Σημειώσεις για το μάθημα Γραμμική Άλγεβρα I

Σχέσεις και συναρτήσεις

Έστω ένα σύνολο X. Μια σχέση στο X είναι ένα υποσύνολο $R \subseteq X \times X$.. Αν $(x_1, x_2) \in R$, λέμε ότι x_1 σχετίζεται με το x_2 (μέσω της R) και γράφουμε $x_1 \sim x_2$.

Μια σχέση καλείται σχέση ισοδυναμίας αν:
(i) ειναι αυτοπαθής, ήτοι για κάθε $x \in X$ είναι $x \sim x$, (δηλαδή $(x, x) \in R$),
(ii) είναι συμμετρική, ήτοι αν $x, y \in X$ και $x \sim y$, τότε $y \sim x$ και
(iii) είναι μεταβατική, ήτοι αν $x, y, z \in X$ με $x \sim y$ και $y \sim z$, τότε $x \sim z$.

Παραδείγματα
(i) Έστω $X = \{$σημεία του επιπέδου$\}$ και $0 \in X$.
Ορίζουμε μια σχέση στο X ως εξής: Αν $P, Q \in X$ με $P \sim Q \Leftrightarrow$ τα P, Q ισαπέχουν από το 0 (δηλαδή αν και μόνο αν $d(P, 0) = d(Q, 0)$). Η σχέση αυτή είναι μια σχέση ισοδυναμίας.
(ii) Έστω $X = \mathbb{N}$.
Ορίζουμε μια σχέση στο X ως εξής: Αν $\alpha, \beta \in X$ λέμε ότι $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow$ οι αριθμοί α και β έχουν το ίδιο ψηφίο μονάδων στο δεκαδικό τους ανάπτυγμα (π.χ. $106 \sim 76$).Είναι σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός
Αν $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο X, τότε για κάθε $x \in X$ ορίζουμε την κλάση ισοδυναμίας $[x]$ του x, ως εξής: $[x] = \{y \in X : x \sim y\} \subseteq X$.

Ιδιότητες
(i) $[x] \neq \emptyset$ για κάθε $x \in X$ (καθώς $x \in [x]$ μιας και $x \sim x$).
(ii) Αν $x, y \in X$, τότε $[x] = [y]$ ή $[x] \cap [y] = \emptyset$.
Απόδειξη: Αν $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ επιλέγουμε $z \in [x] \cap [y]$. Θα δείξουμε ότι $[x] = [y]$, δηλαδή ότι $[x] \subseteq [y]$ και $[y] \subseteq [x]$. Για παράδειγμα, θα δείξουμε ότι $[x] \subseteq [y]$.
Έστω $\omega \in [x]$. Τότε, $\omega \sim x$. Όμως, $z \in [x]$ και άρα $x \sim z$. Συνεπώς, $w \sim z$. Όμως, $z \in [y]$ και άρα $z \sim y$. Συνεπώς, $w \sim y \Rightarrow w \in [y]$.
(iii) $X = \bigcup\limits_{x \in X} [x]$. Αυτό ισχύει διότι αν $x \in X$ τότε $x \in [x] \subseteq \bigcup\limits_{x \in X} [x]$.

Ορισμός
Μια διαμέριση του X είναι μια συλλογή F υποσυνόλων του, τέτοια ώστε:
(i) αν $Y \in F$ τότε $Y \neq \emptyset$,
(ii) αν $Y, Y' \in F$ τότε $Y = Y'$ ή $Y \cap Y' = \emptyset$ και
(iii) $X = \bigcup\limits_{Y \in F} Y$.

Παραδείγματα
(i) Έστω $X = \{$σημεία του επιπέδου$\}$, $0 \in X$ και $P \sim Q \Leftrightarrow d(P, 0) = d(Q, 0)$.
Εδώ, αν $P \in X$ τότε $[P] = \{$σημεία του κύκλου με κέντρο το Ο και ακτίνα $d(P, 0)\}$.
(ii) Έστω $X = \mathbb{N}$ και η σχέση $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow$ οι α, β έχουν το ίδιο τελευταίο ψηφίο.
Εδώ, αν $\alpha \in X$ τότε $[\alpha] = \{\alpha + 10n,\ n \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$.

Ορισμός
Αν $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο X, το σύνολο πηλίκο $X/\sim$ είναι ακριβώς το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας. Με άλλα λόγια $X/\sim = \{[x] : x \in X\}$

Παραδείγματα
(i) $X/\sim = \{c_r : r \geq 0\}$, με $c_r =$ ο κύκλος στο επίπεδο με κέντρο το Ο και ακτίνα r.
(ii) $X/\sim = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]\}$, όπου, για παράδειγμα, $[2] = \{2, 12, 22, 32, \ldots\}$.

Ορισμός

Θεωρούμε δύο σύνολα $X \neq 0$ και $Y \neq 0$. Μια συνάρτηση (απεικόνιση) $f : X \to Y$ είναι ένα υποσύνολο $\Gamma_f \subseteq X \times Y$ που ειναι τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ υπάρχει ένα μοναδικό $y \in Y$ με $(x, y) \in \Gamma_f$ (οπότε γράφουμε $y = f(x)$).

Ορισμοί

Αν X, Y, Z είναι σύνολα, $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ είναι απεικονίσεις, μπορούμε να ορίσουμε τη σύνθεση $g \circ f : X \to Z$, θέτοντας $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ για κάθε $x \in X$.
Η συνάρτηση $f : X \to Y$ καλείται $1-1$ ανν για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$ είναι $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Η συνάρτηση f καλείται επί ανν για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $y = f(x)$.

Παραδείγματα

(i) Αν οι $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ είναι $1-1$, τότε η $g \circ f$ είναι επίσης $1-1$.
Πράγματι, αν $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$ και άρα $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, δηλαδή $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$ και άρα η $g \circ f$ ειναι $1-1$.
(ii) Αν οι $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ είναι επί, τότε η $g \circ f$ είναι επίσης επί.
Πράγματι, αν $z \in Z$ τότε υπάρχει $y \in Y$ με $z = g(y)$. Επίσης, υπάρχει $x \in X$ με $y = f(x)$. Συνεπώς, $z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ και άρα η $g \circ f$ είναι επί.
(iii) Αν $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ είναι συναρτήσεις και η $g \circ f : X \to Z$ είναι $1-1$, τότε η f ειναι επίσης $1-1$.
Απόδειξη:
Έστω προς άτοπο ότι $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2) \in Y$ τότε $(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) \in Z$. Αυτό είναι άτοπο μιας και η $g \circ f$ είναι $1-1$. Θα πρέπει λοιπόν να είναι $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ και άρα η f είναι $1-1$.
(iv) Αν $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ είναι απεικονίσεις και η $g \circ f : X \to Z$ είναι επί, τότε η g είναι επίσης επί.
Απόδειξη:
Θεωρούμε $z \in Z$. Καθώς η $g \circ f$ είναι επί, υπάρχει $x \in X$ με $z = (g \circ f)(x)$, δηλαδή $z = g(f(x))$, όπου $f(x) \in Y$. Άρα, η g είναι επί.

Ορισμός

Αν X είναι ένα σύνολο, τότε η ταυτοτική απεικόνιση $Id_X : X \to X$ είναι η απεικόνιση με $Id_X(x) = x$ για κάθε $x \in X$.

Πρόταση

Έστω $X \neq 0, Y \neq 0$ σύνολα, και $f : X \to Y$ μια απεικόνιση.
(i) η f είναι $1-1$ ανν υπάρχει $r : Y \to X$ με $r \circ f = Id_X$
(ii) η f είναι επί ανν υπάρχει απεικόνιση $s : Y \to X$ με $f \circ s = Id_Y$
(iii) η f είναι $1-1$ και επί ανν υπάρχει $g : Y \to X$ με $f \circ g = Id_Y$ και $g \circ f = Id_X$ (στην περίπτωση αυτή η απεικόνιση g είναι μοναδική και γράφουμε $g = f^{-1}$).
Απόδειξη:
(i) Αν υπάρχει $r : Y \to X$ με $r \circ f = Id_X$, τότε, καθώς η $r \circ f = Id_X$ είναι 1-1, και η f είναι $1-1$.
Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η f είναι $1-1$. Θεωρούμε ένα στοιχείο $x_0 \in X$ και ορίζουμε μια απεικόνιση $r : Y \to X$, ως εξής: Αν για το $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $y = f(x)$, ορίζουμε $r(y) = x$. Αν για το $y \in Y$ δεν υπάρχει $x \in X$ με $y = f(x)$, ορίζουμε $r(y) = x_0$. Τότε, για κάθε $x \in X$ είναι $(r \circ f)(x) = r(f(x)) = x = Id_X(x)$.
(ii) Αν υπάρχει $s : Y \to X$ με $f \circ s = Id_Y$, τότε, καθώς η $f \circ s = Id_Y : Y \to Y$ είναι επί, και η f είναι επί.
Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η $f : X \to Y$ είναι επί. Ορίζουμε μια συνάρτηση $s : Y \to X$, ως εξής: Για κάθε $y \in Y$ επιλέγουμε ένα $x \in X$ με $y = f(x)$ και ορίζουμε $s(y) := x$. Τότε για κάθε $y \in Y$ είναι $(f \circ s)(y) = f(s(y)) = y = Id_Y$ και άρα $f \circ s = Id_Y$.
(iii) Αν υπάρχει $g : Y \to X$ με $f \circ g = Id_Y$ και $g \circ f = Id_X$, τότε η f είναι $1-1$ (η

$g \circ f : 1-1 \Rightarrow f : 1-1$) και επί (η $f \circ g$ επί $\Rightarrow$ fεπί).
Αντίστροφα, αν η f είναι $1-1$ και επί, τότε υπάρχουν $r, s : Y \to X$ με $r \circ f = Id_X$ και $f \circ s = Id_Y$. Όμως, για κάθε $y \in Y$ είναι $r(y) = r(Id_Y(y)) = r((f \circ s)(y)) = r(f(s(y))) = (r \circ f)(s(y)) = Id_X(s(y)) = s(y)$ και άρα $r = s$.

Ορισμός

Έστω X, Y σύνολα διάφορα του κενού συνόλου και $f : X \to Y$ μια απεικόνιση.
(i) Αν $A \subseteq X$, τότε $f(A) = \{y \in Y : \text{υπάρχει } x \in A \text{ με } y = f(x)\} \subseteq Y$.
(ii) Αν $B \subseteq Y$, τότε $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\ \} \subseteq X$.

Ιδιότητες

(i) Για κάθε $A \subseteq X$ είναι $A \subseteq f^{-1}[f(A)]$ με την ισότητα να ισχύει αν η f είναι $1-1$.
Πράγματι, αν $a \in A$ τότε είναι $f(a) \in f(A)$ και άρα $a \in f^{-1}[f(A)]$. Συνεπώς, είναι $A \subseteq f^{-1}[f(A)]$. Αν η f είναι $1-1$ και $x \in f^{-1}[f(A)]$ τότε $f(x) \in f(A)$ και άρα $f(x) = f(a)$, για κάποιο $a \in A$. Καθώς η f είναι $1-1$, έπεται ότι $x = a \in A$ και άρα $f^{-1}[f(a)] \subseteq A$.
(ii) Για κάθε $B \subseteq Y$ είναι $f[f^{-1}(B)] \subseteq B$ με την ισότητα να ισχύει αν η f είναι επί.
Πράγματι, αν $y \in f[f^{-1}(B)]$, τότε υπάρχει $a \in f^{-1}(B)$ με $y = f(a)$. Καθώς $a \in f^{-1}(B)$, είναι $f(a) \in B$, δηλαδή $y \in B$. Συνεπώς, είναι $f[f^{-1}(B)] \subseteq B$.
Υποθέτοντας τώρα ότι η f είναι επί, θεωρούμε $y \in B$. Τότε, υπάρχει $x \in X$ με $y = f(x)$. Για αυτό το $x \in X$ είναι $f(x) = y \in B$ και άρα $x \in f^{-1}(B)$. Έτσι, $y = f(x) \in f[f^{-1}(B)]$ και άρα $B \subseteq f[f^{-1}(B)]$.

Μαθηματική επαγωγή

1η μορφή της επαγωγής: Αν $A \subseteq \mathbb{N}$ είναι ένα υποσύνολο τέτοιο ώστε $0 \in A$ και για κάθε $n \in A$ είναι $n+1 \in A$, τότε $A = \mathbb{N}$.
2η μορφή της επαγωγής: Κάθε μη-κενό υποσύνολο $B \subseteq \mathbb{N}$ έχει ένα ελάχιστο στοιχείο.

Παραδείγματα

(i) Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
Έστω $A = \{n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1\}$. Τότε, είναι $0 \in A$ διότι $2^0 = 2^{0+1} - 1$. Επίσης, αν υποθέσουμε ότι $n \in A$, τότε είναι $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ και άρα $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n+1} = (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$. Συνεπώς, είναι $n + 1 \in A$. Έτσι, έπεται ότι $A = \mathbb{N}$.
(ii) Θεωρούμε το σύνολο $X = \{2, 3, 4, 5, 6, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Ο αριθμός $p \in X$ λεγεται πρώτος αν δεν υπάρχουν $x, y \in X$ με $p = xy$ (για παράδειγμα, ο αριθμός 7 είναι πρώτος, ενώ ο 12 δεν είναι, καθώς $12 = 2 \cdot 6$). Κάθε αριθμός $x \in X$ γράφεται ως γινόμενο πρώτων αριθμών.
Πράγματι, μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο
$Y = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \text{ και ο } n \text{ δεν μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρώτων αριθμών}\}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $Y = \emptyset$. Ας υποθέσουμε ότι $Y \neq \emptyset$. Τότε, το Y έχει ένα ελάχιστο στοιχείο, έστω n. Ο αριθμός n δεν μπορεί να είναι πρώτος. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε $n = xy$ για κάποια $x, y \in X$. Καθώς είναι $x, y < n$, έπεται ότι $x, y \notin Y$. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε τους x, y ως γινόμενα πρώτων. Τότε όμως ο $n = xy$ είναι επίσης γινόμενο πρώτων, δηλαδή $n \notin Y$, άτοπο.

Πίνακες

Ένας (πραγματικός ή μιγαδικός) $n \times m$ πίνακας A είναι ένα παράταγμα nm στοιχείων (του $\mathbb{R}$ ή του $\mathbb{C}$), ως εξής:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Γράφουμε συμβολικά $A = (a_{ij})_{i,j}$. Για παράδειγμα, ο $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ είναι ένας 2×3 πίνακας.

Αν $n = m$, ο πίνακας καλείται τετραγωνικός. Για παράδειγμα, ο $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ είναι ένας τετραγωνικός 2×2 πίνακας.
Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$ λέγεται άνω τριγωνικός αν $a_{ij} = 0$ για $i > j$.
$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$
Ο $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται κάτω τριγωνικός αν $a_{ij} = 0$ για $i < j$.
$$A = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$
Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = a_{ij}$ λέγεται διαγώνιος αν $a_{ij} = 0$ για $i \neq j$.
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
Ένας $1 \times m$ πίνακας $A = (a_{11}a_{12} \dots a_{1m})$ καλείται πίνακας/-γραμμή. Κάθε $n \times m$ πίνακας A μπορεί να γραφτεί ως $A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, όπου $r_1, r_2, \dots, r_n$ είναι πίνακες/-γραμμή διαστάσεων $1 \times m$ (οι γραμμές του πίνακα A).
Ένας $n \times 1$ πίνακας $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ καλείται πίνακας/στήλη. Κάθε $n \times m$ πίνακας A μπορει να γραφεί ως $A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_m \end{pmatrix} = (c_1, c_2, \cdots, c_m)$, όπου $c_1, c_2, \dots, c_m$ είναι πίνακες/-στήλη διαστάσεων $n \times 1$ (οι στήλες του πίνακα A).

<u>Ορισμός</u>
Θεωρούμε έναν $n \times m$ πίνακα $A = (a_{ij})$. Ο ανάστροφος του A είναι ο $m \times n$ πίνακας $A^t = (b_{ij})$, όπου $b_{ij} = a_{ji}$.

Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, τότε $A^t = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.
Ειδικότερα, ο ανάστροφος ενός πίνακα/-γραμμή r με διάσταση $1 \times m$ είναι ο πίνακας/-στήλη r^t με διάσταση $m \times 1$. Αντίστροφα, ο ανάστροφος ενός πίνακα/-στήλη c είναι ο πίνακας/-γραμμή c^t.

<u>Παρατηρήσεις</u>

(i)Αν ο A είναι ένας $n \times m$ πίνακας, τότε $A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, όπου $r_1, r_2, \dots, r_n$ είναι οι γραμμές του A.
Τότε, $A^t = ({r_1}^t, {r_2}^t, \dots {r_n}^t)$, δηλαδή οι στήλες του A^t ειναι οι ανάστροφοι των γραμμών του A. Ανάλογα, μπορούμε να γράψουμε $A = (c_1\ c_2\ \dots\ c_m)$ όπου $c_1, c_2, \dots c_m$ είναι οι στήλες του A.

Τότε, $A^t = \begin{pmatrix} {c_1}^t \\ {c_2}^t \\ \vdots \\ {c_m}^t \end{pmatrix}$, δηλαδή οι γραμμές του A^t είναι οι ανάστροφοι των στηλών του A.
(ii) Για κάθε $n \times m$ πίνακα A, ο ανάστροφος του $m \times n$ πίνακα A^t είναι ο πίνακας A, δηλαδή $(A^t)^t = A$.
Πράγματι, αν $A = (a_{ij})$, $A^t = (b_{ij})$ και $(A^t)^t = c_{ij}$, τότε είναι $c_{ij} = b_{ji} = a_{ij}$ για κάθε i, j.
Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, τότε $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ και άρα $(A^t)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A$.

