Συνδυαστική Θεωρία

Χ. Α. Αθανασιάδης
caath@math.uoa.gr
users.uoa.gr/~caath

Ηλεκτρονική Τάξη

eclass.uoa.gr/courses/MATH675/

Βιβλιογραφία - Πληροφορίες

users.uoa.gr/~caath/actheory.html

Βαθμολόγηση

κατ' οίκον εργασίες

1. Απαρίθμηση και Γεννήτριες Συναρτήσεις

Ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε το πλήθος, έστω a_n, των στοιχείων ενός συνόλου A_n, για κάθε $n \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Παράδειγμα 1.1. Αν a_n είναι το πλήθος των υποσυνόλων του

$$[n] := \{1, 2, \ldots, n\},$$

τότε $a_n = 2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, έστω $A_n = 2^{[n]}$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων (δυναμοσύνολο) του $[n]$ και έστω

$$\begin{aligned} B_n &= \{0,1\}^n \\ &= \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\} \\ &= \{ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i \in \{0,1\} \}, \end{aligned}$$

π.χ.

- $A_2 = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\} \}$
- $B_2 = \{ (0,0), (1,0), (0,1), (1,1) \}$.

Προφανώς, $\# B_n = 2^n$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varphi : A_n \longrightarrow B_n$$

που ορίζεται θέτοντας

$$\varphi(S) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$$

για $S \subseteq [n]$, όπου

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } i \in S \\ 0, & \text{αν } i \notin S \end{cases}$$

για $i \in [n]$. Π.χ. για $n=5$ και $S = \{2,3,5\}$ έχουμε $\varphi(S) = (0,1,1,0,1)$.

Παρατηρούμε ότι η $\varphi : A_n \to B_n$ είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1 και επί), με αντίστροφη την $\psi : B_n \to A_n$ για την οποία

$$\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = \{ i \in [n] : \varepsilon_i = 1 \}$$

για $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}$. Π.χ. για $n = 2$

- $\psi(0,0) = \emptyset$
- $\psi(0,1) = \{2\}$
- $\psi(1,0) = \{1\}$
- $\psi(1,1) = \{1,2\}$.

Από την ακόλουθη πρόταση έπεται ότι $\#A_n = \#B_n = 2^n$ για $n \in \mathbb{N}$. ■

Πρόταση 1.2. Αν $\varphi : X \to Y$ είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση πεπερασμένων συνόλων, τότε

$$\# X = \# Y.$$

Παράδειγμα 1.3. Αναδιάταξη του $[n]$ λέγεται κάθε ακολουθία $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ στην οποία κάθε στοιχείο του $[n]$ εμφανίζεται ακριβώς μία φορά.

Έστω a_n το πλήθος των αναδιατάξεων του $[n]$. Θα δείξουμε ότι $a_n = n!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω A_n το σύνολο των αναδιατάξεων του $[n]$ και έστω

$$f : A_n \to A_{n-1}$$

η απεικόνιση για την οποία $\varphi(\sigma)$ είναι η ακολουθία που προκύπτει από τη $\sigma \in A_n$ διαγράφοντας τον όρο n.

Π.χ.

- $A_3 = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1),$
$(3,1,2), (3,2,1)\}$

και

- $f(1,2,3) = f(1,3,2) = f(3,1,2) = (1,2)$
- $f(2,1,3) = f(2,3,1) = f(3,2,1) = (2,1)$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $\tau \in A_{n-1}$ υπάρχουν ακριβώς n σε πλήθος $\sigma \in A_n$ τέτοιες ώστε $f(\sigma) = \tau$, δηλαδή ότι

$$\# f^{-1}(\{\tau\}) = n.$$

Από αυτό και την ακόλουθη πρόταση έπεται ότι

$$a_n = \# A_n = n\,(\# A_{n-1}) = n\,a_{n-1},$$

από όπου ο τύπος $a_n = n!$ προκύπτει άμεσα με επαγωγή στο n.

