2. Τυπικές δυναμοσειρές (συνέχεια)

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\mathbb{C}[[x]] = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n x^n : a_n \in \mathbb{C} \right\}$$

είναι ο δακτύλιος των τυπικών δυναμοσειρών με συντελεστές από το $\mathbb{C}$.

Ορισμός 2.4. Για $F_0(x), F_1(x), F_2(x), \ldots \in \mathbb{C}[[x]]$ το άπειρο άθροισμα

$$\sum_{k \geq 0} F_k(x) \qquad (2.2)$$

ορίζεται στο $\mathbb{C}[[x]]$, και λέμε ότι η σειρά (2.2) συγκλίνει στο $\mathbb{C}[[x]]$, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $[x^n]F_k(x) = 0$ εκτός από πεπερασμένου πλήθους δείκτες $k \in \mathbb{N}$.

Π.χ. το

$$\sum_{k \geq 0} (x^k + x^{k+1} + \cdots) = \begin{array}{r} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + \\ x + x^2 + x^3 + \cdots + \\ x^2 + x^3 + \cdots + \\ \vdots \end{array}$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n \geq 0} (n+1) x^n$$

ορίζεται στο $\mathbb{C}[[x]]$, ενώ το

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1}(1+x^k+x^{2k}+\cdots) = \; & 1+x+x^2+x^3+\cdots+ \\ & 1+\phantom{x+{}}x^2+\cdots+ \\ & 1+\phantom{x+x^2+{}}x^3+\cdots+ \\ & \qquad\vdots\end{aligned}$$

όχι.

Παρατήρηση 2.5. Για $F(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ συμβολίζουμε με

$$\deg(F(x))$$

τον ελάχιστο $n \in \mathbb{N}$ για τον οποίο $a_n \neq 0$ (οπότε $\deg(F(x)) = \infty$ αν $F(x) = 0$).

Τότε, η σειρά

$$\sum_{k\geq 0} F_k(x)$$

συγκλίνει στο $\mathbb{C}[[x]]$ εάνν $\deg(F_k(x)) \to \infty$ για $k \to \infty$. ■

Ειδικότερα, αν $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ και $G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ με $G(0) = 0$, τότε ορίζεται στο $\mathbb{C}[[x]]$ η σύνθεση

- $$F(G(x)) = \sum_{n\geq 0} a_n (G(x))^n$$
$$= a_0 + a_1 G(x) + a_2 (G(x))^2 + \cdots$$

Παράδειγμα 2.6. Αν $G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ με $G(0)=0$, τότε ορίζεται η $\sum_{k\geq 0} (G(x))^k$ στο $\mathbb{C}[[x]]$ και

$$\sum_{k\geq 0} (G(x))^k = \frac{1}{1-G(x)}.$$

Ο πρώτος ισχυρισμός έπεται από την Παρατήρηση 2.5 για $F(x) = \sum_{n\geq 0} x^n$. Για το δεύτερο παρατηρούμε ότι για $n \in \mathbb{N}$, $[x^n](G(x))^k = 0$ για $k > n$ και συνεπώς

- $[x^n] \; (1-G(x)) \sum_{k\geq 0} (G(x))^k =$

$$[x^n]\ (1-G(x)) \sum_{k=0}^{n} (G(x))^k =$$

$$[x^n]\ (1-(G(x))^{n+1}) =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{αν } n=0 \\ 0, & \text{αν } n \geq 1. \end{cases}$$

Αυτό δείχνει ότι

$$(1-G(x)) \sum_{k \geq 0} (G(x))^k = 1. \quad \blacksquare$$

Ανάλογες παρατηρήσεις ισχύουν για άπειρα γινόμενα. Π.χ. αν $F_1(x)$, $F_2(x), \ldots \in \mathbb{C}[[x]]$ και $F_k(0)=0$ για κάθε k, τότε το άπειρο γινόμενο

$$\prod_{k\geq 1}(1+F_k(x))$$

ορίζεται στο $\mathbb{C}[[x]]$ όταν $\deg(F_k(x)) \to \infty$ για $k \to \infty$. Στην περίπτωση αυτή

$$[x^n]\prod_{k\geq 1}(1+F_k(x)) := [x^n]\prod_{k=1}^{N}(1+F_k(x))$$

όπου $[x^n]\,F_k(x) = 0$ για $k > N$. Π.χ.