Ορισμός

Ένας $n \times n$ πίνακας A καλείται συμμετρικός αν $A = A^t$.

Έτσι, ο πίνακας $A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός, ενώ ο $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ δεν είναι, καθώς $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B$.

Ορισμός

Έστω $\mathbb{R}^{n \times m}$ το σύνολο των $n \times m$ πινάκων. Ορίζουμε δυο πράξεις, $\mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}^{n \times m}$ και $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}^{n \times m}$, ως εξής:
Αν $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και $B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots \\ b_{21} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, τότε:

$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots \\ a_{21} + b_{21} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και

$\lambda A = (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots \\ \lambda a_{21} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Έτσι, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$, τότε $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 6 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ και $7A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 0 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$.

Ιδιότητες

Οι πράξεις που ορίσαμε, για $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, έχουν τις εξής ιδιότητες:
(i) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (προσεταιριστική ιδιότητα)
(ii) $A + B = B + A$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)
(iii) Ο πίνακας $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ειναι τέτοιος ώστε $A + 0 = A$ (ουδέτερο στοιχείο)
(iv) αν $A = (a_{ij})$, τότε για τον πίνακα $-A = (-a_{ij})$ είναι $A + (-A) = 0$ (ύπαρξη αντιθέτου)
(v) $\lambda(A + B) = \lambda A + \mu A$ (επιμεριστική ιδιότητα)
(vi) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (επιμεριστική ιδιότητα)
(vii) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
$(viii)$ $1A = A$

Άλλες Ιδιότητες

(i) Ο πίνακας $-A$ με την ιδιότητα $A + (-A) = 0$ είναι μοναδικός.

Απόδειξη:
Έστω $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ με $A+B=0$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $B=-A$. Πράγματι, είναι:
$B = 0 + B = [A+(-A)] + B = [(-A)+A] + B = (-A) + (A+B) = -A + 0 = -A$.
(ii) $-(-A) = A$.
Απόδειξη:
Είναι $(-A)+A = A+(-A) = 0$ και άρα ο A είναι ο (μοναδικός) πίνακας ο οποίος προστιθέμενος με τον $-A$ δίνει 0. Συνεπώς, είναι $A = -(-A)$.
(iii) $-(A+B) = (-A)+(-B)$.
Απόδειξη:
Λόγω της μοναδικότητας του αντιθέτου, αρκεί να δείξω ότι $(A+B)+[(-A)+(-B)] = 0$. Όμως, $(A+B)+[(-A)+(-B)] = (B+A)+[(-A)+(-B)] = B+[A+(-A)]+(-B) = B+0+(-B) = B+(-B) = 0$.

Ιδιότητες
(i) $0A = \lambda\mathbb{O} = \mathbb{O}$, όπου $0, \lambda \in \mathbb{R}$ και $\mathbb{O}, A$ είναι $n \times m$ πίνακες.
Απόδειξη:
$0A = (0+0)A = 0A + 0A \Rightarrow 0A + (-0A) = 0A + 0A + (-0A) \Rightarrow \mathbb{O} = 0A + \mathbb{O} \Rightarrow \mathbb{O} = 0A$,
$\lambda\mathbb{O} = \lambda(\mathbb{O}+\mathbb{O}) = \lambda\mathbb{O} + \lambda\mathbb{O} \Rightarrow \lambda\mathbb{O} + (-\lambda\mathbb{O}) = \lambda\mathbb{O} + \lambda\mathbb{O} + (-\lambda\mathbb{O}) \Rightarrow \mathbb{O} = \lambda\mathbb{O} + \mathbb{O} \Rightarrow \mathbb{O} = \lambda\mathbb{O}$.
(ii) $(-\lambda)A = \lambda(-A) = -\lambda A$.
Απόδειξη:
$\mathbb{O} = 0A = [\lambda + (-\lambda)]A = \lambda A + (-\lambda)A \Rightarrow (-\lambda)A = -\lambda A$,
$\mathbb{O} = \lambda\mathbb{O} = \lambda[A+(-A)] = \lambda A + \lambda(-A) \Rightarrow \lambda(-A) = -\lambda A$.

Παράδειγμα
Θεωρούμε τους 2×3 πίνακες A, B με $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 10 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Τότε, είναι $A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Παρατήρηση
Αν A, B είναι δύο $n \times m$ πίνακες και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $(A+B)^t = A^t + B^t$ και $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.
Απόδειξη:
Αν $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$, τότε θα είναι $A^t = (\alpha_{ij})$ και $B^t = (\beta_{ij})$, όπου $\alpha_{ij} = a_{ji}$ και $\beta_{ij} = b_{ji}$. Επίσης, είναι $A + B = (c_{ij})$ όπου $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ και άρα $(A+B)^t = (\gamma_{ij})$, όπου $\gamma_{ij} = c_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$. Άρα, είναι $(A+B)^t = A^t + B^t$.
Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$, τότε είναι
$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$ και άρα
$(A+B)^t = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} \\ a_{13}+b_{13} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{pmatrix} = A^t + B^t$ και
$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow (\lambda A)^t = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{21} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} \\ \lambda a_{13} & \lambda a_{23} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} = \lambda A^t$.

Ορισμός
Ο $n \times n$ πίνακας A καλείται αντισυμμετρικός, αν είναι $A^t = -A$.

Παρατήρηση
Αν ο $A = (a_{ij})$ είναι αντισυμμετρικός, τότε $a_{ii} = 0 \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots$

Πρόταση

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A, υπάρχουν μοναδικοί πίνακες B και C, με τον B συμμετρικό και τον C αντισυμμετρικό, ώστε $A = B + C$.

Απόδειξη

Ύπαρξη: Θεωρούμε τους πίνακες $B = \dfrac{A + A^t}{2}$ και $C = \dfrac{A - A^t}{2}$. Παρατηρούμε ότι $B + C = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t) = \frac{1}{2}2A = A$. Επίσης, είναι $B^t = \left[\frac{1}{2}(A + A^t)\right]^t = \frac{1}{2}(A + A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t + (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t + A) = B$ και άρα ο B είναι συμμετρικός. Καθώς $C^t = \left[\frac{1}{2}(A - A^t)\right]^t = \frac{1}{2}(A - A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t - (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t - A) = -\frac{1}{2}(A - A^t) = -C$, ο πίνακας C είναι αντισυμμετρικός.

Μοναδικότητα: Έστω ότι είναι $A = B_0 + C_0$, όπου ο B_0 είναι συμμετρικός και ο C_0 αντισυμμετρικός. Τότε, $A^t = (B_0 + C_0)^t = {B_0}^t + {C_0}^t = B_0 - C_0$, και άρα $A + A^t = B_0 + C_0 + B_0 - C_0 = 2B_0 \Rightarrow B_0 = \frac{1}{2}(A + A^t)$. Επίσης, θα είναι $A - A^t = B_0 + C_0 - B_0 + C_0 = 2C_0 \Rightarrow C_0 = \frac{1}{2}(A - A^t)$.

Άσκηση

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$. Βρείτε τους 2×2 πίνακες B, C με τον B συμμετρικό και τον C αντισυμμετρικό ώστε $A = B + C$.

Ορισμός

Αν A ειναι ένας $n \times m$ πίνακας και B ένας $m \times k$ πίνακας, τότε ο πίνακας AB είναι ο $n \times k$ πίνακας που ορίζεται ως εξής: Αν $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$, τότε για τον πίνακα $AB = (c_{ij})$ έχουμε (εξ' ορισμού) $c_{ij} = \sum\limits_{r=1}^{m} a_{ir}b_{rj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$.

Για παράδειγμα, το γινόμενο ενός πίνακα-γραμμή $A = (a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_m)$ με έναν πίνακα-στήλη $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ είναι ο 1×1 πίνακας $\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i b_i\right)$.

Το γινόμενο BA είναι ο $m \times m$ πίνακας $\begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_m \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_ma_1 & b_ma_2 & \cdots & b_ma_m \end{pmatrix}$. Ασφαλώς, αν $m > 1$, οι πίνακες AB και BA δεν είναι ίσοι.

Επιπλέον, αν A είναι ένας 2×3 πίνακας και B ένας 3×4 πίνακας, τότε το γινόμενο AB ορίζεται και είναι ένας 2×4 πίνακας. Όμως, το γινόμενο BA δεν ορίζεται.

Παράδειγμα

Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, τότε υπολογίζοντας, έχουμε ότι $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ και $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Είναι λοιπόν, $AB \neq BA$.

Παράδειγμα

Αν $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, τότε είναι $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}$.

Επίσης είναι $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbb{O}$ και $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}$.

Ορισμός

Ο ταυτοτικός $n\times n$ πίνακας I_n ειναι ο διαγώνιος πίνακας με 1 στη διαγώνιο. Έτσι, είναι $I_n=(\delta_{ij})$, όπου $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \alpha\nu\ i=j\\ 0, & \alpha\nu\ i\neq j\end{cases}$

Παρατήρηση

Είναι $I_nA=A$ και $AI_m=A$, για κάθε $n\times m$ πίνακα A.
Απόδειξη:
Αν $A=(a_{ij})$ και $I_nA=(\xi_{ij})$, τότε είναι $\xi_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_{ik}a_{kj}=a_{ij}$, και άρα $I_nA=A$. Ομοίως, αν $AI_m=(\eta_{ij})$, τότε είναι $\eta_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{m}a_{ik}\delta_{kj}=a_{ij}$ και άρα $AI_m=A$.

Ιδιότητες

(i) $(AB)C=A(BC)$, όπου ο A είναι ένας $n\times m$ πίνακας, ο B ένας $m\times k$ πίνακας και ο C ένας $k\times l$ πίνακας.
(ii) $A(B+C)=AB+AC$, όπου ο A είναι ένας $n\times m$ πίνακας και οι B,C είναι $m\times k$ πίνακες.
(iii) $(A+B)C=AC+BC$, όπου οι A,B είναι $n\times m$ πίνακες και ο C είναι ένας $m\times k$ πίνακας.
(iv) $(\lambda A)B=\lambda(AB)=A(\lambda B)$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, ο A είναι ένας $n\times m$ πίνακας και ο B ένας $m\times k$ πίνακας.
Απόδειξη του (ii) για την περίπτωση που $n=m=2$:
Γράφουμε $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}e & f\\ g & h\end{pmatrix}$ και $C=\begin{pmatrix}k & l\\ m & n\end{pmatrix}$ και υπολογίζουμε ότι:
$A(B+C)=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e+k & f+l\\ g+m & h+n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(e+k)+b(g+m) & a(f+l)+b(h+n)\\ c(e+k)+d(g+m) & c(f+l)+d(h+n)\end{pmatrix}$ και
$AB+AC=\begin{pmatrix}ae+bg & af+bh\\ ce+dg & cf+dh\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}ak+bm & al+bn\\ ck+dm & cl+dn\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ae+ak+bg+bm & af+al+bh+bn\\ ce+ck+dg+dm & cf+cl+dh+dn\end{pmatrix}$
Επομένως, ισχύει ότι $A(B+C)=AB+AC$.

Ορισμός

Στο σύνολο των $n\times m$ πινάκων, ορίζουμε για κάθε (i,j) με $1\leq i\leq n$ και $1\leq j\leq m$ τον πίνακα E_{ij}, ο οποίος έχει 1 στην (i,j)-θέση και 0 εκτός αυτής (ή αλλού).
Για παράδειγμα, στο σύνολο των 2×2 πινάκων έχουμε $E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ και $E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Παρατηρήσεις

(i) Για τον πίνακα $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ μπορούμε να γράψουμε
$A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ c & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}=aE_{11}+bE_{12}+cE_{21}+dE_{22}$.
Γενικά, στο σύνολο των $n\times m$ πινάκων, μπορούμε να γράψουμε για κάθε $A=(a_{ij})$ ότι $A=\sum\limits_{i,j}a_{ij}E_{ij}$.
(ii) Αν $i\in\{1,\dots n\}$, $j,k\in\{1,\dots m\}$ και $l\in\{1,\dots r\}$, τότε στο σύνολο των $n\times r$ πινάκων ισχύει η ισότητα $E_{ij}E_{kl}=\delta_{jk}E_{il}=\begin{cases}E_{il}, & \alpha\nu\ j=k\\ 0, & \alpha\nu\ j\neq k\end{cases}$
Για παράδειγμα, στο σύνολο των 2×2 πινάκων είναι $E_{11}E_{12}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=E_{12}$

και $E_{11}E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}$.

Παραδείγματα

(i) Αν A είναι ένας $n \times m$ πίνακας και B είναι ένας $m \times k$ πίνακας, τότε είναι $(AB)^t = B^t A^t$.
Απόδειξη:
Γράφουμε $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ και θα δείξουμε ότι τα στοιχεία στην (i,j)-θέση των πινάκων $(AB)^t$ και B^tA^t ειναι ίσα. Όμως, το στοιχείο στην (i,j)-θέση του $(AB)^t$ είναι το στοιχείο στην (j,i)-θέση του AB, δηλαδή το $\sum_{k=1}^{m} a_{jk}b_{ki}$. Καθώς το στοιχείο στην (i,j)-θέση του B^tA^t είναι το $\sum_{k=1}^{m} b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}b_{ki}$, το ζητούμενο έπεται.

(ii) Είναι $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1-2n & 4n \\ -n & 2n+1 \end{pmatrix}$ για κάθε $n \geq 0$.
Εξ ορισμού έχουμε $A_m^0 = I_m$. Το ζητούμενο ισχύει για $n = 0, 1$. Χρησιμοποιούμε επαγωγή και υποθέτουμε ότι για το $n \geq 0$ ισχύει ότι $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1-2n & 4n \\ -n & 2n+1 \end{pmatrix}$. Τότε, για το επαγωγικό βήμα υπολογίζουμε

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2n & 4n \\ -n & 2n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1+2n-4n & 4-8n+12n \\ n-2n-1 & -4n+6n+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2n & 4+4n \\ -n-1 & 2n+3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1-2(n+1) & 4(n+1) \\ -(n+1) & 2(n+1)+1 \end{pmatrix}.$$

Με βάση την αρχή της επαγωγής, έπεται ότι το ζητούμενο ισχύει για κάθε $n \geq 0$.

(iii) Ισχύει $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix}$. Γενικά, αν οι A, B ειναι διαγώνιοι $n \times n$ πίνακες, τότε ο πίνακας AB είναι επίσης διαγώνιος.

Πράγματι, αν $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_{ii}$ και $B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \mu_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i E_{ii}$,
τότε είναι $AB = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_{ii}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i E_{ii}\right) = \sum_{i,j} (\lambda_i E_{ii})(\mu_j E_{jj}) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j E_{ii} E_{jj} = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \delta_{ij} E_{ij} =$
$\sum_i \lambda_i \mu_i \delta_{ii} E_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i E_{ii} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$.

(iv) Υπολογίζουμε ότι $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & ae+bz \\ 0 & cz \end{pmatrix}$ και

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & t & g \\ 0 & k & l \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ah & at+bk & ag+bl+mc \\ 0 & dk & dl+em \\ 0 & 0 & zm \end{pmatrix}.$$

Γενικά, αν οι A, B είναι άνω τριγωνικοί $n \times n$ πίνακες, τότε ο πίνακας AB είναι επίσης άνω τριγωνικός.
Πράγματι, ας γράψουμε $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$. Για κάθε $i > j$ είναι $a_{ij} = b_{ij} = 0$. Για να δειξουμε ότι ο AB ειναι άνω τριγωνικός, πρέπει να δειξουμε ότι για κάθε $i > j$ το στοιχείο στην

(i,j)-θέση του είναι 0. Άρα, πρέπει να δείξουμε ότι για $i>j$ είναι $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=0$. Για το σκοπό αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $i>j$ και κάθε $k=1,2,\ldots,n$ είναι $a_{ik}b_{kj}=0$.

- Αν είναι $i>k$, τότε $a_{ik}=0$ και άρα $a_{ik}b_{kj}=0$.
- Αν είναι $i\leq k$, τότε $j<k$ και άρα $b_{kj}=0$, οπότε πάλι θα είναι $a_{ik}b_{jk}=0$.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι το στοιχείο στην (i,i)-θέση του AB είναι ίσο με $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}=\sum\limits_{k<i} a_{ik}b_{ki}+ a_{ii}b_{ii}+\sum\limits_{k>i} a_{ik}b_{ki}=0+a_{ii}b_{ii}+0=a_{ii}b_{ii}$.

(v) Αν A,B είναι τετραγωνικοί πίνακες και $AB=BA$ τότε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ είναι $A^nB=BA^n(*)$ και $(AB)^n=A^nB^n(**)$.

Απόδειξη της (*):

Για $n=0$, η σχέση $IB=BI$ ισχύει. Υποθέτοντας τώρα ότι $n\geq 0$ και $A^nB=BA^n$, υπολογίζουμε $A^{n+1}B=AA^nB=ABA^n=BAA^n=BA^{n+1}$. Το ζητούμενο έπεται με βάση την αρχή της επαγωγής.

Απόδειξη της (**):

Για $m=0$, η ζητούμενη σχέση είναι η $I_m=I_mI_m$, που ισχύει. Υποθέτουμε ότι για τον $n\geq 0$ ισχύει η σχέση $(AB)^n=A^nB^n$ και υπολογίζουμε ότι $(AB)^{n+1}=(AB)(AB)^n=ABA^nB^n\overset{(*)}{=} AA^nBB^n=A^{n+1}B^{n+1}$.