<u>**Πρόταση 1.4.**</u> Έστω $m \in \mathbb{N}$. Αν $f : X \to Y$ είναι απεικόνιση πεπερασμένων συνόλων και

$$\#\{x \in X : f(x) = y\} = m$$

για κάθε $y \in Y$, τότε $\# X = m\,(\# Y)$.

■

Άσκηση 1.5. Έστω A_n το σύνολο των αναδιατάξεων του $[n]$, όπως στο Παράδειγμα 1.3. Βρείτε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση

$$\varphi : A_n \to [1] \times [2] \times \cdots \times [n].$$

Παράδειγμα 1.6. Έστω a_n το πλήθος των υποσυνόλων του $[n]$ που δεν περιέχουν δύο διαδοχικούς ακραίους. Έτσι, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 8$. Π.χ. για $n = 4$ έχουμε τα οκτώ υποσύνολα

$\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,4\}$

του $\{1,2,3,4\}$ που δεν περιέχουν διαδοχικούς ακεραίους.

Υπάρχουν

- a_{n-1} τέτοια υποσύνολα $S \subseteq [n]$ με $n \notin S$,
- a_{n-2} τέτοια υποσύνολα $S \subseteq [n]$ με $n \in S$

και συνεπώς

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (1.1)$$

για $n\geq 2$, όπου $a_0=1$, $a_1=2$. ■

Χρήσιμο εργαλείο σε τέτοιες περιστάσεις αποτελεί η έννοια της γεννήτριας συνάρτησης.

Ορισμός 1.7. Δίνεται ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μιγαδικών αριθμών. Η τυπική δυναμοσειρά

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

λέγεται (συνήθης) γεννήτρια συνάρτηση της (a_n). Η

$$\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

λέγεται εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της (a_n).

Π.χ. για τις (a_n) και $(b)_n$ με

- $a_n = 2^n$
- $b_n = n!$

για $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

- $$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$$
- $$\sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Έστω τώρα η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του Παραδείγματος 1.6, οπότε $a_0=1$, $a_1=2$ και

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (1.1)$$

για $n\geq 2$. Θέτοντας

- $$F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 5x^3 + 8x^4 + \cdots$$

υπολογίζουμε ότι

- $$F(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n\geq 2} a_n x^n$$

$$= 1 + 2x + \sum_{n\geq 2} (a_{n-1} + a_{n-2})\, x^n$$

$$= 1 + 2x + x \sum_{n\geq 2} a_{n-1}\, x^{n-1}$$

$$+ x^2 \sum_{n\geq 2} a_{n-2}\, x^{n-2}$$

$$= 1 + 2x + x\,(F(x) - 1) + x^2 F(x)$$

$$= 1 + x + (x + x^2)\, F(x)$$

από όπου προκύπτει ο τύπος

$$F(x) = \frac{1+x}{1-x-x^2}. \qquad (1.2)$$

Χρησιμοποιώντας την παραγοντοποίηση

$$1-x-x^2 = (1-\tau x)(1-\bar{\tau} x),$$

όπου

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \bar{\tau} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

και διασπώντας το δεξιό μέλος της (1.2) όπως στον απειροστικό λογισμό βρίσκουμε ότι

$$F(x) = \frac{1+x}{(1-\tau x)(1-\bar{\tau} x)} = \frac{\alpha}{1-\tau x} + \frac{\beta}{1-\bar{\tau} x}$$

όπου $\alpha = \tau^2/\sqrt{5}$ και $\beta = -\bar{\tau}^2/\sqrt{5}$.