$$\prod_{k\geq 1}(1+x^k) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$$

$$= 1+x+x^2+2x^3+\cdots \in \mathbb{C}[[x]]$$

αλλά

$$\prod_{k\geq 1}(1+x) = (1+x)(1+x)(1+x)\cdots \notin \mathbb{C}[[x]].$$

Άσκηση 2.7. Για ποιες τυπικές δυναμοσειρές $F(x)\in\mathbb{C}[[x]]$ υπάρχει $G(x)\in\mathbb{C}[[x]]$ με $G(0)=0$, τέτοια ώστε

$$F(x) = \sum_{k\geq 1}(G(x))^k \quad ;$$

Λύση. Προφανώς, θα πρέπει $F(0)=0$. Αντιστρόφως, έστω ότι $F(0)=0$. Λόγω του Παραδείγματος 2.6,

$$\sum_{k\geq 1}(G(x))^k = G(x)\cdot\sum_{k\geq 1}(G(x))^{k-1}$$

$$= G(x) \cdot \sum_{k \geq 0} (G(x))^k$$

$$= \frac{G(x)}{1 - G(x)}$$

και η δοσμένη ισότητα γράφεται

- $$F(x) = \frac{G(x)}{1 - G(x)} \iff G(x) = \frac{F(x)}{1 + F(x)}.$$

Άρα, αν $F(0) = 0$, η $G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ ορίζεται μοναδικά και δίνεται από τον τύπο

- $$G(x) = \frac{F(x)}{1 + F(x)} = F(x) \sum_{k \geq 0} (-F(x))^k$$

$$= \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} (F(x))^k. \qquad \blacksquare$$

Ορισμός 2.8. Έστω $\alpha \in \mathbb{C}$ και τυπική δυναμοσειρά $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ με $F(0)=0$. Η διωνυμική σειρά $(1+F(x))^{\alpha} \in \mathbb{C}[[x]]$ ορίζεται από τον τύπο

$$(1+F(x))^{\alpha} = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} (F(x))^n$$

όπου

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1, & n=0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, & n\geq 1. \end{cases}$$

π.χ.

- $$(1+x+x^2)^{-3/2} = \sum_{n\geq 0} \binom{-3/2}{n} (x+x^2)^n$$
$$\in \mathbb{C}[[x]].$$

<u>Παρατήρηση 2.9.</u> Επαληθεύεται ότι ισχύουν οι γνωστοί κανόνες

- $(1+F(x))^{\alpha}(1+F(x))^{\beta} = (1+F(x))^{\alpha+\beta}$
- $(1+F(x))^{\alpha}(1+G(x))^{\alpha} =$
$$= (1+F(x)+G(x)+F(x)G(x))^{\alpha}$$
- $((1+F(x))^{\alpha})^{\beta} = (1+F(x))^{\alpha\beta}$

όταν $F(0) = G(0) = 0$. ■

Παράδειγμα 2.10. Ας δείξουμε την ταυτότητα

$$\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

Για $\alpha = -1/2$ έχουμε

- $$\binom{\alpha}{n} = \binom{-1/2}{n}$$

$$= \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}$$

$$= (-1)^n\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n)}{2\cdot 4\cdots(2n)\cdot 2^n\cdot n!}$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 4^n}$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-1/2} = \sum_{n \geq 0} \binom{-1/2}{n} (-4x)^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} x^n. \quad \blacksquare$$

<u>Άσκηση 2.11.</u> Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$$

για $n \in \mathbb{N}$, όπου

$$c_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}.$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι το δοσμένο άθροισμα ισούται με το συντελεστή του x^n στο τετράγωνο της $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ και ότι

- $$c_n = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1))$$

$$= \frac{1}{n!} \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) \cdots \left(\frac{2n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n+1}{2}\right)$$

$$= (-1)^n \binom{-3/2}{n}.$$

Κατά συνέπεια,

$$\sum_{n\geq 0} c_n x^n = \sum_{n\geq 0} \binom{-3/2}{n} (-x)^n = (1-x)^{-3/2}$$

οπότε

$$\left(\sum_{n\geq 0} c_n x^n\right)^2 = (1-x)^{-3} = \sum_{n\geq 0} \binom{-3}{n} (-x)^n$$

και

$$\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} = [x^n]\ (1-x)^{-3}$$
$$= (-1)^n \binom{-3}{n}$$

$$= (-1)^n \frac{(-3)(-4)\cdots(-2-n)}{n!}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad \blacksquare$$