(vi) Για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ και κάθε $n\times n$ πίνακα A είναι $(\lambda I_n)A=A(\lambda I_n)=\lambda A$. Αντίστροφα, αν B είναι ένας $n\times n$ πίνακας, έτσι ώστε $AB=BA$ για κάθε $n\times n$ πίνακα A, τότε υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ με $B=\lambda I_n$.

Απόδειξη:

Πράγματι, για το αντίστροφο έστω ο $B=(b_{ij})=\sum\limits_{i,j} b_{ij}E_{ij}$, και $BE_{\mu\rho}=E_{\mu\rho}B$, με μ,ρ τυχαίοι δείκτες. Καθώς $BE_{\mu\rho}=(\sum\limits_{i.j} b_{ij}E_{ij})E_{\mu\rho}=\sum\limits_{i,j} b_{ij}E_{ij}E_{\mu\rho}=\sum\limits_{i,j} b_{ij}\delta_{j\mu}E_{i\rho}=\sum\limits_{i} b_{i\mu}E_{i\rho}$ και $E_{\mu\rho}B=E_{\mu\rho}(\sum\limits_{i,j} b_{ij}E_{ij})=\sum\limits_{i,j} b_{ij}E_{\mu\rho}E_{ij}=\sum\limits_{i,j} b_{ij}\delta_{\rho i}E_{\mu j}=\sum\limits_{j} b_{\rho j}E_{\mu j}$, έχουμε $\sum\limits_{i} b_{i\mu}E_{i\rho}=\sum\limits_{j} b_{\rho j}E_{\mu j}$.

Από την τελευταία ισότητα, έπεται ότι $b_{\rho\rho}=b_{\mu\mu}$ και $b_{i\mu}=0$ για $i\neq\mu$.

<u>Ορισμός</u>

Ο $n\times n$ πίνακας A καλείται αντιστρέψιμος αν υπάρχει $n\times n$ πίνακας B με $AB=I_n=BA$.

<u>Παρατήρηση</u>

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο πίνακας B με $BA=I_n=AB$ είναι μοναδικός (συμβολίζεται με A^{-1} και καλείται αντίστροφος του A).

Απόδειξη:

Έστω C με $AC=I_n=CA$. Τότε, $C=I_nC=(BA)C=B(AC)=BI_n=B$.

<u>Παραδείγματα</u>

(i) Έστω $A=\begin{pmatrix}1&-2\\-3&7\end{pmatrix}$. Ψάχνουμε $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ με $AB=I_2=BA$. Είναι:

$$AB=I_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&-2\\-3&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a-2c&b-2d\\-3a-7c&-3b+7d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}a-2c=1\\-3a+7c=0\\b-2d=0\\-3b+7d=1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}a=7\\c=3\\b=2\\d=1\end{matrix}\right\}$$

Άρα, αν υπάρχει ο A, θα είναι $A^{-1}=B=\begin{pmatrix}7&2\\3&1\end{pmatrix}$. Καθώς είναι $AB=I_2$, μένει να δείξουμε ότι $BA = I_2$. Πράγματι όμως, είναι $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Συνεπώς, ο A είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$. Ψάχνουμε να βρούμε $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ με $AB = I_2 = BA$. Είναι:
$AB = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 5a+10c & 5b+10d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ 5a+10c=0 \\ 5b+10d=1 \end{matrix} \right\}$ Αν $a+2c=1$, τότε $5a+10c = 5(a+2c) = 5 \neq 0$. Συνεπώς, δεν υπάρχει τέτοιος πίνακας B και άρα ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

(iii) Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_{ii}$ είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν $\lambda_i \neq 0$ για κάθε i. Στην περίπτωση αυτή, είναι $A^{-1} = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^{-1} & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & {\lambda_n}^{-1} \end{pmatrix}$.

Πράγματι, υποθέτοντας ότι $\lambda_i \neq 0$ για κάθε i, μπορούμε να θεωρήσουμε τον διαγώνιο πίνακα
$B = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^{-1} & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & {\lambda_n}^{-1} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^{-1} E_{ii}$.

Υπολογίζουμε $AB = \begin{pmatrix} \lambda_1{\lambda_1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2{\lambda_2}^{-1} & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n{\lambda_n}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} = I_n$ και (ομοίως) $BA = I_n$. Άρα, ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = B$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Αν είναι $\lambda_1 = 0$, τότε
$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & * & \cdots & * \\ b_{21} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & * \\ b_{n1} & * & \cdots & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & * \\ * & * & \ddots & * \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \neq I_n$. Συνεπώς, θα πρέπει να είναι $\lambda_1 \neq 0$. Με όμοιο τρόπο, δείχνουμε ότι $\lambda_i \neq 0$ για κάθε $i = 2, \cdots, n$.

(iv) Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με $A^k = 0$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Τότε ο πίνακας $I_n - A$ είναι αντιστρέψιμος και $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$.
Πράγματι, μπορούμε να υπολογίσουμε:
$(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = I_n + A + \cdots + A^{k-1} - (A + A^2 + \cdots + A^k) = I_n - A^k = I_n$
και
$(I_n + A + \cdots + A^{k-1})(I_n - A) = I_n + A + \cdots + A^{k-1} - (A + A^2 + \cdots + A^k) = I_n - A^k = I_n$.

<u>Πρόταση</u>
Έστω A, B δύο αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες. Τότε:
(i) ο πίνακας A^{-1} είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα $(A^{-1})^{-1} = A$,

(ii) ο πίνακας AB είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
(iii) αν $\lambda \in \mathbb{R}^*$, τότε ο πίνακας λA είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$ και
(iv) ο πίνακας A^t είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Απόδειξη

(i) Γνωρίζουμε ότι $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$. Άρα, υπάρχει ο $(A^{-1})^{-1}$ και είναι $(A^{-1})^{-1} = A$.
(ii) Καθώς είναι $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ και $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$, υπάρχει ο $(AB)^{-1}$ και είναι ίσος με $B^{-1}A^{-1}$.
(iii) Υπολογίζουμε $(\lambda A)(\lambda^{-1}A^{-1}) = \lambda\lambda^{-1}AA^{-1} = 1I_n = I_n$ και $(\lambda^{-1}A^{-1})(\lambda A) = \lambda^{-1}\lambda A^{-1}A = 1I_n = I_n$. Συνεπώς, ο λA είναι αντιστρέψιμος και $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$.
(iv) Η σχέση $AA^{-1} = I_n$ δίνει $(A^{-1})^tA^t = (AA^{-1})^t = {I_n}^t = I_n$. Ομοίως, η σχέση $A^{-1}A = I_n$ δίνει $A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = {I_n}^t = I_n$. Συνεπώς, ο A^t είναι αντιστρέψιμος και $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Παράδειγμα

Έστω A ένας $n \times m$ πίνακας και B ένας $m \times n$ πίνακας, έτσι ώστε ο πίνακας $I_n - AB$ είναι αντιστρέψιμος. Τότε, ο πίνακας $I_m - BA$ είναι επίσης αντιστρέψιμος και μάλιστα $(I_m - BA)^{-1} = I_m + B(I_n - AB)^{-1}A$.

Απόδειξη:

Πράγματι, αν είναι $G = (I_n - AB)^{-1}$, τότε θα έχουμε $G(I_n - AB) = I_n$ και $(I_n - AB)G = I_n$, δηλαδή $G - GAB = I_n$ (σχέση $(*)$) και $G - ABG = I_n$ (σχέση $(**)$). Για να δείξουμε ότι $(I_m - BA)^{-1} = I_m + BGA$, αρκεί να δείξουμε ότι $(I_m - BA)(I_m + BGA) = I_m = (I_m + BGA)(I_m - BA)$. Όμως είναι

$(I_m - BA)(I_m + BGA) = I_m + BGA - BA - BABGA \overset{(**)}{=} I_m + BGA - BA - B(G - I_n)A = I_m + BGA - BA - BGA + BI_nA = I_m - BA + BA = I_m$

και

$(I_m + BGA)(I_m - BA) = I_m - BA + BGA - BGABA \overset{(*)}{=} I_m - BA + BGA - B(G - I_n)A = I_m - BA + BGA - BGA + BI_nA = I_m - BA + BA = I_m$.

Γραμμικά Συστήματα

Ένα γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 3 αγνώστους είναι της μορφής $\left\{\begin{matrix} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta \\ \epsilon x_1 + \zeta x_2 + \eta x_3 = \theta \end{matrix}\right\}$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta \in \mathbb{R}$. Ο 2×3 πίνακας $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \zeta & \eta \end{pmatrix}$ καλείται πίνακας των συντελεστών του συστήματος. Ο 2×4 πίνακας $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \vdots & \delta \\ \epsilon & \zeta & \eta & \vdots & \theta \end{pmatrix}$ καλείται επαυξημένος πίνακας του συστήματος. Ο πίνακας των αγνώστων είναι ο $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Μπορούμε να γράψουμε το ίδιο σύστημα χρησιμοποιώντας πίνακες, ως εξής: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \zeta & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ \theta \end{pmatrix}$.

Γενικά, ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με m αγνώστους,

$$\left\{\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{matrix}\right\}$$

μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, δηλαδή ως μια ισότητα $Ax = b$, με A τον πίνακα των συντελεστών και b τον πίνακα των σταθερών όρων.

Ορισμός

Αν $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ (αν δηλαδή $b = 0$, ως $n \times 1$ πίνακας), τότε το γραμμικό σύστημα καλείται ομογενές. Η μηδενική (ή τετριμμένη) λύση ενός ομογενούς συστήματος είναι αυτή για την οποία $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$, όπου C η λύση του $Ax = b$.

Παρατήρηση

Έστω A ένας $n \times m$ πίνακας, b ένας $n \times 1$ πίνακας και E ένας $n \times n$ πίνακας. Τότε:
(i) Κάθε λύση του συστήματος $Ax = b$ ειναι λύση του συστήματος $(EA)x = Eb$.
(ii) Αν ο E είναι αντιστρέψιμος, τότε τα συστήματα $Ax = b$ και $(EA)x = Eb$ έχουν τις ίδιες λύσεις (είναι ισοδύναμα).
Απόδειξη:
(i) Αν c είναι μια λύση του $Ax = b$, είναι $Ac = b$ και άρα $(EA)c = E(Ac) = Eb$. Συνεπώς το c είναι μια λύση του συστήματος $(EA)x = Eb$.
(ii) Αν ο E είναι αντιστρέψιμος, τότε μια λύση του $(EA)x = Eb$ είναι λύση του $E^{-1}(EA)x = E^{-1}(Eb)$, δηλαδή του $Ax = b$.

Στόχος:

Για να λύσουμε το σύστημα $Ax = b$, θα προσπαθήσουμε να επιλέξουμε κατάλληλα τον αντιστρέψιμο πίνακα E, ώστε το ισοδύναμο σύστημα $(EA)x = Eb$ να είναι απλό.

Παράδειγμα

Αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας E ώστε $EA = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, τότε το σύστημα $(EA)x = Eb$ είναι το (πολύ απλό) σύστημα $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Eb \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} = Eb.$

Μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Θεωρούμε έναν $n \times m$ πίνακα A και γράφουμε $A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, όπου $r_1, r_2, \dots, r_n$ είναι οι γραμμές του. Ορίζουμε τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών του πίνακα A (στοιχειώδεις γραμμοπράξεις), ως εξής:
Μετασχηματισμοί τύπου Ι: Διαλέγουμε $\lambda \in \mathbb{R}^*$ και $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ και αντικαθιστούμε τη r_i με την λr_i:

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ r_{i-1} \\ r_i \\ r_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ r_{i-1} \\ \lambda r_i \\ r_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Μετασχηματισμοί τύπου ΙΙ: Διαλέγουμε $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ με $i \neq j$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ και αντικαθιστούμε την r_i με την $r_i + \lambda r_j$:

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \vdots \\ r_i + \lambda r_j \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Μετασχηματισμοί τύπου III: Επιλέγουμε δείκτες $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ με $i \neq j$ και εναλλάσσουμε τις γραμμές r_i και r_j:

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Ορισμός

Δύο $n \times m$ πίνακες A, B καλούνται γραμμοϊσοδύναμοι αν μπορούμε να λάβουμε τον B από τον A μέσω της διαδοχικής εφαρμογής ενός πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.

Ορισμός

Ο $n \times m$ πίνακας B καλείται κλιμακωτός αν ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:
(i) το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε μη-μηδενικής γραμμής του B είναι ίσο με 1.
(ii) αν η γραμμή r_i του B είναι μηδενική, τότε $r_i = r_{i+1} = \cdots = r_n = 0$.
(iii) αν $i < i'$ και το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της γραμμής r_i (αντίστοιχα της γραμμής $r_{i'}$) είναι στη θέση j (αντίστοιχα j'), τότε $j < j'$.
Αν επιπλέον το πρώτο μη-μηδενικό στοιχειο κάθε μη-μηδενικής γραμμής του B είναι το μοναδικό μη-μηδενικό στοιχείο της αντίστοιχης στήλης, τότε λέμε ότι ο B είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Παραδείγματα

Ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ είναι κλιμακωτός, ενώ ο πίνακας $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ είναι ανηγμένος κλιμακωτός.

Παρατηρούμε ότι το γραμμικό σύστημα $Gx = b$, δηλαδή το $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 + 2x_2 + 6x_5 = b_1 \\ x_3 + 7x_5 = b_2 \\ x_4 = b_3 \\ 0 = b_4 \end{matrix} \right\}$ λύνεται απλά: Αν $b_4 \neq 0$, τότε το σύστημα δεν έχει λύσεις (είναι αδύνατο). Αν $b_4 = 0$, τότε οι λύσεις του συστήματος είναι της μορφής $x_1 = b_1 - 2a - 6a'$, $x_2 = a$, $x_3 = b_2 - 7a'$, $x_4 = b_3$ και $x_5 = a'$, όπου $a, a' \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα (απαλοιφής του Gauss):

Κάθε $n \times m$ πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.

Παράδειγμα

$$A=\begin{pmatrix}0&3&11&-1\\2&9&0&3\\1&4&-1&10\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&4&-1&10\\2&9&0&3\\0&3&11&-1\end{pmatrix}\overset{r_2\to r_2-2r_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&4&-1&10\\0&1&2&-17\\0&3&11&-1\end{pmatrix}\overset{r_3\to r_3-3r_2}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix}1&4&-1&10\\0&1&2&-17\\0&0&5&50\end{pmatrix}\overset{r_3\to\frac{1}{5}r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&4&-1&10\\0&1&2&-17\\0&0&1&10\end{pmatrix}\overset{r_1\to r_1+r_3,\ r_2\to r_2-2r_3}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix}1&4&0&20\\0&1&0&-37\\0&0&1&10\end{pmatrix}\overset{r_1\to r_1-4r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&168\\0&1&0&-37\\0&0&1&10\end{pmatrix}$$

Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις γραμμοπράξεις στον ταυτοτικό πίνακα I_n προκύπτουν οι στοιχειώδεις πίνακες.

Στοιχειώδεις πίνακες τύπου I: Για κάθε δείκτη i και $\lambda\in\mathbb{R}^*$, παίρνουμε τον (διαγώνιο) πίνακα $D(i,\lambda)=I_n+(\lambda-1)E_{ii}$.

Στοιχειώδεις πίνακες τύπου II: Για δείκτες i,j και $\lambda\in\mathbb{R}$ παίρνουμε τον πίνακα $M(i,j,\lambda)=I_n+\lambda E_{ij}$.

Στοιχειώδεις πίνακες τύπου III: Για $i\neq j$ παίρνουμε τον πίνακα $E(i,j)=I_n+E_{ij}+E_{ji}-E_{ii}-E_{jj}$.

Πρόταση

Οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι και μάλιστα οι αντίστροφοί τους είναι επίσης στοιχειώδεις. Ειδικότερα, είναι $D(i,\lambda)^{-1}=D(i,\lambda^{-1})$, $M(i,j,\lambda)^{-1}=M(i,j,-\lambda)$ και $E(i,j)^{-1}=E(i,j)$.

Απόδειξη:

Υπολογίζω $D(i,\lambda)D(i,\lambda^{-1})=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\0&\ddots&0&\cdots&\cdots&\vdots\\\vdots&\cdots&1&\cdots&\cdots&\vdots\\\vdots&\cdots&\cdots&\lambda&\cdots&\vdots\\\vdots&\cdots&\cdots&\cdots&\ddots&\vdots\\\vdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\0&\ddots&0&\cdots&\cdots&\vdots\\\vdots&\cdots&1&\cdots&\cdots&\vdots\\\vdots&\cdots&\cdots&\lambda^{-1}&\cdots&\vdots\\\vdots&\cdots&\cdots&\cdots&\ddots&\vdots\\\vdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&1\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}1&0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\0&\ddots&0&\cdots&\cdots&\vdots\\\vdots&\cdots&1&\cdots&\cdots&\vdots\\\vdots&\cdots&\cdots&\lambda\lambda^{-1}&\cdots&\vdots\\\vdots&\cdots&\cdots&\cdots&\ddots&\vdots\\\vdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&1\end{pmatrix}=I_n$ και (ανάλογα) $D(i,\lambda^{-1})D(i,\lambda)=I_n$. Άρα, ο $D(i,\lambda)$ είναι αντιστρέψιμος και $D(i,\lambda)^{-1}=D(i,\lambda^{-1})$.