Αναπτύσσοντας

- $$\frac{1}{1-\tau x} = \sum_{n\geq 0} \tau^n x^n$$

- $$\frac{1}{1-\bar{\tau} x} = \sum_{n\geq 0} \bar{\tau}^n x^n$$

καταλήγουμε στον τύπο

- $$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n\geq 0} \tau^{n+2} x^n - \sum_{n\geq 0} \bar{\tau}^{n+2} x^n\right)$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{\tau^{n+2} - \bar{\tau}^{n+2}}{\sqrt{5}} x^n$$

και συμπεραίνουμε ότι

$$a_n = \frac{\tau^{n+2} - \bar{\tau}^{n+2}}{\sqrt{5}} \qquad (1.3)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρώντας ότι $|\bar{\tau}| < 1$ προκύπτει ο ασυμπτωτικός τύπος

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2}$$

για $n \to \infty$. ■

Παράδειγμα 1.8. Ας βρούμε έναν τύπο για το γενικό όρο της ακολουθίας (a_n) που ορίζεται αναδρομικά από τις $a_0 = 1$ και

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 1 \qquad (1.4)$$

για $n \geq 1$. Θέτοντας

- $$F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

βρίσκουμε ότι

- $$(F(x))^2 = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \cdot (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$$

$$= a_0^2 + (a_0 a_1 + a_1 a_0) x + (a_0 a_2 + a_1^2 + a_2 a_0) x^2 + \cdots$$

$$= \sum_{n\geq 0} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0) x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \right) x^n$$

$$\overset{(1.4)}{=\!=} \sum_{n\geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$= \frac{1}{1-x},$$

οπότε

- $F(x) = \sqrt{\dfrac{1}{1-x}} = (1-x)^{-1/2}.$

Από το Διωνυμικό θεώρημα

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$$

όπου

- $$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1, & n=0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, & n\geq 1 \end{cases}$$

προκύπτει ότι

- $$F(x) = \sum_{n\geq 0} \binom{-1/2}{n} (-x)^n$$

και συνεπώς ότι

- $$a_n = (-1)^n \binom{-1/2}{n}$$

$$= (-1)^n \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-1}{2}\right)$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. ■

2. Τυπικές Δυναμοσειρές

Συμβολίζουμε με $\mathbb{C}[[x]]$ το σύνολο

$$\left\{ \sum_{n \geq 0} a_n x^n : a_n \in \mathbb{C} \right\}$$

των τυπικών δυναμοσειρών με συντελεστές $a_n \in \mathbb{C}$. Εξ' ορισμού, στο $\mathbb{C}[[x]]$

έχουμε

- $\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} b_n x^n \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow a_n = b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Γράφουμε

- $a_n = [x^n]\, F(x)$
- $a_0 = F(0)$ (σταθερός όρος της $F(x)$)

αν $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$.

Στο σύνολο $\mathbb{C}[[x]]$ ορίζουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό θέτοντας

- $$\Big(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\Big) + \Big(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\Big) = \sum_{n\geq 0} (a_n+b_n) x^n$$

- $$\Big(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\Big) =$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots$$

$$= \sum_{n\geq 0} c_n x^n,$$

όπου

- $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

για $n \in \mathbb{N}$. π.χ. αν

- $F(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$

- $G(x) = \sum_{n \geq 0} (n+1) x^n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$

τότε

- $F(x) + G(x) = 2 + 3x + 4x^2 + 5x^3 + \cdots$
- $F(x) G(x) = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots$

Με τις πράξεις αυτές το $\mathbb{C}[[x]]$ καθίσταται μεταθετικός δακτύλιος, με μηδενικό στοιχείο και μονάδα

- $0 = 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \cdots$
- $1 = 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \cdots$

Η $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του $\mathbb{C}[[x]]$ αν υπάρχει $G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ τέτοια ώστε $F(x)\,G(x) = 1$. Τότε, γράφουμε

- $G(x) = (F(x))^{-1} = \dfrac{1}{F(x)}$.

Π.χ. για $a \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n\geq 0} \alpha^n x^n = 1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \cdots$$
$$= \frac{1}{1-\alpha x} \qquad (2.1)$$

διότι

$$(1-\alpha x)(1+\alpha x+\alpha^2 x^2+\alpha^3 x^3+\cdots) =$$
$$= 1 + (\alpha-\alpha)x + (\alpha^2-\alpha\cdot\alpha)x^2 + \cdots = 1$$

στο $\mathbb{C}[[x]]$.

