του $n=12$ με τέσσερα μέρη.

Σχηματικά, παριστάνουμε τις διαμερίσεις ακεραίων με τα διαγράμματα Young ή Ferrers:



διάγραμμα Young / Ferrers της

$\lambda = (4, 3, 3, 2)$

Έστω $p(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων του n, όπου $p(0) := 1$. Έχουμε

$$\sum_{n \geq 0} p(n) x^n = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + \cdots$$

Πρόταση 3.10.

$$\sum_{n\geq 0} p(n)x^n = \prod_{k\geq 1} \frac{1}{1-x^k}$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots$$

Απόδειξη. Έστω Λ το σύνολο των διαμερίσεων των φυσικών αριθμών. Για $\lambda \in \Lambda$ έστω $m_i(\lambda)$ η πολλαπλότητα με την οποία εμφανίζεται το i ως μέρος της λ. Π.χ. αν $\lambda = (5,3,3,2)$, τότε $m_2(\lambda) = 1$, $m_3(\lambda) = 2$, $m_5(\lambda) = 1$ και $m_i(\lambda) = 0$ για κάθε $i \neq 2,3,5$. Παρατηρούμε ότι

- $|\lambda|$ = άθροισμα των μερών της λ

$$= m_1(\lambda) + 2m_2(\lambda) + 3m_3(\lambda) + \cdots$$

και ότι

- $$\sum_{n\geq 0} p(n)x^n = \sum_{\lambda\in\Lambda} x^{|\lambda|}$$

$$= \sum_{m_i\in\mathbb{N}} x^{m_1+2m_2+3m_3+\cdots}$$

$$= \left(\sum_{m_1\geq 0} x^{m_1}\right)\left(\sum_{m_2\geq 0} x^{2m_2}\right)\cdots$$

$$= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdots \quad \blacksquare$$

Με το ίδιο σκεπτικό αποδεικνύεται η εξής γενίκευση.

Πρόταση 3.11. Έστω σύνολα $S_1, S_2, S_3, \ldots \subseteq \mathbb{N}$. Αν $q(n)$ είναι το πλήθος των διαμερίσεων λ του n με την ιδιότητα $m_i(\lambda) \in S_i$ για κάθε $i \in \mathbb{Z}_{>0}$, τότε

- $$\sum_{n \geq 0} q(n) x^n = \left(\sum_{m_1 \in S_1} x^{m_1} \right) \left(\sum_{m_2 \in S_2} x^{2m_2} \right) \cdots$$

$$= \prod_{i \geq 1} \left(\sum_{j \in S_i} x^{ij} \right). \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 3.12. (α) Αν $S_1 = S_2 = \cdots = \{0,1\}$, τότε το $q(n)$ ισούται με το πλή-

θος των διαμερίσεων του n με διακε-
κριμένα μέρη και

- $$\sum_{n\geq 0} q(n)x^n = \prod_{i\geq 1}(1+x^i)$$

$$= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots$$

(β) Αν

$$S_i = \begin{cases} \{0\}, & i \in 2\mathbb{N} \\ \mathbb{N}, & i \in (1+2\mathbb{N}) \end{cases}$$

τότε το $q(n)$ ισούται με το πλήθος των διαμερίσεων του n με μέρη περιττούς αριθμούς και

- $$\sum_{n\geq 0} q(n)x^n = \prod_{i\in 1+2\mathbb{N}}(1+x^i+x^{2i}+\dots)$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdots$$

$$= \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}$$

$$= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$$

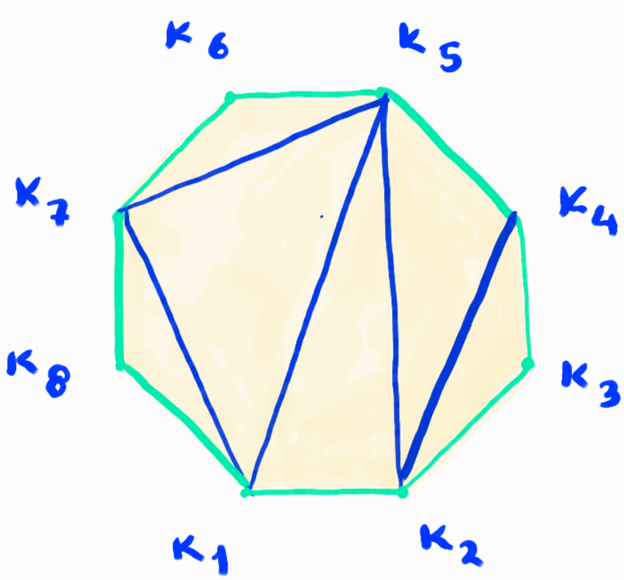
Άρα, το πλήθος των διαμερίσεων του n με περιττά μέρη είναι ίσο με το πλήθος των διαμερίσεων του n με διακεκριμένα μέρη, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. ■

Π.χ. για $n = 6$

$$\left\{\begin{array}{l} (6) \\ (5,1) \\ (4,2) \\ (3,2,1) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} (5,1) \\ (3,3) \\ (3,1,1,1) \\ (1,1,1,1,1,1) \end{array}\right.$$

Άσκηση 3.13. Βρείτε μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των διαμερίσεων του n με περιττά μέρη και εκείνου με διακεκριμένα μέρη.