Επίσης, είναι $M(i,j,\lambda)M(i,j,-\lambda)=(I_n+\lambda E_{ij})(I_n-\lambda E_{ij})=I_n-\lambda E_{ij}+\lambda E_{ij}-\lambda^2E_{ij}E_{ij}=I_n$ και ομοίως $M(i,j,-\lambda)M(i,j,\lambda)=I_n$. Άρα, ο πίνακας $M(i,j,\lambda)$ είναι αντιστρέψιμος και $M(i,j,\lambda)^{-1}=M(i,j,-\lambda)$.

Μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $E(i,j)E(i,j)=I_n$. Για παράδειγμα, για $n=2$ είναι $E(1,2)E(1,2)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$.

Πρόταση

Κάθε στοιχειώδης γραμμοπράξη οδηγεί από ένα πίνακα A στον πίνακα EA, για κάποιον κατάλληλο στοιχειώδη πίνακα.

Απόδειξη

Είναι εύκολο να δούμε ότι ο πίνακας $D(i,\lambda)A$ προκύπτει από τον A μέσω της πράξης $r_i\to\lambda r_i$.

Επίσης, είναι $M(1,2,\lambda)A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) A = \begin{pmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots \end{pmatrix}$, με $A_{n\times m} = (a_{i,j})$ δηλαδή ο πίνακας $M(1,2,\lambda)A$ προκύπτει από τον A μέσω της γραμμοπράξης $r_1 \to r_1 + \lambda r_2$.

Τέλος, υπολογίζουμε ότι $E(1,2)A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 \\ r_1 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ και άρα ο πίνακας $E(1,2)A$ προκύπτει από τον A μέσω της πράξης $r_1 \leftrightarrow r_2$.

Πρόταση

Έστω A, B δύο $n \times m$ πίνακες. Τότε, οι A, B είναι γραμμοϊσοδύναμοι αν και μόνο αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ και στοιχειώδεις $n \times n$ πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_k$, έτσι ώστε $B = E_k \ldots E_2 E_1 A$.

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Μπορούμε να εφαρμόσουμε διαδοχικά στοιχειώδεις γραμμοπράξεις, ώστε να μετασχηματίσουμε τον A στον B, ως εξής: $A = A_0 \rightsquigarrow A_1 \rightsquigarrow A_2 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow A_{k-1} \rightsquigarrow A_k = B$. Από την προηγούμενη πρόταση, έπεται ότι υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \cdots, E_k$ ώστε:

$A_1 = E_1 A_0$

$A_2 = E_2 A_1$

$\vdots$

$A_k = E_k A_{k-1}$

Άρα, είναι $B = A_k = E_k A_{k-1} = E_k E_{k-1} A_{k-2} = \ldots = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A_0 = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A$.

($\Leftarrow$) Μπορούμε να μετασχηματίσουμε τον A στο B κάνοντας ακριβώς k βήματα, ως εξής: $A \rightsquigarrow E_1 A \rightsquigarrow E_2 E_1 A \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow E_k \ldots E_2 E_1 A = B$. Από τον ορισμό της γραμμοϊσοδυναμίας και την προηγούμενη πρόταση, έπεται ότι οι πίνακες A και B είναι γραμμοϊσοδύναμοι.

Πρόταση

Η γραμμοϊσοδυναμία είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των $n \times m$ πινάκων.

Απόδειξη

Η ανακλαστική ιδιότητα της σχέσης είναι προφανής.

Συμμετρική ιδιότητα: Αν ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον B, μπορώ να βρω $k \in \mathbb{N}$ και στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ώστε $B = E_k \ldots E_2 E_1 A$. Τότε, είναι $A = (E_k \ldots E_2 E_1)^{-1} B = {E_1}^{-1} {E_2}^{-1} \ldots {E_k}^{-1} B$ και άρα ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A.

Μεταβατική ιδιότητα: Αν ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με το B και ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος με το C, μπορούμε να γράψουμε $B = E_k \ldots E_1 A$ και $C = E_{k+\lambda} \ldots E_{k+1} B$ για κάποια $k, \lambda \in \mathbb{N}$ και στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_k, E_{k+1}, \ldots, E_{k+\lambda}$. Συνεπώς, θα είναι $C = E_{k+\lambda} \ldots E_{k+1} E_k \ldots E_1 A$ και άρα ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με το C.

Πόρισμα

Για κάθε $n \times m$ πίνακα A υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ και στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_k$, έτσι ώστε ο πίνακας $E_k \ldots E_2 E_1 A$ είναι ανηγμένος κλιμακωτός.

Πρόταση

Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για έναν $n \times n$ πίνακα A:

(i) ο A είναι αντιστρέψιμος,

(ii) ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον I_n και

(iii) ο A είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

<u>Απόδειξη</u>

$(i) \to (ii)$: Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ και στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ώστε ο $B = E_k \ldots E_2 E_1 A$ να είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Καθώς οι πίνακες $A, E_1, E_2, \ldots, E_k$ είναι αντιστρέψιμοι, το ίδιο ισχύει για το γινόμενο $B = E_k \ldots E_2 E_1 A$. Συνεπώς, ο B δεν έχει καμία μηδενική γραμμή και άρα $B = I_n$. Έτσι, ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον I_n.

$(ii) \to (iii)$: Καθώς οι πίνακες A και I_n είναι γραμμοϊσοδύναμοι, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ και στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_k$ με $A = E_k \ldots E_2 E_1 I_n = E_k \ldots E_2 E_1$.

$(iii) \to (i)$: Οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι και κάθε γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας.

<u>Παραδείγματα</u>

$$(i) \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 12 \end{array} \right\}$$

Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα που αντιστοιχει στο σύστημα, συμπληρώνοντας στον πίνακα των συντελεστών τη στήλη των σταθερών όρων. Γραμμοπράττουμε.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \vdots & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \vdots & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \vdots & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & \vdots & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \vdots & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Το ισοδύναμο σύστημα εξισώσεων $\left\{ \begin{array}{c} x_1 + 0x_2 - x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 - x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1 \end{array} \right\}$ που αντιστοιχεί στον τελευταίο επαυξημένο πίνακα είναι αδύνατο.

$$(ii) \left\{ \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{array} \right\}$$

Ο επαυξημένος πίνακας είναι ο εξής:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & \vdots & 4 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & \vdots & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & \vdots & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -5 & 3 & -5 & \vdots & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \vdots & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -5 & \vdots & -7 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & \frac{19}{3} & -\frac{10}{3} & \vdots & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{19} & \vdots & \frac{9}{19} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{28}{19} & \vdots & \frac{85}{19} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{19} & \vdots & \frac{32}{19} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{19} & \vdots & \frac{9}{19} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{19} & \vdots & \frac{21}{19} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{19} & \vdots & \frac{32}{19} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{19} & \vdots & \frac{9}{19} \end{pmatrix}$$

Το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα $\begin{Bmatrix} x_1 + \frac{2}{19}x_4 = \frac{21}{19} \\ x_2 + \frac{13}{19}x_4 = \frac{32}{19} \\ x_3 - \frac{10}{19}x_4 = \frac{9}{19} \end{Bmatrix}$ έχει λύσεις $\begin{Bmatrix} x_1 = \frac{21}{19} - \frac{2}{19}a \\ x_2 = \frac{32}{19} - \frac{13}{19}a \\ x_3 = \frac{9}{19} + \frac{10}{19}a \\ x_4 = a \end{Bmatrix}$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

<u>Παράδειγμα</u>

$$\begin{Bmatrix} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{Bmatrix}$$

Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & \vdots & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το $\begin{Bmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_4 + 3x_5 = 0 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 2a \\ x_3 = a \\ x_4 = -3b \\ x_5 = b \end{Bmatrix}$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

<u>Παρατήρηση</u>

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας, ο οποίος είναι αντιστρέψιμος. Γνωρίζουμε ότι ο A είναι γραμμο-ϊσοδύναμος με τον I_n. Συνεπώς υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ και στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ώστε $I_n = E_k \ldots E_2 E_1 A$. Συνεπώς είναι $I_n A^{-1} = E_k \ldots E_2 E_1 A A^{-1}$, δηλαδή $A^{-1} = E_k \ldots E_2 E_1 I_n$. Άρα, μπορούμε να υπολογίσουμε τον A^{-1} ξεκινώντας από τον I_n, αν εφαρμόσουμε την ίδια ακολουθία γραμμοπράξεων που οδηγεί από τον A στο I_n.

<u>Παράδειγμα</u>

Να υπολογιστεί (αν υπάρχει) ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση, θεωρούμε τον 3×6 πίνακα

$$(A \vdots I_3) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 5 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 5 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & \vdots & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 5 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & \vdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & \vdots & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 19 & \vdots & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & \vdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & \vdots & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 8 & 19 & \vdots & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & \vdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & \vdots & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \vdots & -\frac{8}{3} & -\frac{11}{3} & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & \vdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & \vdots & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -8 & -11 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \vdots & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & \vdots & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -8 & -11 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 19 & 27 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -8 & -11 & 3 \end{pmatrix} = (I_3 \vdots A^{-1}).$$

Συνεπώς, είναι $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 19 & 27 & -7 \\ -8 & -11 & 3 \end{pmatrix}$.

Ορίζουσες

Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^{n\times n}$ των $n \times n$ πραγματικών πινάκων. Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε θα γράφουμε $A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, όπου r_i ειναι η i-γραμμή του πίνακα.

Ορισμός

Μια απεικόνιση ορίζουσας $D : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ είναι μια απεικόνιση που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

(i) Αν $A = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i' + r_i'' \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i' \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ και $C = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i'' \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, τότε $D(A) = D(B) + D(C)$.

(ii) Αν $A = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ \lambda r_i' \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ και $\Delta = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i' \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, τότε $D(A) = \lambda D(\Delta)$.

(iii) Αν δυο γραμμές του A είναι ίσες, τότε $D(A) = 0$.
(iv) $D(I_n) = 1$.

Παραδείγματα

(i) Αν $n = 1$, τότε είναι $D(a) = aD(1) = aD(I_1) = a$.
(ii) Αν $n = 2$, μπορούμε να θεωρήσουμε την απεικόνιση που ορίζεται θέτοντας $D\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$. Αυτή η απεικόνιση ικανοποιεί τις ιδιότητες $(i), (ii), (iii), (iv)$ του ορισμού.
Ιδιότητα (iv): Είναι $D(I_2) = D\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$.
Ιδιότητα (iii): Υπολογίζουμε $D\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = a \cdot b - b \cdot a = 0$.
Ιδιότητα (i): Αν για παράδειγμα $A = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{pmatrix}$ και $C = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c & d \end{pmatrix}$, τότε $D(A) = (a_1 + a_2)d - (b_1 + b_2)c = (a_1 d - b_1 c) + (a_2 d - b_2 c) = D(B) + D(C)$.

Ιδιότητα (ii): Αν π.χ. $A = \begin{pmatrix} \lambda a' & \lambda b' \\ c & d \end{pmatrix}$ και $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix}$, τότε $D(A) = (\lambda a')d - (\lambda b')c = \lambda(a'd - b'c) = \lambda D(A')$.

Ας δούμε τώρα πώς μεταβάλλεται η $D(A)$ αν εφαρμόσουμε στον A μια στοιχειώδη γραμμοπράξη.
Γραμμοπράξη τύπου I: $r_i \to \lambda r_i$
Αν ο B προκύπτει από τον A μέσω του μετασχηματισμού $r_i \to \lambda r_i$, τότε $D(B) = \lambda D(A)$ (από την ιδιότητα (ii) του ορισμού).
Γραμμοπράξη τύπου II: $r_i \to r_i + \lambda r_j$ για $i \neq j$
Αν ο B προκύπτει από τον A μέσω του μετασχηματισμού $r_i \to r_i + \lambda r_j$, τότε

$$D(B) = D\begin{pmatrix} \vdots \\ r_i + \lambda r_j \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(i)}{=} D\begin{pmatrix} \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda r_j \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(ii)}{=} D(A) + \lambda D\begin{pmatrix} \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(iii)}{=} D(A) + \lambda \cdot 0 = D(A).$$

Γραμμοπράξη τύπου III: $r_i \to r_j$
Αν ο B προκύπτει από τον A μέσω του μετασχηματισμού $r_i \to r_j$, τότε $D(B) = -D(A)$. Πράγματι, είναι:

$$0 \overset{(iii)}{=} \begin{pmatrix} \vdots \\ r_i + r_j \\ \vdots \\ r_i + r_j \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(i)}{=} D\begin{pmatrix} \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_i + r_j \\ \vdots \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_i + r_j \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(i)}{=}$$

$$D\begin{pmatrix} \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(iii)}{=} 0 + D(A) + D(B) + 0 = D(A) + D(B)$$

και άρα $D(B) = -D(A)$.

<u>Πόρισμα</u>
Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και D μια ορίζουσα απεικόνιση. Αν ο B προκύπτει από τον A μέσω μιας στοιχειώδους γραμμοπράξης, τότε $D(A) = 0 \Leftrightarrow D(B) = 0$.
<u>Απόδειξη</u>
Γραμμοπράξη τύπου I: Για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}^*$ είναι $D(B) = \lambda D(A)$.
Γραμμοπράξη τύπου II: $D(B) = D(A)$.
Γραμμοπράξη τύπου III: $D(B) = -D(A)$.

<u>Πόρισμα</u>
Αν οι $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι γραμμοϊσοδύναμοι, και D είναι μια απεικόνιση ορίζουσας, τότε $D(A) = 0 \Leftrightarrow D(B) = 0$.
<u>Απόδειξη</u>
Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ και πίνακες $A_0, A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $A_0 = A_1$ και $A_k = B$, έτσι ώστε ο A_{i+1} να προκύπτει από τον A_i μέσω ενός στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών. Από το παραπάνω πόρισμα, είναι $D(A_0) = 0 \Leftrightarrow D(A_1) = 0 \Leftrightarrow D(A_2) = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow D(A_k) = 0$.

<u>Πρόταση</u>
Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και D είναι μια απεικόνιση ορίζουσας, τότε $D(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ ο A είναι αντιστρέψιμος.

Απόδειξη

[$\Rightarrow$] Γνωρίζουμε ότι ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ο οποίος έχει ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Καθώς $D(A) \neq 0$, έπεται ότι $D(B) \neq 0$. Αν ο B έχει μηδενική n-οστή γραμμή, τότε $D(B) \overset{(ii)}{=} 0D(B) = 0$, άτοπο. Συνεπώς, ο B δεν έχει καμία μηδενική γραμμή και άρα $B = I_n$. Καθώς ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον I_n, αυτός είναι αντιστρέψιμος.

[$\Leftarrow$] Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον I_n. Καθώς $D(I_n) = 1 \neq 0$ (από ιδιότητα (iv) του ορισμού), έπεται ότι $D(A) \neq 0$.

Στόχος

Θα έξετάσουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της απεικόνισης ορίζουσας D για κάθε n.

Ύπαρξη ορίζουσας απεικόνισης:

Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο n.

Αν $n = 1$, έχουμε δει ότι η (μοναδική) απεικόνιση ορίζουσσα δίνεται από τον τύπο $D_1(a) = a$.

Γενικά, υποθέτοντας ότι $D_{n-1} : \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)} \to \mathbb{R}$ είναι μια απεικόνιση ορίζουσας, ορίζουμε την απεικόνιση $D_n : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ ως εξής: Για κάθε $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$ και δείκτες i, j ορίζω A_{ij} τον $(n-1)\times(n-1)$ πίνακα, ο οποίος προκύπτει από τον A διαγράφοντας την i-γραμμή και την j-στήλη. Με τον συμβολισμό αυτό, ορίζουμε $D_n(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} D_{n-1}(A_{i1})$.

Παραδείγματα

Αν $n = 2$, τότε $D_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a D_1(d) + (-1)^{2+1} c D_1(b) = ad - bc$.

Αν $n = 3$, τότε

$$D_3 \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a D_2 \begin{pmatrix} e & f \\ h & k \end{pmatrix} + (-1)^{2+1} d D_2 \begin{pmatrix} b & c \\ h & k \end{pmatrix} + (-1)^{3+1} g D_2 \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix} =$$

$$= a(ek - fh) - d(bk - ch) + g(bf - ce) = aek - afh - dbk + dch + gbf - gce.$$

Ισχυρισμός:

Η απεικόνιση D_n ειναι μια απεικόνιση ορίζουσας.

Απόδειξη του ισχυρισμού:

Ιδιότητα (i) του ορισμού:

Υποθέτουμε για παράδειγμα ότι $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $r_1 = r' + r''$, δηλαδή ότι $(a_{11} \dots a_{1n}) = (a'_{11} \dots a'_{1n}) + (a''_{11} \dots a''_{1n})$. Αν $A' = \begin{pmatrix} r' \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ και $A'' = \begin{pmatrix} r'' \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, τότε είναι

$$D_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} D_{n-1}(A_{i1}) = a_{11} D_{n-1}(A_{11}) + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} D_{n-1}(A_{i1}) =$$

$$= a'_{11} D_{n-1}(A_{11}) + a''_{11} D_{n-1}(A_{11}) + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} (D_{n-1}(A'_{i1}) + D_{n-1}(A''_{i1})) =$$

$$= a'_{11} D_{n-1}(A'_{11}) + a''_{11} D_{n-1}(A''_{11}) + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} a'_{i1} D_{n-1}(A'_{i1}) + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} a''_{i1} D_{n-1}(A''_{i1}) = D_n(A') + D_n(A'').$$

Ιδιότητα (ii) του ορισμού:

Υποθέτουμε για παράδειγμα ότι $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $r_1 = \lambda r'_1$, δηλαδή ότι $(a_{11} \dots a_{1n}) =$

$(\lambda a'_{11} \dots \lambda a'_{1n})$. Αν $A' = \begin{pmatrix} r'_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, τότε υπολογίζουμε ότι

$D_n(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}D_{n-1}(A_{i1}) = a_{11}D_{n-1}(A_{11}) + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}D_{n-1}(A_{i1}) =$
$= \lambda a'_{11}D_{n-1}(A_{11}) + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\lambda D_{n-1}(A'_{i1}) = \lambda[a'_{11}D_{n-1}(A'_{11}) + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a'_{i1}D_{n-1}(A'_{i1})] = \lambda D_n(A')$.