Ορισμός 2.12. Για $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ ορίζουμε την παράγωγο

$$F'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$$

$$= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \in \mathbb{C}[[x]].$$

π.χ. αν

- $F(x) = \sum_{n\geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$

τότε

- $F'(x) = \sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$
  $= \dfrac{1}{(1-x)^2}.$

Παρατήρηση 2.13. Επαληθεύεται ότι στο $\mathbb{C}[[x]]$ ισχύουν οι γνωστοί κανόνες παραγώγισης

- $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x)$
- $(F(x)\,G(x))' = F'(x)\,G(x) + F(x)\,G'(x)$
- $(1/F(x))' = -F'(x)/(F(x))^2$
- $(F \circ G)'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x)$,

όταν τα αριστερά μέλη ορίζονται στο $\mathbb{C}[[x]]$.

Παράδειγμα 2.14. Ξεκινώντας από την ισότητα από την ισότητα

$$\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

και παραγωγίζοντας k φορές προκύπτουν οι ισοδύναμες ταυτότητες

- $$\sum_{n\geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

- $$\sum_{n\geq k} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

- $$\sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

για $k \in \mathbb{N}$. ■

3. Υποσύνολα, συνθέσεις, διαμερίσεις

Πόσα υποσύνολα του $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ έχουν ακριβώς k στοιχεία; Ας συμβολίσουμε με $C(n,k)$ το πλήθος αυτό.

Πρόταση 3.1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, x^k = (1+x)^n.$$

Πρώτη Απόδειξη. Θεωρούμε την αμφι-μονοσήμαντη απεικόνιση

$$\varphi : 2^{[n]} \longrightarrow \{0,1\}^n$$

του Παραδείγματος 1.1. Για $S \subseteq [n]$ έχουμε $\varphi(S) = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ όπου

$$r_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } i \in S \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $\#S = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ και συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, x^k = \sum_{S \subseteq [n]} x^{\#S}$$

$$= \sum_{(r_1,\ldots,r_n)\in\{0,1\}^n} x^{r_1+r_2+\cdots+r_n}$$

$$= \sum_{(r_1,\ldots,r_n)\in\{0,1\}^n} x^{r_1}\cdot x^{r_2}\cdots x^{r_n}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{r_i\in\{0,1\}} x^{r_i}\Big)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(1+x) = (1+x)^n.$$

<u>Δεύτερη</u> <u>Απόδειξη</u>. Θεωρούμε μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ που ανά δύο μετατίθενται (δηλαδή, $x_i x_j = x_j x_i$). Με επα-

γωγή στο n δείχνει κανείς ότι

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) = \sum_{S\subseteq[n]} x_S \qquad (3.1)$$

όπου

- $$x_S = \prod_{i\in S} x_i$$

για $S\subseteq[n]$. Π.χ. για $n=2$

- $(1+x_1)(1+x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1x_2$.

Θέτοντας $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ στην (3.1), αφού $x_S = x^{\#S}$, παίρνουμε ότι

$$(1+x)^n = \sum_{S\subseteq[n]} x^{\#S} = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\,x^k. \quad \blacksquare$$

Από την Πρόταση 3.1 και το Διωνυμικό Θεώρημα

$$(1+x)^{a} = \sum_{k\geq 0} \binom{a}{k} x^{k}$$

προκύπτει ο εξής τύπος.

Πόρισμα 3.2. Το πλήθος $C(n,k)$ των υποσυνόλων του $[n]$ με k στοιχεία δίνεται από τον τύπο

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \quad \blacksquare$$

Ας δώσουμε μια ευθεία απόδειξη του Πορίσματος 3.2. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$n! = k!\,(n-k)!\ C(n,k).$$

Έστω X_n το σύνολο των αναδιατάξεων του $[n]$ και έστω

$$\binom{[n]}{k}$$

το σύνολο των k-υποσυνόλων του $[n]$ (υποσύνολα με k στοιχεία). Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f : X_n \longrightarrow \binom{[n]}{k}$$