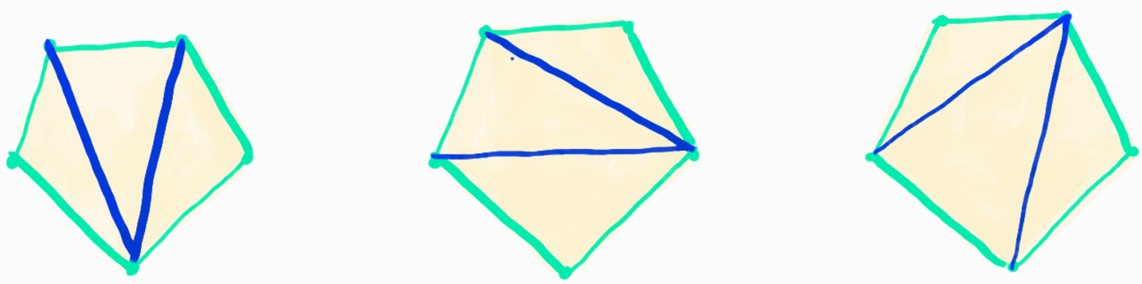
Παράδειγμα 3.14. Έστω a_n το πλήθος των τριγωνισμών ενός κυρτού πολυγώνου Π με $n+2$ κορυφές.



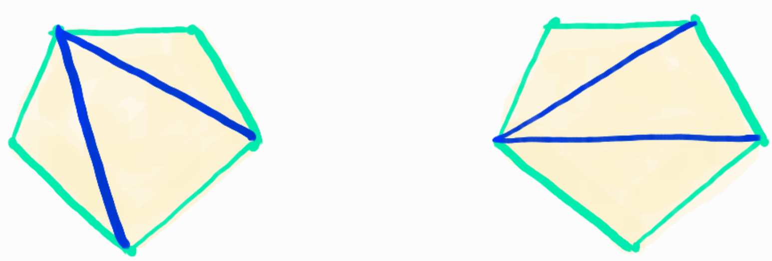
$n = 6$

Έχουμε $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$, $a_4 = 14$, $a_5 = 42$, $a_6 = 132$.

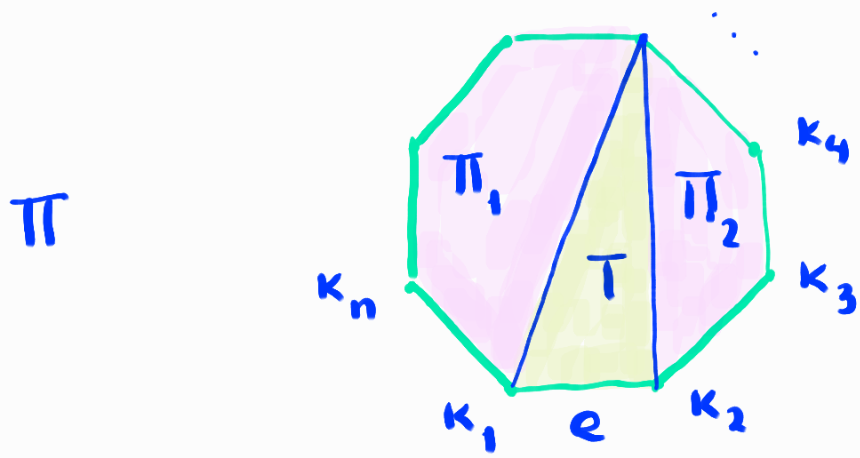
$n = 1, 2$



$n = 3$



Έστω e μια ακμή του πολυγώνου Π. Σε κάθε τριγωνισμό τ του Π, η ακμή e περιέχεται σε μοναδικό τρίγωνο Τ του τ.



Για να τριγωνοποιήσουμε το Π, επιλέγουμε το Τ και τριγωνίζουμε τα δύο πολύγωνα Π_1 και Π_2 που προκύπτουν. Έπεται ότι

- $a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_0 .$

Πολλαπλασιάζοντας επί x^n, αθροίζοντας για $n \geq 1$ και θέτοντας $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ παίρνουμε

- $$F(x) - 1 = \sum_{n\geq 1} a_n x^n$$

$$= \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k} \right) x^n$$

$$= x \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \right) x^n$$

$$= x \, (F(x))^2$$

ή, ισοδύναμα,

$$x(F(x))^2 - F(x) + 1 = 0.$$

Η λύση είναι μοναδική και δίνεται α-
πό τον τύπο

- $$F(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Αναπτύσσοντας

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{1/2} = 1 + \sum_{n\geq 1} \binom{1/2}{n} (-4x)^n$$

βρίσκουμε ότι

- $$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} 4^n \binom{1/2}{n} x^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} (-1)^n 4^{n+1} \binom{1/2}{n+1} x^n$$

και συμπεραίνουμε ότι

- $$a_n = (-1)^n \cdot 2^{2n+1} \binom{1/2}{n+1}$$

$$= \dots$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Ο ακέραιος αυτός είναι γνωστός ως ο n-στός αριθμός Catalan και συχνά συμβολίζεται με C_n.