Ιδιότητα (iii) του ορισμού:

Αν είναι για παράδειγμα $A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ και $r_1 = r_2$, τότε από τον ορισμό της D_n είναι

$D_n(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}D_{n-1}(A_{i1}) = a_{11}D_{n-1}(A_{11}) - a_{21}D_{n-1}(A_{21}) + \sum_{i=3}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}D_{n-1}(A_{i1}) =$
$= \sum_{i=3}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}D_{n-1}(A_{i1}) = 0$.

Ιδιότητα (iv) του ορισμού:
Από τον ορισμό, είναι $D_n(I_n) = 1 \cdot D_{n-1}(I_{n-1}) + \sum_{i\neq 1} 0 \cdot D(A_{i1}) = D_{n-1}(I_{n-1}) = 1$.

Έχοντας δείξει την ύπαρξη της απεικόνισης ορίζουσας, θα εξετάσουμε τώρα τη μοναδικότητά της. Για το σκοπό αυτό, θα χρειαστούμε την έννοια της ματάθεσης.

Θεωρούμε ένα μη-κενό σύνολο X και το σύνολο $S_X = \{f : X \to X|$ η f 1-1 και επί$\}$. Καθώς η σύνθεση δύο 1-1 και επί συναρτήσεων είναι επίσης 1-1 και επί, έπεται ότι για κάθε $f, g \in S_X$ είναι $f \circ g \in S_X$.

Ορισμοί
(i) Αν $X = \{1, 2, \dots, n\}$, τότε το σύνολο S_X συμβολίζεται με S_n και ονομάζεται σύνολο μεταθέσεων σε n σύμβολα. Τα στοιχεία $\sigma \in S_n$ καλούνται μεταθέσεις σε n σύμβολα.
(ii) Μια μετάθεση $\sigma \in S_n$ καλείται αντιμετάθεση αν υπάρχουν $i, j \in \{1, \dots, n\}$ με $i \neq j$, έτσι ώστε να είναι $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ και $\sigma(k) = k$ για κάθε $k \neq i, j$.
(iii) Μια μετάθεση $\sigma \in S_n$ καλείται κύκλος μήκους k αν υπάρχει υποσύνολο $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, έτσι ώστε $\sigma(i_1) = i_2$, $\sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{k-1}) = i_k$, $\sigma(i_k) = i_1$ και $\sigma(j) = j$ αν $j \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$.

Παρατηρήσεις
(i) Οι κύκλοι μήκους 2 είναι ακριβώς οι αντιμεταθέσεις.
(ii) Μπορεί να δειχτεί ότι κάθε μετάθεση είναι σύνθεση κύκλων.
(iii) Καθώς κάθε κύκλος είναι σύνθεση αντιμεταθέσεων, έπεται ότι κάθε μετάθεση $\sigma \in S_n$ μπορει να αναλυθεί ως σύνθεση αντιμεταθέσεων.

Πρόταση
Αν $D', D'' : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ είναι δυο απεικονίσεις ορίζουσας, τότε $D' = D''$.
Απόδειξη
Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $D = D' - D'' : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ με $D(A) = D'(A) - D''(A)$ είναι η μηδενική συνάρτηση. Η συνάρτηση D ικανοποιεί τις ιδιότητες (i), (ii) και (iii) του ορισμού των οριζουσών. Συνεπώς, όπως έχουμε δει, θα είναι $D(A) = D(B)$ αν ο B προκύπτει από τον A μέσω

ενός στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών τύπου II.
Θεωρούμε έναν πίνακα $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ και για κάθε $i=1,\ldots,n$ γράφουμε $r_i=(a_{i1}\,a_{i2}\,\ldots\,a_{in})$. Τότε, είναι
$r_i=a_{i1}(1\,0\ldots 0)+a_{i2}(0\,1\ldots 0)+\cdots+a_{in}(0\,0\ldots 1)=a_{i1}e_1+a_{i2}e_2+\cdots+a_{in}e_n=\sum\limits_{j,i=1}a_{iji}e_{ji}$.

Συνεπώς, είναι $A=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\r_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{j1}a_{1j1}e_{j1}\\\sum\limits_{j2}a_{2j2}e_{j2}\\\vdots\\\sum\limits_{jn}a_{njn}e_{jn}\end{pmatrix}$ και άρα

$$D(A)=\sum_{j_1}a_{1j_1}D\begin{pmatrix}e_{j_1}\\r_j\\\vdots\\r_n\end{pmatrix}=\sum_{j_1}\sum_{j_2}a_{1j_1}a_{2j_2}D\begin{pmatrix}e_{j_1}\\e_{j_2}\\r_3\\\vdots\\r_n\end{pmatrix}=\cdots=$$

$$=\sum_{j_1}\sum_{j_2}\ldots\sum_{j_n}a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}D\begin{pmatrix}e_{j_1}\\e_{j_2}\\\vdots\\e_{j_n}\end{pmatrix}\ (n^n \text{ όροι}).$$

Αν κάποιο j_a ισούται με κάποιο j_b, για $a\neq b$, τότε $D\begin{pmatrix}e_{j_1}\\e_{j_2}\\\vdots\\e_{j_n}\end{pmatrix}=0$. Αν είναι $j_a\neq j_b$ για κάθε $a\neq b$, τότε θα είναι $\{j_1,j_2,\ldots,j_n\}=\{1,2,\ldots,n\}$ και άρα η αντιστοιχία $k\to j_k$ είναι μια μετάθεση σε n σύμβολα. Αναλύοντας τη μετάθεση αυτή ως σύνθεση m αντιμεταθέσεων (για κάποιο m), έπεται ότι $D\begin{pmatrix}e_{j_1}\\e_{j_2}\\\vdots\\e_{j_n}\end{pmatrix}=(-1)^mD\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{pmatrix}=(-1)^mD(I_n)=(-1)^m[D'(I_n)-D''(I_n)]=0$. Τελικά, ειναι $D(A)=0$.

Παρατηρήσεις
(i) Είδαμε στο πλαίσιο της απόδειξης της μοναδικότητας της ορίζουσας $D=\det$, ότι

$$\det A=\sum a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}\det\begin{pmatrix}e_{j_1}\\e_{j_2}\\\vdots\\e_{j_n}\end{pmatrix}=\sum_{\sigma\in S_n}a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}\det\begin{pmatrix}e_{\sigma(1)}\\e_{\sigma(2)}\\\vdots\\e_{\sigma(n)}\end{pmatrix}=$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\pm a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}\det\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{pmatrix}=\sum_{\sigma\in S_n}\pm a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}.$$

(ii) Η απεικόνιση $A\to\sum\limits_{i=1}^n(-1)^{i+2}a_{i2}\det A_{i2}$ έχει επίσης τις ιδιότητες της det. Συνεπώς, λόγω μοναδικότητας της ορίζουσας, είναι $\det A=\sum\limits_{i=1}^n(-1)^{i+2}a_{i2}\det A_{i2}$. Ανάλογα, για κάθε δείκτη $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ είναι $\det A=\sum\limits_{i=1}^n(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij}$ (ανάπτυγμα κατά Laplace της ορίζουσας ως προς την j-στήλη).
(iii) Η ορίζουσα ενός πίνακα $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ του οποίου δύο στήλες είναι ίσες, είναι ίση με 0.

Απόδειξη:
Ας γράψουμε $A = (c_1\ c_2 \dots c_n)$, όπου $c_1, c_2, \dots, c_n$ είναι οι στήλες του πίνακα. Τότε, υπάρχουν δείκτες $j', j'' \in \{1, 2, \dots, n\}$ με $j' \neq j''$ και $c_{j'} = c_{j''}$. Θα δείξουμε ότι $\det A = 0$, χρησιμοποιώντας επαγωγή στο n.
Αν $n = 2$, τότε είναι $A = \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}$ και άρα $\det A = ac - ac = 0$. Υποθέτουμε τώρα ότι $n > 2$ και επιλέγουμε ένα δείκτη $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ με $j \neq j', j''$. Αναπτύσσοντας κατά Laplace ως προς την j-στήλη, έχουμε $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot 0 = 0$ (για κάθε i ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας A_{ij} έχει δύο στήλες ίσες).
(iv) Αν A είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας, τότε $\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$.
Απόδειξη:
Χρησιμοποιούμε επαγωγή ως προς n και παρατηρούμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = 1$. Υποθέτουμε τώρα ότι είναι $n > 1$ και ότι το ζητούμενο ισχύει για $(n-1) \times (n-1)$ άνω τριγωνικούς πίνακες. Αν $A = (a_{ij})$ είναι ένας άνω τριγωνικός $n \times n$ πίνακας, τότε αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς την πρώτη στήλη είναι $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{i1} \det A_{i1} = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11}$. Ο πίνακας A_{11} είναι ένας άνω τριγωνικός $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας και άρα θα είναι $\det A = (-1)^{1+1} a_{11} (a_{22} \dots a_{nn}) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$.

Παραδείγματα

(i) Αν $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}$, τότε $\det A = -ab$.

(ii) Αν $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, τότε $\det A = d \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} = d(-ab) = -abd$.

(iii) Αν $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & d & e & f \\ g & h & i & j \end{pmatrix}$, τότε $\det A = (-g) \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = (-g)(-abd) = abdg$.

Ορισμός

Για κάθε πίνακα $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορίζουμε τον προσαρτημένο του πίνακα $B = (b_{ij}) = \operatorname{adj} A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, θέτοντας $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$.

Παράδειγμα

Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, τότε

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \det A_{31} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & -\det A_{32} \\ \det A_{13} & -\det A_{23} & \det A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 19 & -7 \\ 4 & 3 & -1 \\ -11 & -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Πρόταση

Για κάθε $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι $(\operatorname{adj} A) A = (\det A) I_n$.

Απόδειξη

Έστω $A = (a_{ij})$ και $\operatorname{adj} A = (b_{ij})$, όπου $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το γινόμενο $(\operatorname{adj} A) A = (c_{ij})$. Από τον ορισμό του γινομένου, είναι $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} (\det A_{ki}) a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{kj} \det A_{ki}$. Θα δείξουμε ότι $c_{ij} = \det A$ (αντίστ. $c_{ij} = 0$) αν $i = j$ (αντίστ. αν $i \neq j$).

Πράγματι, αν $i = j$, τότε $c_{ii} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}a_{ki}\det A_{ki} = \det A$ (ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα A κατά Laplace ως προς την i-στήλη). Αν $i \neq j$, τότε γράφοντας $A = (c_1 \dots c_n)$ και $X_{ij} = (c_1 \dots c_{i-1}\ c_j\ c_{i+1} \dots c_n)$, είναι $c_{ij} = \det X_{ij} = 0$ (ο πίνακας X_{ij} έχει δυο στήλες ίσες).

<u>Πόρισμα</u>

Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ειναι αντιστρέψιμος, τότε $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\operatorname{adj} A$.
Απόδειξη:
Η σχέση $(\operatorname{adj} A)A = (\det A)I_n$ δίνει ότι $\operatorname{adj} A = (\det A)I_nA^{-1}$, δηλαδή ότι $\operatorname{adj} A = (\det A)A^{-1}$. Καθώς ο A είναι αντιστρέψιμος, είναι $\det A \neq 0$. Συνεπώς, έπεται ότι $\dfrac{1}{\det A}\operatorname{adj} A = A^{-1}$.

<u>Εφαρμογή</u>

Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, τότε είδαμε ότι είναι $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 27 & 19 & -7 \\ 4 & 3 & -1 \\ -11 & -8 & 3 \end{pmatrix}$. Μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $\det A = \det\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 27 + (-19) + (-7) = 1 \neq 0$.
Άρα, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 27 & 19 & -7 \\ 4 & 3 & -1 \\ -11 & -8 & 3 \end{pmatrix}$.

<u>Πρόταση</u> (τύπος του Cramer)

Έστω $Ax = b$ ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους, όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ και $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε το σύστημα έχει μια μοναδική λύση, την εξής: $x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A}$, $x_2 = \dfrac{\det A_2}{\det A}, \dots,\ x_n = \dfrac{\det A_n}{\det A}$. Εδώ, $A_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ο πίνακας που προκύπτει αντικαθιστώντας την j-στήλη του A με τη στήλη b. Αν $A = (c_1 \dots c_n)$, τότε $A_j = (c_1 \dots c_{j-1}\ b\ c_{j+1} \dots c_n)$ για $j = 1, 2, \dots, n$.
<u>Απόδειξη</u>
Η σχέση $Ax = b$ δίνει $x = A^{-1}b$, δηλαδή $x = \dfrac{1}{\det A}(\operatorname{adj} A)b$. Συνεπώς, για κάθε i είναι $x_i = \dfrac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}(\det A_{ji})b_j = \dfrac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}b_j\det A_{ji} = \dfrac{1}{\det A}\det A_i$ (ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα A_i κατά Laplace ως προς την i-στήλη).

<u>Παράδειγμα</u>

Θεωρώ το σύστημα $\left\{\begin{matrix} x + 2y - 3z = -1 \\ x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 11 \end{matrix}\right\}$ και χρησιμοποιούμε τον τύπο του Cramer. Υπολογίζουμε τις τιμές $D = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -6$, $D_x = \det\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & 1 \\ 11 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -18$, $D_y = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 11 & 3 \end{pmatrix} = -6$ και $D_z = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 11 \end{pmatrix} = -12$. Έτσι, είναι $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-18}{-6} = 3$, $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-6}{-6} = 1$ και $z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{-12}{-6} = 2$.

Διανυσματικοί Χώροι

Ορισμός

Ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος είναι ένα μη-κενό σύνολο V, εφοδιασμένο με δύο πράξεις $V \times V \to V$ (άθροισμα) και $\mathbb{R} \times V \to V$ (βαθμωτός πολλαπλασιασμός), έτσι ώστε να ισχύουν τα εξής:
(i) $u + u' = u' + u$ για $u, u' \in V$
(ii) $(u + u') + u'' = u + (u' + u'')$ για $u, u', u'' \in V$
(iii) υπάρχει $0 \in V$ ώστε $u + 0 = u$ για κάθε $u \in V$
(iv) για κάθε $u \in V$ υπάρχει $\bar{u} \in V$ με $u + \bar{u} = 0 \in V$
(v) $\lambda(u + u') = \lambda u + \lambda u'$ για $\lambda \in \mathbb{R}$ και $u, u' \in V$
(vi) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $u \in V$
(vii) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$ για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $u \in V$
$(viii)$ $1u = u$ για κάθε $u \in V$

Παραδείγματα

(i) Το $\mathbb{R}$ με τις συνήθεις πράξεις είναι ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος.
(ii) Το σύνολο $\mathbb{R}^{n\times m}$ των $n \times m$ πινάκων (με το σύνηθες άθροισμα και βαθμωτό πολλαπλασιασμό) είναι ένας διανυσματικός χώρος.
(iii) Το σύνολο X των διανυσμάτων με αρχή το σημείο Ο του επιπέδου είναι ένας διανυσματικός χώρος.
(iv) Θεωρώ το σύνολο $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{συνεχής}\}$.
Καθώς το άθροισμα δυο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση, ορίζεται η απεικόνιση $C[0,1] \times C[0,1] \to C[0,1]$, με $(f,g) \to f+g$ και $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$ (κατά σημείο άθροισμα συναρτήσεων). Ομοίως, ορίζεται η απεικόνιση $\mathbb{R} \times C[0,1] \to C[0,1]$, με $(\lambda, f) \to \lambda f$ και $(\lambda f)(t) = \lambda f(t)$. Οι δύο αυτές πράξεις ικανοποιούν τις ιδιότητες του ορισμού ενός διανυσματικού χώρου.
(v) Το σύνολο $\mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων στη μεταβλητή x είναι ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος με τις συνήθεις πράξεις: Αν $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ (πεπερασμένο άθροισμα) και $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots$ (πεπερασμένο άθροισμα) τότε $f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots$ και $\lambda f(x) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x^2 + \cdots$.
(vi) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{1\times n}$. Είναι $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}\}$ και οι πράξεις ορίζονται ως εξής:

- $(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$
- $\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n)$

(vii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο $V = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] : \deg f(x) \leq n\}$. Με το σύνηθες άθροισμα και βαθμωτό πολλαπλασιασμό, το V είναι ένας διανυσματικός χώρος.
$(viii)$ Το σύνολο $V = \{(a_n) : a_n \in \mathbb{R}\}$ των πραγματικών ακολουθιών είναι ένας διανυσματικός χώρος με πράξεις που ορίζονται κατά σημείο (όπως στο παράδειγμα (vi) παραπάνω).