που ορίζεται θέτοντας

$$f(\sigma) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\}$$

για κάθε $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in X_n$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $S \in \binom{[n]}{k}$ υπάρχουν ακριβώς $m := k!(n-k)!$ αναδιατάξεις $\sigma \in X_n$ τέτοιες ώστε $f(\sigma) = S$. Από αυτό και την Πρόταση 1.4 συμπεραίνουμε ότι

$$n! = \# X_n = m \cdot \# \binom{[n]}{k}$$

$$= k!\,(n-k)!\; C(n,k).$$

Μπορούμε τώρα να αντικαταστήσουμε το C(n, k) με το διωνυμικό συντελεστή $\binom{n}{k}$, οπότε η Πρόταση 3.1 παίρνει τη συνήθη μορφή του Διωνυμικού Θεωρήματος

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k. \qquad (3.2)$$

Από την (3.2) προκύπτουν εύκολα γνωστές ταυτότητες για τους διωνυμικούς συντελεστές. Π.χ. εξισώνοντας τους συντελεστές του x^k στην ταυτότητα

- $(1+x)^n = (1+x)(1+x)^{n-1}$

  $= (1+x)^{n-1} + x(1+x)^{n-1}$

προκύπτει ο αναδρομικός τύπος

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$

Θέτοντας $x=1$ και $x=-1$ στην (3.2) παίρνουμε

- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

και

- $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 1, & \text{αν } n=0 \\ 0, & \text{αν } n \geq 1, \end{cases}$

αντίστοιχα. Κατά συνέπεια,

- $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$

$$= 2^{n-1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Επίσης, παραγωγίζοντας την (3.2) ως προς x και θέτοντας $x=1$ παίρνουμε ότι

- $$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

κ.ο.κ.

Η (3.2) μπορεί να γραφεί στην ομογενοποιημένη μορφή

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Ας αποδείξουμε την εξής γενίκευση.

Πρόταση 3.3. Για θετικούς ακεραίους n, r και μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_r$ που ανά δύο μετατίθενται

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_r} x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r}$$

όπου το άθροισμα διατρέχει όλα τα διανύσματα $(n_1, n_2, \dots, n_r) \in \mathbb{N}^r$ με $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ και

$$\binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_r} := \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$$

είναι ο αντίστοιχος πολυωνυμικός συντελεστής.

Απόδειξη (ΣΧΕΔΙΟ) Παρατηρούμε (με επαγωγή στο n) ότι

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n = (x_1+x_2+\cdots+x_r)\cdots(x_1+\cdots+x_r)$$

$$= \sum_{f:[n]\to[r]} x_{f(1)}x_{f(2)}\cdots x_{f(n)}$$

Έστω $B_n(r)$ το σύνολο όλων των r^n απεικονίσεων $f:[n]\longrightarrow[r]$ και έστω $A_n(r)$ το σύνολο των ακολουθιών

$$(S_1, S_2, \ldots, S_r)$$

ξένων ανά δύο υποσυνόλων $S_1, \ldots, S_r$

του $[n]$ με $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_r = [n]$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varphi : A_n(r) \longrightarrow B_n(r)$$

που ορίζεται θέτοντας $\varphi(\sigma) = f$ για $\sigma = (S_1, S_2, \ldots, S_r) \in A_n(r)$, όπου $f \in B_n(r)$ είναι η απεικόνιση $f : [n] \to [r]$ για την οποία $f(i) = j \Leftrightarrow i \in S_j$.

Η απεικόνιση φ είναι αμφιμονοσήμαντη και έχει την ιδιότητα ότι

- $$x_{f(1)} x_{f(2)} \cdots x_{f(n)} = x_1^{\# S_1} x_2^{\# S_2} \cdots x_r^{\# S_r}$$

αν $f = \varphi(S_1, S_2, \ldots, S_r)$. Από αυτά συμπεραίνουμε ότι

- $$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n = \sum_{f\in B_n(r)} x_{f(1)}x_{f(2)}\cdots x_{f(n)}$$

$$= \sum_{(S_1,\dots,S_r)\in A_n(r)} x_1^{\#S_1}\cdots x_r^{\#S_r}$$

$$= \sum_{n_1+\cdots+n_r=n} \binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}$$

όπου το $\binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_r}$ ορίζεται ως το πλήθος των $\sigma = (S_1, S_2, \dots, S_r) \in A_n(r)$ με $\#S_j = n_j$ για κάθε $j \in [r]$. Με μια απλή εφαρμογή της Πρότασης 1.4 βρίσκουμε ότι

- $$\binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_r} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{r-1}}{n_r}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!}\cdots$$

$$= \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}. \quad \blacksquare$$