Πρόταση 2.1. Η $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ είναι αντιστρέψιμη εάνν $a_0 \neq 0$ (δηλαδή $F(0)\neq 0$).

Απόδειξη. Για $G(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ έχουμε

- $F(x)\, G(x) = 1 \iff$

$$\iff a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n\geq 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0 b_0 = 1 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \\ \quad \vdots \end{cases} \qquad (2.2)$$

Επομένως, η $F(x)$ είναι αντιστρέψιμη στο $\mathbb{C}[[x]]$ εάνν το σύστημα (2.2) με αγνώστους $b_0, b_1, b_2, \ldots$ έχει λύση.

Αυτό συμβαίνει εάνν $a_0 \neq 0$ αφού $a_0 b_0 = 1 \Rightarrow a_0 \neq 0$ και αντιστρόφως, αν $a_0 \neq 0$, τότε το (2.2) έχει μοναδική λύση

$$\begin{cases} b_0 = 1/a_0 \\ b_1 = -a_1 b_0 / a_0 \\ b_2 = -(a_1 b_1 + a_2 b_0)/a_0 \\ \quad\vdots \end{cases}$$

■

<u>Άσκηση 2.2.</u> Για τις (a_n) και (b_n) γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = n \cdot 2^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Αν

$$\sum_{k=0}^{n} a_n x^n = \frac{1}{(1+x)(1-2x)},$$

υπολογίστε το b_n για $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη.

$$\sum_{n\geq 0} n x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) x^n$$

$$= (1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}. \qquad (2.3)$$

Λύση. Έστω

- $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$

- $G(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$.

Τότε,

- $$F(x)G(x) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} n\, 2^{n-1} x^n$$

$$= x \sum_{n\geq 0} n\,(2x)^{n-1}$$

$$\overset{(2.3)}{=\!=} \frac{x}{(1-2x)^2}.$$

Αφού δίνεται ότι $F(x) = 1/(1+x)(1-2x)$ συμπεραίνουμε ότι

- $$G(x) = (1+x)(1-2x)\frac{x}{(1-2x)^2}$$

$$= \frac{x(1+x)}{1-2x}$$

$$= (x+x^2)\sum_{n\geq 0} 2^n x^n$$

$$= \sum_{n\geq 1} 2^{n-1} x^n + \sum_{n\geq 2} 2^{n-2} x^n$$

οπότε $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ και $b_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} = 3 \cdot 2^{n-2}$ για $n \geq 2$. ■

Άσκηση 2.3. Για μη μηδενικούς μιγαδικούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ δίνεται ότι

$$\alpha_1^n + \alpha_2^n + \cdots + \alpha_r^n = \beta_1^n + \beta_2^n + \cdots + \beta_s^n \quad (2.4)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0} := \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Δείξτε ότι $r = s$ και ότι τα $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ προκύπτουν από κάποια αναδιάταξη των $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$.

Λύση. Πολλαπλασιάζουμε την (2.4) με x^n και αθροίζουμε για $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Λόγω της (2.1), προκύπτει ότι

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i x}{1-\alpha_i x} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\beta_j x}{1-\beta_j x} \qquad (2.5)$$

στο $\mathbb{C}[[x]]$. Για τυχαίο $\gamma \in \mathbb{C}$, πολλαπλασιάζουμε τη (2.5) με $1-\gamma x$ και θέτουμε $x = 1/\gamma$. Αφού

$$(1-\gamma x) \left. \frac{\delta x}{1-\delta x} \right|_{x=1/\gamma} = \begin{cases} 1, & \text{αν } \delta = \gamma \\ 0, & \text{αν } \delta \neq \gamma \end{cases}$$

για $\delta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, προκύπτει ότι η πολλαπλότητα με την οποία εμφανίζεται το γ ανάμεσα στα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ είναι ίση με εκείνη με την οποία εμ-

φανίζεται ανάμεσα στα $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_5$.
Έπεται το ζητούμενο. ∎