Γενικές Ιδιότητες

(i) Το στοιχείο $0 \in V$ για το οποίο είναι $u + 0 = u$ (σχέση $(*)$) για κάθε $u \in V$, είναι μοναδικό και ονομάζεται ουδέτερο στοιχείο του V.
Απόδειξη:
Αν το στοιχείο $\omega \in V$ είναι τέτοιο ώστε $u + \omega = u$ (σχέση $(**)$) για κάθε $u \in V$, τότε είναι $0 \overset{(**)}{=} 0 + \omega = \omega + 0 \overset{(*)}{=} \omega$.
(ii) Για κάθε $u \in V$ το στοιχείο $\bar{u} \in V$ με $u + \bar{u} = 0 \in V$ είναι μοναδικό και ονομάζεται αντίθετο του u και συμβολίζεται με $-u$.
Απόδειξη:
Έστω ότι $u' \in V$ ειναι ένα στοιχείο με $u + u' = 0$. Τότε, είναι $u' = u' + 0 = u' + (u + \bar{u}) = (u' + u) + \bar{u} = 0 + \bar{u} = \bar{u}$.
(iii) Αν $u, u' \in V$, τότε $-(u + u') = (-u) + (-u')$.

Απόδειξη:
Είναι $u + u' + (-u) + (-u') = u' + u + (-u) + (-u') = u' + 0 + (-u') = u' + (-u') = 0$.
(iv) $0u = \lambda 0 = 0 \in V$ $(u \in V,\ \lambda \in \mathbb{R})$
Απόδειξη:
Είναι $0u = (0+0)u = 0u + 0u \Rightarrow 0 = 0u$ και $\lambda 0 = \lambda(0+0) = \lambda 0 + \lambda 0 \Rightarrow 0 = \lambda 0$.
(v) $\lambda(-u) = (-\lambda u) = -\lambda u$
Απόδειξη:
Είναι $0 = \lambda 0 = \lambda[u + (-u)] = \lambda u + \lambda(-u) \Rightarrow \lambda(-u) = -\lambda u$ και $0 = 0u = [\lambda + (-\lambda)]u = \lambda u + (-\lambda)u \Rightarrow (-\lambda u) = -\lambda u$.

Ορισμός
Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Ένα υποσύνολο $U \subseteq V$ ονομάζεται διανυσματικός υπόχωρος του V αν:
(i) $0 \in U$,
(ii) αν $u, u' \in U$, τότε $u + u' \in U$ και
(iii) αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $u \in U$, τότε $\lambda u \in U$.

Παρατήρηση
Ένας διανυσματικός υπόχωρος U του διανυσματικού χώρου V είναι ο ίδιος διανυσματικός χώρος ως προς τους περιορισμούς των πράξεων του V.

Παραδείγματα
(i) Το υποσύνολο $T_n \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ των άνω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n\times n}$.
(ii) Το σύνολο Λ των λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος n εξισώσεων με m αγνώστους είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^{m\times 1}$.
Απόδειξη:
Ας θεωρήσουμε το ομογενές σύστημα $Ax = 0$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Αρχικά, παρατηρούμε ότι $A0 = 0$ και άρα $0 \in \Lambda$. Αν είναι $u, u' \in \Lambda$, τότε $Au = 0$ και $Au' = 0$. Συνεπώς, $A(u + u') = Au + Au' = 0 + 0 = 0$ και άρα $u + u' \in \Lambda$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $A(\lambda u) = \lambda Au = \lambda 0 = 0$ και άρα $\lambda u \in \Lambda$.
(iii) Έστω $V = \{(a_n)_n : a_n \in \mathbb{R}\}$ ο διανυσματικός χώρος των πραγματικών ακολουθιών. Τότε, το υποσύνολο $U = \{(a_n)_n \in V :$ υπάρχει το όριο $\lim a_n\}$ των συγκλινουσών ακολουθιών είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του V.
Απόδειξη:
Πράγματι, είναι $(0, 0, 0, \ldots) \in U$ και για κάθε $(a_n)_n, (b_n)_n \in U$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $(a_n + b_n)_n \in U$ (και μάλιστα $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$) και $(\lambda a_n)_n \in U$ (και μάλιστα $\lim(\lambda a_n) = \lambda \lim a_n$).
Αν $U_0 = \{(a_n)_n \in V : \lim a_n = 0\}$ είναι το σύνολο των μηδενικών ακολουθιών, τότε το U_0 είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του U (και άρα και του V).
Αν $U_{00} = \{(a_n)_n \in V :$ υπάρχει n_0 με $a_n = 0$ για κάθε $n \geq n_0\}$ είναι το σύνολο των ακολουθιών που είναι τελικά ίσες με μηδέν, τότε ο U_{00} είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του U_0 (και άρα και του U και του V).
(iv) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τότε, ο μέγιστος υπόχωρος του V είναι ο ίδιος ο V, ενώ ο ελάχιστος υπόχωρος του V είναι ο μηδενικός υπόχωρος, το μονοσύνολο $\{0\}$.

Παρατήρηση
Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $A, B \subseteq V$ δυο υπόχωροι. Τότε, η τομή $A \cap B \subseteq V$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του V.
Απόδειξη:
Είναι $0 \in A$, καθώς ο A είναι υπόχωρος, και $0 \in B$, καθώς ο B είναι υπόχωρος. Συνεπώς, $0 \in A \cap B$. Έστω $u, u' \in A \cap B$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε, είναι $u, u' \in A$ και άρα (καθώς ο A είναι υπόχωρος) $u + u', \lambda u \in A$. Ομοίως, είναι $u, u' \in B$ και άρα (καθώς ο B είναι υπόχωρος) $u + u', \lambda u \in B$. Συνεπώς, δείξαμε ότι $u + u', \lambda u \in A \cap B$.

Ορισμός
Αν $A, B \subseteq V$ είναι υπόχωροι, ορίζουμε $A+B = \{u \in V : \text{υπάρχει } a \in A \text{ και } b \in B \text{ με } u = a+b\}$.

Παρατηρήσεις
(i) Το υποσύνολο $A + B$ που ορίστηκε παραπάνω είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του V.
Απόδειξη:
Αρχικά, παρατηρούμε ότι $0 = 0 + 0 \in A + B$. Αν $u, u' \in A + B$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε μπορούμε να γράψουμε $u = a + b$ και $u' = a' + b'$ για κάποια $a, a' \in A$ και $b, b' \in B$. Συνεπώς, είναι $u + u' = a + b + a' + b' = (a + a') + (b + b') \in A + B$ και $\lambda u = \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b \in A + B$.
(ii) Είναι $A \subseteq A + B$ και $B \subseteq A + B$.
Απόδειξη:
Πράγματι, για κάθε $a \in A$ είναι $a = a+0 \in A+B$ και άρα $A \subset A+B$. Ανάλογα, αν $b \in B$, τότε $b = 0 + b \in A + B$ και άρα $B \subseteq A + B$.
(iii) Αν $U \subseteq V$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος με $A \subseteq U$ και $B \subseteq U$, τότε $A + B \subseteq U$.
Απόδειξη:
Αν $u \in A + B$, τότε υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ με $u = a + b$. Καθώς $A \subseteq U$, έπεται ότι $a \in U$. Ομοίως, είναι $B \subseteq U$ και άρα $b \in U$. Τελικά, είναι $a, b \in U$ και άρα $u = a + b \in U$.
(iv) Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το άθροισμα $A + B$ είναι ο ελάχιστος διανυσματικός υπόχωρος του V που περιέχει τους υποχώρους A και B.

Ορισμός
Αν $A, B \subseteq V$ είναι διανυσματικοί υπόχωροι και $A \cap B = 0$, τότε το άθροισμα $A+B$ ονομάζεται ευθύ και γράφεται ως $A \oplus B$. Με άλλα λόγια, γράφουμε $W = A \oplus B$ αν είναι $W = A+B$ και $A \cap B = 0$.

Πρόταση
Έστω $A, B \subseteq V$ διανυσματικοί υπόχωροι. Τότε, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:
(i) Ο υπόχωρος W είναι το ευθύ άθροισμα των A, B.
(ii) Κάθε στοιχείο $w \in W = A+B$ μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα $w = a+b$, όπου $a \in A$ και $b \in B$.
Απόδειξη
$(i) \to (ii)$ Γνωρίζουμε ότι για κάθε στοιχείο $w \in W = A + B$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ με $w = a + b$. Έστω τώρα ότι $a' \in A$ και $b' \in B$ είναι δύο άλλα στοιχεία με $w = a' + b'$. Τότε, είναι $a + b = a' + b'$ και άρα $a - a' = b' - b \in A \cap B$. Όμως, $A \cap B = 0$ και άρα $a - a' = b' - b = 0$, δηλαδή είναι $a = a'$ και $b = b'$.
$(ii) \to (i)$ Για να δείξουμε ότι το άθροισμα $A + B$ είναι ευθύ, θα δείξουμε ότι $A \cap B = 0$. Έστω $w \in A \cap B$. Είναι $w \in A + B = W$ και άρα από την υπόθεση (ii) μπορούμε να γράψουμε το w με μοναδικό τρόπο ως ένα άθροισμα $a + b$ με $a \in A$ και $b \in B$. Παρατηρούμε ότι $w = w + 0 = 0 + w$ και άρα θα πρέπει αναγκαστικά να είναι $w = 0$.

Διανυσματικός Χώρος Πηλίκο

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $A \subseteq V$ ένας διανυσματικός υπόχωρος. Ορίζουμε μια σχέση στο V, ως εξής: αν $v, v' \in V$, τότε γράφουμε $v \sim v'$ αν και μόνο αν $v' - v \in A$.

Παρατήρηση
Η παραπάνω σχέση είναι μια σχέση ισοδυναμίας.
Απόδειξη:
(i) Για την ανακλαστική ιδιότητα: Αν $v \in V$, τότε $v - v = 0 \in A$ και άρα $v \sim v$.
(ii) Για τη συμμετρική ιδιότητα: Έστω $v, v' \in V$ με $v \sim v'$. Τότε, είναι $v' - v \in A$ και άρα $v - v' = (-1)(v' - v) \in A$. Συνεπώς, είναι $v' \sim v$.
(iii) Για την μεταβατική ιδιότητα: Έστω $v, v', v'' \in V$ με $v \sim v'$ και $v' \sim v''$. Τότε, είναι $v' - v \in A$ και $v'' - v' \in A$. Συνεπώς, θα είναι $(v' - v) + (v'' - v') \in A$, δηλαδή $v'' - v \in A$. Έτσι, έχουμε

ότι $v \sim v''$.

Για την κλάση ισοδυναμίας του στοιχείου $v \in V$, είναι (από τον ορισμό)

$$[v] = \{v' \in V : v \sim v'\} = \{v' \in V : v' - v \in A\} = \{v' \in V : \text{ υπάρχει } a \in A \text{ με } v' = v + a\}.$$

Η κλάση ισοδυναμίας $[v]$ του στοιχείου $v \in V$ συμβολίζεται με $v + A$ και ονομάζεται σύμπλοκο του V modulo A με αντιπρόσωπο το v. Θεωρούμε τώρα το σύνολο πηλίκο $V/\sim = \{[v] : v \in V\} = \{v + A : v \in V\}$, το οποίο συμβολίζουμε με V/A. Είναι δηλαδή $V/A = \{v + A : v \in V\}$. Θα ορίσουμε στο V/A τη δομή ενός διανυσματικού χώρου, ως εξής:

(i) (πρόσθεση) Θεωρούμε δύο στοιχεία $v_1 + A, v_2 + A \in V/A$ (για κάποια $v_1, v_2 \in V$) και ορίζουμε το άθροισμα $(v_1 + A) + (v_2 + 2) = (v_1 + v_2) + A$. Αρχικά, παρατηρούμε ότι η πράξη αυτή είναι καλά ορισμένη (δεν εξαρτάται δηλαδή από την επιλογή των αντιπροσώπων).
Απόδειξη:
Έστω ότι $v_1 + A = v_1' + A$ και $v_2 + A = v_2' + A$. Θα δείξουμε ότι $(v_1 + v_2) + A = (v_1' + v_2') + A$. Πράγματι, είναι $v_1' - v_1 \in A$ (μιας και $v_1 + A = v_1' + A$) και $v_2' - v_2 \in A$ (μιας και $v_2 + A = v_2' + A$). Συνεπώς, είναι $(v_1' - v_1) + (v_2' - v_2) \in A$, δηλαδή $(v_1' + v_2') - (v_1 + v_2) \in A$. Αυτό σημαίνει ότι $v_1 + v_2 \sim v_1' + v_2'$, δηλαδή $(v_1 + v_2) + A = (v_1' + v_2') + A$.

(ii) (βαθμωτός πολλαπλασιασμός) Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $v + A \in V/A$. Ορίζουμε $\lambda(v + A) = \lambda v + A$. Όπως και πριν, η πράξη αυτή δεν εξαρτάται από την επιλογή αντιπροσώπου της κλάσης.
Απόδειξη:
Θα δείξουμε ότι αν $v + A = v' + A$, τότε είναι $\lambda v + A = \lambda v' + A$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Πράγματι, αν $v + A = v' + A$ τότε θα είναι $v' - v \in A$ και άρα $\lambda(v' - v) \in A$, δηλαδή $\lambda v' - \lambda v \in A$. Αυτό σημαίνει ότι $\lambda v \sim \lambda v'$, δηλαδή $\lambda v + A = \lambda v' + A$.

Με τις παραπάνω πράξεις, το συνολο V/A εφοδιάζεται με τη δομή ενός διανυσματικού χώρου. Με άλλα λόγια, οι πράξεις αυτές ικανοποιούν τις ιδιότητες του ορισμού ενός διανυσματικού χώρου. Η επαλήθευση των ιδιοτήτων αυτών ειναι άμεση από τον ορισμό και τις ιδιότητες του διανυσματικού χώρου V. Έτσι, για παράδειγμα, αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $v_1 + A, v_2 + A \in V/A$, τότε
$\lambda[(v_1+A)+(v_2+A)] = \lambda[(v_1+v_2)+A] = \lambda(v_1+v_2)+A = (\lambda v_1+\lambda v_2)+A = (\lambda v_1+A)+(\lambda v_2+A) = \lambda(v_1 + A) + \lambda(v_2 + A)$.
Επίσης, το αντίθετο $-(v + A)$ του στοιχείου $v + A \in V/A$ είναι το σύμπλοκο $(-v) + A$, μιας και $(v + A) + ((-v) + A) = (v + (-v)) + A = 0 + A$.

<u>Ορισμός</u>
Ο διανυσματικός χώρος V/A που μόλις ορίσαμε ονομάζεται διανυσματικός χώρος πηλίκο του V ως προς τον υπόχωρο A.

<u>Βάσεις και Διάσταση</u>

<u>Πρόταση</u>
Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $X \subseteq V$ ένα μη-κενό υποσύνολο. Θεωρούμε το υποσύνολο $V_0 \subseteq V$ που ορίζεται θέτοντας
$V_0 = \{v \in V : \text{υπάρχει } n \in \mathbb{N},\, x_1, ..., x_n \in X \text{ και } \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ με } v = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n\}$. Τότε, το V_0 ειναι ο ελάχιστος διανυσματικός υπόχωρος του V που περιέχει το υποσύνολο X.

<u>Ορισμός</u>
Γράφουμε $V_0 = \langle X \rangle$ και λέμε ότι ο V_0 είναι η γραμμική θήκη του υποσυνόλου X ή, ισοδύναμα, ότι το X ειναι σύνολο γεννητόρων του V_0.

<u>Απόδειξη της Πρότασης</u>
(i) Ο V_0 είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του V:
Παρατηρούμε ότι αν $x \in X$, τότε είναι $0_V = 0x \in V_0$. Έστω τώρα δύο στοιχεία $v, v' \in V_0$

και $\lambda \in \mathbb{R}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, στοιχεία $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ και πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_1', ..., \lambda_n'$, έτσι ώστε $v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ και $v' = \lambda_1' x_1 + \lambda_2' x_2 + \cdots + \lambda_n' x_n$. Τότε είναι $v + v' = (\lambda_1 + \lambda_1')x_1 + (\lambda_2 + \lambda_2')x_2 + \cdots + (\lambda_n + \lambda_n')x_n \in V_0$ και $\lambda v = (\lambda\lambda_1)x_1 + (\lambda\lambda_2)x_2 + \cdots + (\lambda\lambda_n)x_n \in V_0$. Συνεπώς, δείξαμε ότι ο V_0 είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.
(ii) Είναι $X \subseteq V_0$:
Πράγματι, για κάθε $x \in X$ είναι $x = 1x \in V_0$.
(iii) Αν $U \subseteq V$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος και $X \subseteq U$, τότε $V_0 \subseteq U$:
Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι U ένας διανυσματικός υπόχωρος του V με $X \subseteq U$. Για να δείξουμε ότι $V_0 \subseteq U$, θεωρούμε ένα στοιχείο $v \in V_0$. Τότε, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, στοιχεία $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ και πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, τέτοιοι ώστε $v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$. Καθώς είναι $X \subseteq U$, έπεται ότι $x_1, x_2, \ldots, x_n \in U$. Όμως ο $U \subseteq V$ είναι διανυσματικός υπόχωρος και άρα είναι $v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \in U$.

Παράδειγμα
(i) Αν $X = \{u\}$, τότε $\langle X \rangle = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$.
(ii) Αν $X = \{u, v\}$, τότε $\langle X \rangle = \{\lambda u + \mu v : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
(iii) Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα εξισώσεων $\left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{array} \right\}$. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο των λύσεων V_0 του συστήματος είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^{3\times 1}$. Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -3 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Έτσι, το αρχικό σύστημα ειναι ισοδύναμο με το σύστημα $\left\{ \begin{array}{c} x + \frac{4}{3}z = 0 \\ y - \frac{1}{3}z = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = -\frac{4}{3}z \\ y = \frac{1}{3}z \end{array} \right\}$. Τελικά, είναι $V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}z \\ \frac{1}{3}z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

Ορισμός
Αν είναι $X = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, τότε γράφουμε $\langle X \rangle = \langle v_1, ... v_n \rangle$.

Πρόταση
Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $v_1, \ldots, v_n \in V$. Τότε:
(i) $\langle v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n \rangle = \langle v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_n \rangle$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$ και $\lambda \neq 0$.
(ii) $\langle \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots \rangle = \langle \ldots, v_i + \lambda v_j, \ldots, v_j, \ldots \rangle$ για κάθε $i \neq j$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.
(iii) $\langle \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots \rangle = \langle \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots \rangle$ για κάθε $i \neq j$.
Απόδειξη
(i) Αν $v \in \langle v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n \rangle$, τότε μπορούμε να γράψουμε (για κατάλληλους συντελεστές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$) $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_i v_i + \cdots + \lambda_n v_n = \lambda_1 v_1 + \cdots + \frac{\lambda_i}{\lambda}(\lambda v_i) + \cdots + \lambda_n v_n \in \langle v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_n \rangle$.
Αντίστροφα, αν $v \in \langle v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_n \rangle$, τότε υπάρχουν $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ με $v = k_1 v_1 + \cdots + k_i(\lambda v_i) + \cdots + k_n v_n = k_1 v_1 + \cdots + (k_i \lambda) v_i + \cdots + k_n v_n \in \langle v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n \rangle$.
(ii) Έστω $v \in \langle \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots \rangle$. Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, ώστε $v = \cdots + \lambda_i v_i + \cdots + \lambda_j v_j + \cdots = \cdots + \lambda_i(v_i + \lambda v_j) + \cdots + (\lambda_j - \lambda_i \lambda) v_j + \cdots \in \langle \ldots, v_i + \lambda v_j, \ldots, v_j \rangle$.
Αντίστροφα, έστω $v \in \langle \ldots, v_i + \lambda v_j, \ldots, v_j \rangle$. Τότε, υπάρχουν συντελεστές $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$, ώστε $v = \cdots + \mu_i(v_i + \lambda v_j) + \cdots + \mu_j v_j + \cdots = \cdots + \mu_i v_i + \cdots + (\mu_j + \mu_i \lambda) v_j + \cdots \in \langle \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots \rangle$.
(iii) Αυτό είναι προφανές, καθώς $\{\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots\} = \{\ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots\}$ για κάθε $i \neq j$.

Ορισμός

Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ και $A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, όπου $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}^{1\times m}$, τότε ορίζουμε το *χώρο των γραμμών* Γ_A του A, ως εξής: $\Gamma_A = \langle r_1, r_2, \ldots, r_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^{1\times m}$.

Πόρισμα

Αν οι πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ είναι γραμοϊσοδύναμοι, τότε $\Gamma_A = \Gamma_B \subseteq \mathbb{R}^{1\times m}$.

Απόδειξη

Καθώς οι A, B είναι γραμμοϊσοδύναμμοι, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ και πίνακες $A_0, A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{R}^{n\times m}$, έτσι ώστε $A = A_0$, $A_k = B$ και ο A_{i+1} να προκύπτει από τον A_i εφαρμόζοντας ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Από την προηγούμενη πρόταση είναι $\Gamma_{A_i} = \Gamma_{A_{i+1}}$ για κάθε $i = 0, 1, ..., k-1$ και άρα $\Gamma_A = \Gamma_{A_0} = \Gamma_{A_1} = \cdots = \Gamma_{A_k} = \Gamma_B$.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ και τον υπόχωρο $\Gamma_A = \langle (2,0,1,1), (1,1,1,1), (0,2,1,1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$. Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, είναι:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, με βάση το πόρισμα, είναι $\Gamma_A = \langle (1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0,0,0,0) \rangle = \langle (1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rangle$.

Πρόταση

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Τότε, ισχύει η ισότητα $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = \langle v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \rangle$ αν και μόνο αν $v_n \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \rangle$ (δηλαδή αν και μόνο αν μπορούμε να γράψουμε $v_n = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$, για κατάλληλα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$).

Απόδειξη

Αν $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = \langle v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \rangle$, τότε είναι $v_n \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = \langle v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \rangle$.
Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $v_n \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \rangle$. Τότε, μπορούμε να γράψουμε $v_n = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$, για κάποια $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = \langle v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \rangle$. Καθώς είναι $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$, έπεται ότι $\langle v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \rangle \subseteq \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, θεωρούμε ένα στοιχείο $v \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ και γράφουμε
$v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_{n-1} v_{n-1} + \mu_n v_n = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_{n-1} v_{n-1} + \mu_n(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n-1}) = (\mu_1 + \mu_n \lambda_1) v_1 + (\mu_2 + \mu_n \lambda_2) v_2 + \cdots + (\mu_{n-1} + \mu_n \lambda_{n-1}) v_{n-1} \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \rangle$.
Συνεπώς, δείξαμε ότι $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle \subseteq \langle v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \rangle$ και έτσι είναι τελικά $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = \langle v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \rangle$.

Πρόταση

Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για τα στοιχεία $v_1, \ldots, v_n \in V$.
(i) Δεν υπάρχει δείκτης i, τέτοιος ώστε $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$.
(ii) Αν $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ και $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \in V$, τότε είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.
Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη

$(i) \to (ii)$ Έστω ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, όχι όλοι ίσοι με 0, ώστε $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$. Αν $\lambda_i \neq 0$, τότε έχουμε $-\lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda_n v_n$ και άρα $v_i = \frac{-\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + \cdots + \frac{-\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} + \frac{-\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} + \cdots + \frac{-\lambda_n}{\lambda_i} v_n$, δηλαδή $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$, άτοπο.

$(ii) \to (i)$ Αν υπάρχει δείκτης i με $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$, τότε μπορούμε να γράψουμε $v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1}v_{i-1} + \lambda_{i+1}v_{i+1} + \cdots + \lambda_n v_n$ και άρα, ισοδύναμα, $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1}v_{i-1} + (-1)v_i + \lambda_{i+1}v_{i+1} + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \in V$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού $-1 \neq 0$.

Ορισμοί

(i) Τα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ καλούνται γραμμικά εξαρτημένα αν αυτά δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
(ii) Το υποσύνολο $X \subseteq V$ καλείται γραμμικά ανεξάρτητο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε επιλογή $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
(iii) Το υποσύνολο $X \subseteq V$ καλείται γραμμικά εξαρτημένο αν αυτό δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο. (Ισοδύναμα, το X είναι γραμμικά εξαρτημένο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$.)

Παραδείγματα

(i) Τα στοιχεία $x^2 + x, x - 1, x^2 + 2 \in \mathbb{R}[x]$ ειναι γραμμικά ανεξάρτητα.
Απόδειξη: Πράγματι, έστω ότι τα $a, b, c \in \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε $a(x^2+x)+b(x-1)+c(x^2+2) = 0$. Τότε, θα είναι $(a+c)x^2 + (a+b)x + (-b+2c) = 0 \in \mathbb{R}[X]$ και άρα έχουμε $\left\{ \begin{array}{c} a+c=0 \\ a+b=0 \\ -b+2c=0 \end{array} \right\}$.
Λύνουμε το σύστημα κατά τα γνωστά:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το $\left\{ \begin{array}{c} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{array} \right\}$ και άρα υπάρχει μόνο μια λύση, η μηδενική. Άρα, τα στοιχεία $x^2 + x, x - 1, x^2 + 2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
(ii) Τα διανύσματα $(1, -1), (0, 1), (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.
α΄ τρόπος: Παρατηρούμε ότι $(1, 1) - (1, -1) = (0, 2) = 2(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ και άρα $(0, 1) = \frac{1}{2}(1, 1) + (-\frac{1}{2})(1, -1) \in \langle (1, 1), (1, -1) \rangle$.
β΄ τρόπος: Ψάχνουμε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε $a(1, -1) + b(0, 1) + c(1, 1) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, δηλαδή $(a, -a) + (0, b) + (c, c) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Το γραμμικό σύστημα $\left\{ \begin{array}{c} a+c=0 \\ -a+b+c=0 \end{array} \right\}$ έχει άπειρες λύσεις (τις εξής: $a = \lambda$, $b = 2\lambda$, $c = -\lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$).
(iii) Το σύνολο $\{1, x, x^2, x^3, ...\} \subseteq \mathbb{R}[x]$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
Απόδειξη: Για κάθε επιλογή $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ με $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, θα πρέπει να δείξουμε ότι τα $x^{a_1}, x^{a_2}, \ldots, x^{a_n}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, υποθέτοντας ότι $\lambda_1 x^{a_1} + \lambda_2 x^{a_2} + \cdots + \lambda_n x^{a_n} = 0 \in \mathbb{R}[X]$, έχω $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0 \in \mathbb{R}$.

Ορισμός

Το υποσύνολο $B \subseteq V$ καλείται βάση του V αν το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο και $V = \langle B \rangle$. Στην περίπτωση αυτή, λέμε ισοδύναμα ότι τα στοιχεία του B αποτελούν μια βάση του V.

Πρόταση

Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για τα στοιχεία $v_1, \ldots, v_n \in V$:
(i) Τα $v_1, \ldots, v_n$ αποτελούν βάση του V.
(ii) Για κάθε $v \in V$ υπάρχει μοναδική n-άδα συντελεστών $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, ώστε $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$.

Απόδειξη

$(i) \to (ii)$: Καθώς είναι $V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, μπορούμε για κάθε $v \in V$ να γράψουμε $v = \lambda_1 v_1 + \cdots +$

$\lambda_n v_n$ για κατάλληλα $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Αν $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ είναι τέτοιοι ώστε $v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$, τότε $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$ και άρα $(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = 0$. Καθώς τα $v_1, \ldots, v_n$ ειναι γραμμικά ανεξάρτητα, είναι $\lambda_1 - \mu_1 = \cdots = \lambda_n - \mu_n = 0 \in \mathbb{R}$ και άρα $\lambda_i = \mu_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.
$(ii) \to (i)$: Καθώς κάθε $v \in V$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$, είναι $V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Για να δείξουμε ότι τα $v_1, \ldots, v_n$ αποτελούν μια βάση του V, αρκεί να δείξουμε ότι αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω ότι για τα $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ είναι $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V \in V$. Μπορούμε επίσης να γράψουμε $0_V = 0v_1 + \cdots + 0v_n$. Από τη μοναδικότητα της γραφής του 0_V ως γραμμικού συνδυασμού των $v_1, \ldots, v_n$, έπεται ότι $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Παραδείγματα

(i) Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}$. Μια βάση του αποτελεί το $e_1 = 1 \in \mathbb{R}$.
Πράγματι, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ είναι $a = a \cdot 1 = a \cdot e_1 \in \mathbb{R}$. Επίσης, αν για το $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $\lambda \cdot e_1 = 0$, τότε $\lambda \cdot 1 = 0$ και άρα $\lambda = 0$.
(ii) Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$. Μια βάση του $\mathbb{R}^2$ αποτελείται από τα διανύσματα $e_1 = (1, 0)$ και $e_2 = (0, 1)$.
Πράγματι, για κάθε $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ μπορούμε να γράψουμε $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = ae_1 + be_2$ και άρα $\mathbb{R}^2 = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle$. Αν τώρα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\lambda e_1 + \mu e_2 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, τότε $\lambda(1, 0) + \mu(0, 1) = (0, 0)$ και άρα $(\lambda, 0) + (0, \mu) = (0, 0)$, δηλαδή $(\lambda, \mu) = (0, 0) \Rightarrow \lambda = \mu = 0$. Συνεπώς, τα e_1, e_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
(iii) Ανάλογα μπορούμε να δούμε ότι μια βάση του διανυσματικύ χώρου $\mathbb{R}^3$ αποτελείται από τα $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$.
(iv) Γενικά, μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$ αποτελούν τα διανύσματα $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$, όπου $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0)), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$.
Για να δούμε ότι τα διανύσματα αυτά παράγουν τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$, παρατηρούμε ότι για κάθε $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ είναι $u = (a_1, 0, \ldots, 0) + (0, a_2, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, a_n) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$ και άρα $\mathbb{R}^n = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$. Για τη γραμμική ανεξαρτησία, θεωρούμε στοιχεία $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ με $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Τότε, είναι $\sum\limits_{i=1}^{n} (0, \ldots, 0, \lambda_i, 0, \ldots, 0) = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ και άρα $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Συνεπώς, είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ και άρα τα $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ ειναι γραμμικά ανεξάρτητα.
(v) Μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$ αποτελούν τα στοιχεία $u_1 = (1, -1)$ και $u_2 = (1, 2)$.
Πράγματι, για κάθε διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^2$ θα βρω $x, y \in \mathbb{R}$ με $u = xu_1 + yu_2$. Αν γράψουμε $u = (a, b)$, έχουμε ότι $(a, b) = x(1, -1) + y(1, 2) = (x, -x) + (y, 2y) = (x + y, -x + 2y) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x + y = a \\ -x + 2y = b \end{Bmatrix}$.
Λύνοντας το γραμμικό σύστημα, έπεται ότι είναι $y = \dfrac{a + b}{3}$ και $x = \dfrac{2a - b}{3}$. Καθώς το γραμμικό σύστημα λύνεται για κάθε $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{R}^2 = \langle u_1, u_2 \rangle$. Καθώς η λύση ειναι μοναδική, από την πρόταση έπεται ότι τα u_1, u_2 αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^2$.
(vi) Τα διανύσματα $u_1 = (1, 1, 1)$ και $u_2 = (2, 0, -1)$ δεν αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$.
Πράγματι, θα δούμε ότι τα u_1, u_2 δεν παράγουν τον $\mathbb{R}^3$. Θεωρούμε $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ και ψάχνουμε $x, y \in \mathbb{R}$ με $(a, b, c) = x(1, 1, 1) + y(2, 0, -1) \Rightarrow (a, b, c) = (x, x, x) + (2y, 0, -y) \Rightarrow (a, b, c) = (x + 2y, x, x - y) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x + 2y = a \\ x = b \\ x - y = c \end{Bmatrix}$. Θα είναι λοιπόν $x = b$ και άρα πρέπει $\begin{Bmatrix} 2y = a - b \\ y = b - c \end{Bmatrix}$. Συνεπώς, έπεται ότι αν $\dfrac{a - b}{2} \neq b - c$, τότε το σύστημα δεν έχει λύση.
Για παράδειγμα, θέτοντας $a = 1, b = c = 0$, έπεται ότι το $(1, 0, 0)$ δεν μπορεί να γραφετεί ως γραμμικός συνδυασμός των $(1, 1, 1), (2, 0, -1)$ (μιας και το αντίστοιχο σύστημα δε λύνεται). Αυτό σημαίνει ότι $(1, 0, 0) \notin \langle (1, 1, 1), (2, 0, -1) \rangle$ και άρα $\langle (1, 1, 1), (2, 0, -1) \rangle \neq \mathbb{R}^3$.
(vii) Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_2[x] = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] : \deg f(x) \leq 2\}$. Τότε, τα στοιχεία $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = x^2 - 1$ και $f_3(x) = x^2 + x$ δεν αποτελούν βάση.
Πράγματι, θα δείξουμε ότι τα $f_1(x), f_2(x), f_3(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Θεωρούμε

$\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ με $\lambda f_1(x)+\mu f_2(x)+\nu f_3(x) = 0 \in \mathbb{R}_2[x]$. Τότε, είναι $\lambda(x+1)+\mu(x^2-1)+\nu(x^2+x) = 0 \in \mathbb{R}_2[x] \Rightarrow \lambda x+\lambda+\mu x^2-\mu+\nu x^2+\nu x = 0 \Rightarrow (\mu+\nu)x^2+(\lambda+\nu)x+(\lambda-\mu) = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \mu+\nu=0 \\ \lambda+\nu=0 \\ \lambda-\mu=0 \end{Bmatrix}$.
Θα πρέπει λοιπόν να είναι $\lambda = \mu = -\nu \in \mathbb{R}$. Έτσι, η τριάδα $\lambda = 1, \mu = 1, \nu = -1$ είναι μια (μη μηδενική) λύση και άρα παίρνουμε τη σχέση $f_1(x)+f_2(x)-f_3(x) = 0 \Leftrightarrow f_3(x) = f_1(x)+f_2(x)$.

<u>Πρόταση</u>
Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ δύο γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας B είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και γράφουμε $B = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, όπου $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}^m$. Αν $r_k \neq (0,0,\ldots,0)$ και $r_{k+1} = \cdots = r_n = (0,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^m$, τότε μια βάση του διανυσματικού χώρου $\Gamma_A \subseteq \mathbb{R}^m$ των γραμμών του A αποτελούν οι μη-μηδενικές γραμμές $r_1, r_2, \ldots, r_k$ του B.

<u>Παράδειγμα</u>
Θεωρούμε τον πίνακα $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ με $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 3 & 10 \end{pmatrix}$. Θεωρούμε τις γραμμές $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}^4$, όπου $\gamma_1 = (1,0,-1,2)$, $\gamma_2 = (0,2,1,6)$ και $\gamma_3 = (-1,4,3,10)$ και το διανυσματικό υπόχωρο $\Gamma_A = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$. Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο απαλοιφής του Gauss.
$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$
Έτσι, από την προηγούμενη πρόταση, έπεται ότι μια βάση του Γ_A αποτελούν τα διανύσματα $(1,0,-1,2), (0,1,\frac{1}{2},3)$.

<u>Απόδειξη της πρότασης:</u>
Γνωρίζουμε ότι $\Gamma_A = \Gamma_B = \langle r_1, r_2, \ldots, r_n \rangle = \langle r_1, r_2, \ldots, r_k, r_{k+1}, \ldots, r_n \rangle = \langle r_1, r_2, \ldots, r_k \rangle$. Συνεπώς, οι γραμμές $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{R}^m$ παράγουν το διανυσματικό χώρο Γ_A. Μένει να δείξουμε ότι τα διανύσματα $r_1, r_2, \ldots, r_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο k.
Αν $k = 1$, τότε το ζητούμενο είναι προφανές, καθώς το $r_1 = (0,\ldots,0,1,*,\ldots,*)$ είναι μη-μηδενικό. Πράγματι, αν $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ και $\lambda_1 r_1 = (0,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^m$, τότε (καθώς $r_1 \neq (0,0,...,0)$) είναι $\lambda_1 = 0$.
Υποθέτουμε ότι $k > 1$ και οι γραμμές $r_2, \ldots, r_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Θεωρούμε $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \cdots + \lambda_k r_k = (0,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^m$. Καθώς το ηγετικό στοιχείο της γραμμής r_1 είναι πιο αριστερά των ηγετικών στοιχείων των άλλων μη-μηδενικών γραμμών, έπεται ότι είναι $\lambda_1 = 0$. Συνεπώς, θα είναι $\lambda_2 r_2 + \cdots + \lambda_k r_k = (0,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^m$ και άρα από την επαγωγική υπόθεση έπεται ότι $\lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$. Άρα, τα $r_1, r_2 \ldots, r_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

<u>Πρόταση</u>
Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ διανύσματα με $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$. Τότε, υπάρχουν $v_1', v_2', \ldots, v_k' \in \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ που αποτελούν βάση του V.
<u>Απόδειξη</u>
Αν τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε αυτά αποτελούν μια βάση του V. Αν όχι, μπορούμε να βρούμε ένα δείκτη i με $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$. Τότε είναι $\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, δηλαδή $\langle v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_n \rangle = V$. Συνεχίζουμε ομοίως και η διαδικασία τερματίζει.

<u>Πρόταση</u>

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Αν τα $v_1, \ldots, v_n \in V$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και τα $v_1', \ldots, v_m' \in V$ παράγουν τον V, τότε $n \leq m$.
Απόδειξη
Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο n. Αν $n = 1$, τότε το $v_1 \in V$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα $v_1 \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι $V \neq 0$ και άρα θα πρέπει να είναι $m \geq 1$.
Προχωρούμε τώρα στο επαγωγικό βήμα. Γνωρίζουμε ότι $v_1, \ldots, v_n \in V = \langle v_1', \ldots, v_m' \rangle$. Αν $v_1, \ldots, v_n \in \langle v_1', \ldots, v_{m-1}' \rangle$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $v_1, \ldots, v_{n-1}$ του διανυσματικού χώρου $\langle v_1', \ldots, v_{m-1}' \rangle$ και να συμπεράνουμε, από την επαγωγική υπόθεση, ότι $n-1 \leq m-1$ και άρα $n \leq m$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι αυτό δεν συμβαίνει. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $v_n \in \langle v_1', \ldots, v_m' \rangle \setminus \langle v_1', \ldots, v_{m-1}' \rangle$. Άρα, θα είναι $v_n = \lambda_{n1} v_1' + \cdots + \lambda_{nm} v_m'$ με $\lambda_{nm} \neq 0$. Γράφουμε ανάλογα $v_i = \lambda_{i1} v_1' + \cdots + \lambda_{im} v_m'$ για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$. Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $v_1 - \dfrac{\lambda_{1m}}{\lambda_{nm}} v_n, v_2 - \dfrac{\lambda_{2m}}{\lambda_{nm}} v_n, \ldots, v_{n-1} - \dfrac{\lambda_{n-1\,m}}{\lambda_{nm}} v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (καθώς τα $v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα) και ανήκουν στον διανυσματικό χώρο $\langle v_1', \ldots, v_{m-1}' \rangle$ (καθώς οι συντελεστές του v_m' απλοποιούνται). Συνεπώς, από την επαγωγική υπόθεση έπεται ότι είναι $n - 1 \leq m - 1$ και άρα $n \leq m$.

Πρόταση
Αν $v_1, \ldots, v_n$ και $u_1, \ldots, u_m$ είναι δυο βάσεις του διανυσματικού χώρου V, τότε $n = m$.
Σε αυτήν την περίπτωση, λέμε ότι η διάσταση του V είναι n (ή ότι ο V είναι ένας n-διάστατος διανυσματικός χώρος) και γράφουμε $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ ή, απλούστερα, $\dim V = n$.
Απόδειξη
Καθώς τα $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και τα $u_1, \ldots, u_m$ παράγουν το διανυσματικό χώρο V, θα πρέπει να είναι $n \leq m$. Καθώς τα $u_1, \ldots, u_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και τα $v_1, \ldots, v_n$ παράγουν το διανυσματικό χώρο V, έπεται ότι $m \leq n$. Συνεπώς, είναι τελικά $n = m$.

Παραδείγματα
(i) Είναι $\dim \mathbb{R}^n = n$, καθώς γνωρίζουμε ότι μια βάση του $\mathbb{R}^n$ αποτελείται από τα διανύσματα $e_1, e_2, \ldots, e_n$.
(ii) Καθώς οι στοιχειώδεις πίνακες E_{ij} αποτελούν μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^{n \times m}$ των $n \times m$ πινάκων, έπεται ότι $\dim \mathbb{R}^{n \times m} = nm$.
(iii) Έστω $T_n(\mathbb{R})$ ο διανυσματικός χώρος των άνω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων. Με άλλα λόγια, είναι $T_n(\mathbb{R}) = \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n} : a_{ij} = 0 \text{ για κάθε } i > j\}$. Μια βάση του διανυσματικού αυτού χώρου αποτελούν οι στοιχειώδεις πίνακες E_{ij}, όπου $i \leq j$, δηλαδή οι πίνακες $E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1n}$, $E_{22}, E_{23}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{nn}$ και άρα $\dim T_n(\mathbb{R}) = n + (n-1) + \cdots + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
(iv) Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_n[x] = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] : \deg f(x) \leq n\}$. Τότε, είναι $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$, καθώς μια βάση του διανυσματικού αυτού χώρου αποτελούν τα διανύσματα $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

Πρόταση
Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V και n στοιχεία $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Τότε, κάθε δύο από τις παρακάτω τρεις ιδιότητες συνεπάγονται την τρίτη:
(i) $\dim V = n$,
(ii) τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα,
(iii) τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ παράγουν το διανυσματικό χώρο V.
Απόδειξη
$(ii), (iii) \Rightarrow (i)$: Από τον ορισμό, έπεται ότι τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ αποτελούν βάση του V και άρα είναι $\dim V = n$.
$(i), (ii) \Rightarrow (iii)$: Θέλουμε να δείξουμε ότι $V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Αν αυτή η ισότητα δεν ισχύει, μπορούμε να επιλέξουμε $v \in V \setminus \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Θα δείξουμε ότι τα $v_1, \ldots, v_n, v$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda v = 0 \in V$. Αν $\lambda \neq 0$

τότε $v = \dfrac{-\lambda_1}{\lambda}v_1 + \cdots + \dfrac{-\lambda_n}{\lambda}v_n \in \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$, άτοπο. Άρα, είναι $\lambda = 0$ και έτσι έχουμε $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$. Καθώς τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, θα πρέπει να είναι $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Πράγματι λοιπόν τα $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ ειναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς ο V περιέχει $n+1$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Καθώς όμως είναι $\dim V = n$, ο V μπορεί να παραχθεί από (κάποια) n το πλήθος στοιχεία του, άτοπο.
$(i), (iii) \Rightarrow (ii)$: Αν τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα, μπορούμε να βρούμε ένα δείκτη i, έτσι ώστε να είναι $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\rangle$. Τότε, είναι $\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\rangle = \langle v_1, \ldots, v_n\rangle = V$ και άρα ο διανυσματικός χώρος V μπορεί να παραχθεί από $n-1$ το πλήθος διανύσματα. Όμως, ο διανυσματικός χώρος V έχει διάσταση n και άρα υπάρχει (κάποιο) γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολό του με n στοιχεία, άτοπο.

Λήμμα
Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος και $v_1, \ldots, v_n \in V$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Τότε, υπάρχει βάση του V της μορφής $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_m$ (όπου $m = \dim V$).
Απόδειξη
Έστω $m = \dim V$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν m το πλήθος στοιχεία που παράγουν τον V, και άρα $n \leq m$. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στη διαφορά $m - n$.
Αν $m-n = 0$, τότε $n = m = \dim V$. Καθώς $\dim V = n$ και τα $v_1, \ldots, v_n$ ειναι γραμμικά ανεξάρτητα, από την προηγούμενη πρόταση, έπεται ότι αυτα παράγουν τον V, δηλαδή είναι $V = \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$. Έτσι, τα $v_1, \ldots, v_n$ αποτελούν μια βάση του V.
Υποθέτουμε τώρα ότι είναι $m - n > 0$ και ότι το ζητούμενο ισχύει για ζεύγη (n', m') με $m' - n' < m - n$. Καθώς είναι $\dim V = m$, υπάρχουν m το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και άρα κάθε σύνολο γεννητόρων του V έχει $\geq m$ πλήθος στοιχεία. Άρα, από την ανισότητα $n < m = \dim V$ έπεται ότι τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$ δεν παράγουν τον V. Υπάρχει συνεπώς $v_{n+1} \in V \backslash \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$. Τότε, τα στοιχεία $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα: Πράγματι, αν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ και $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} v_{n+1} = 0 \in V$, τότε θα πρέπει να είναι $\lambda_{n+1} = 0$ (διαφορετικά θα ήταν $v_{n+1} = \dfrac{-\lambda_1}{\lambda_{n+1}}v_1 + \cdots + \dfrac{-\lambda_n}{\lambda_{n+1}}v_n \in \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$, άτοπο. Συνεπώς, είναι $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \in V$ και άρα (λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $v_1, \ldots, v_n$) πρέπει $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Από την υπόθεση της επαγωγής, μπορούμε να συμπληρώσουμε τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ σε μια βάση του V (μιας και $m-(n+1) = m-n-1 < m-n$).

Πόρισμα
Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με $\dim V = n$ και $U \subseteq V$ ένας υπόχωρος. Τότε:
(i) $\dim U \leq \dim V$ και
(ii) $U = V$ αν και μόνο αν $\dim U = \dim V$.
Απόδειξη
(i) Ο διανυσματικός χώρος V έχει διάσταση n και άρα υπάρχει σύνολο γεννητόρων του V με n το πλήθος στοιχεία. Άρα, κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του V έχει $\leq n$ στοιχεία. Ειδικότερα, κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του U έχει $\leq n$ στοιχεία. Καθώς γνωρίζουμε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος έχει μια βάση, η ανισότητα $\dim U \leq n$ θα προκύψει αν δείξουμε ότι ο U είναι πεπερασμένα παραγόμενος.
Αυτό είναι προφανές αν $U = 0$. Αν $U \neq 0$, επιλέγουμε $u \in U$ με $u \neq 0$. Αν $U = \langle u\rangle$, τότε ο U είναι πεπερασμένα παραγόμενος. Αν $U \neq \langle u\rangle$, τότε επιλέγουμε $u' \in U\backslash\langle u\rangle$ και δείχνουμε όπως πριν ότι τα u, u' είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αν $U = \langle u, u'\rangle$, τότε ο U είναι πεπερασμένα παραγόμενος. Αν $U \neq \langle u, u'\rangle$, τότε επιλέγουμε $u''' \in U\backslash\langle u, u'\rangle$ και δείχνω (όπως πριν) ότι τα u, u', u'' είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Η διαδικασία αυτή τελειώνει μετά από το πολύ n βήματα και άρα έχουμε το ζητούμενο συμπέρασμα ότι ο U είναι πεπερασμένα παραγόμενος.
(ii) Υποθέτουμε ότι $\dim U = \dim V = n$ και βρίσκουμε μια βάση $u_1, \ldots, u_n$ του U. Τα $u_1, \ldots, u_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του U, άρα και του V. Καθώς $\dim V = n$, έπεται ότι $u_1, \ldots, u_n$ παράγουν τον V, δηλαδή $V = \langle u_1, \ldots, u_n\rangle = U$.

Πόρισμα

Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος και $U \subseteq V$ ένας υπόχωρος. Τότε, υπάρχει διανυσματικός υπόχωρος $U' \subseteq V$, τέτοιος ώστε $V = U \oplus U'$.

Απόδειξη

Έστω ότι $\dim V = n$ και $\dim U = k \leq n$. Θεωρούμε μια βάση $u_1, \ldots, u_k$ του U. Καθώς τα στοιχεία $u_1, \ldots, u_k \in V$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, γνωρίζουμε ότι υπάρχει βάση του V της μορφής $u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$. Ορίζουμε $U' = \langle u_{k+1}, \ldots, u_n \rangle$ και θα δείξουμε ότι $V = U \oplus U'$, δηλαδή ότι $V = U + U'$ και $U \cap U' = 0$.

Έστω $v \in V$. Καθώς τα $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ αποτελούν μια βάση του V, μπορούμε να γράψουμε $v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k + \lambda_{k+1} u_{k+1} + \cdots + \lambda_n u_n$. Θέτουμε $u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \in U$ και $u' = \lambda_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \lambda_n v_n \in U'$, οπότε είναι $v = u + u' \in U + U'$. Έστω τώρα ένα στοιχείο $w \in U \cap U'$. Τότε, είναι $w \in U = \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$ και άρα $w = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_k u_k$ για κατάλληλα $\mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{R}$. Ομοίως, είναι $w \in U' = \langle u_{k+1}, \ldots, u_n \rangle$ και άρα μπορούμε να γράψουμε $w = \mu_{k+1} u_{k+1} + \cdots + \mu_n u_n$ για κάποια $\mu_{k+1}, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$. Τελικά, είναι $\mu_1 u_1 + \cdots + \mu_k u_k = w = \mu_{k+1} u_{k+1} + \cdots + \mu_n u_n$ και άρα $\mu_1 u_1 + \cdots + \mu_k u_k + (-\mu_{k+1}) u_{k+1} + \cdots + (-\mu_n) = 0 \in V$. Καθώς όμως τα $u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$ αποτελούν βάση του V, αυτά ειναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα είναι $\mu_i = 0$ για κάθε i. Ειδικότερα, είναι $w = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_k u_k = 0$.

Πρόταση

Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος και $U, W \subseteq V$ δυο διανυσματικοί υπόχωροι. Τότε, $\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$.

Απόδειξη

Έστω $a_1, \ldots, a_k$ μια βάση του $U \cap W$ (οπότε είναι $k = \dim(U \cap W)$). Μπορούμε να συμπληρώσουμε τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $a_1, \ldots, a_k \in U \cap W \subseteq U$ σε μια βάση $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_\lambda$ του U (οπότε είναι $k + \lambda = \dim U$). Ομοίως, μπορώ να συμπληρώσουμε τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $a_1, \ldots, a_k \in U \cap W \subseteq W$ σε μια βάση $a_1, \ldots, a_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_\mu$ του W (οπότε είναι $k + \mu = \dim W$). Θα δείξουμε ότι τα $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_\lambda, \gamma_1, \ldots, \gamma_\mu$ αποτελούν μια βάση του $U+W$. Τότε, θα είναι $\dim(U+W) = k+\lambda+\mu = (k+\lambda)+(k+\mu)-k = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$.

Έστω $v \in U + W$. Τότε, μπορούμε να γράψουμε $v = u + w$ για κάποια $u \in U$ και $w \in W$. Μπορούμε τώρα να γράψουμε $u = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i a_i + \sum\limits_{j=1}^{\lambda} y_j b_j$ και $w = \sum\limits_{i=1}^{k} z_i a_i + \sum\limits_{p=1}^{\mu} t_p \gamma_p$ για κατάλληλα $x_i, y_j, z_i, t_p \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, είναι $v = u + w = \sum\limits_{i=1}^{k} (x_i + z_i) a_i + \sum\limits_{j=1}^{\lambda} y_j b_j + \sum\limits_{p=1}^{\mu} t_p \gamma_p$ και άρα τα διανύσματα $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_\lambda$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_\mu$ παράγουν τον $U + W$.

Για να δείξουμε ότι αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα, θεωρούμε $x_1, \ldots, x_k$, $y_1, \ldots, y_\lambda$, $z_1, \ldots, z_\mu \in \mathbb{R}$ με $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i a_i + \sum\limits_{j=1}^{\lambda} y_j b_j + \sum\limits_{p=1}^{\mu} z_p \gamma_p = 0 \in U+W$. Τότε, είναι $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i a_i + \sum\limits_{j=1}^{\lambda} y_j b_j = -\sum\limits_{p=1}^{\mu} z_p \gamma_p \in U \cap W$ και άρα $-\sum\limits_{p=1}^{\mu} z_p \gamma_p = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i' a_i$ για κάποια $x_i' \in \mathbb{R}$. Τότε όμως είναι $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i' a_i + \sum\limits_{p=1}^{\mu} z_p \gamma_p = 0$. Καθώς τα στοιχεία $a_1, \ldots, a_k$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_\mu$ αποτελούν μια βάση του W, αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς, είναι $z_p = 0$ για κάθε $p = 1, \ldots, \mu$ και άρα $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i a_i + \sum\limits_{j=1}^{\lambda} y_j b_j = 0$. Καθώς τα $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_\lambda$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται τώρα ότι $x_i = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$ και $y_j = 0$ για κάθε $j = 1, \ldots, \lambda$.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τους υποχώρους $U, V \subseteq \mathbb{R}^4$, όπου $U = \langle (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1), (1, 0, -2, 1) \rangle$ και $V = \langle (0, 1, 0, -1), (0, -1, 2, -1) \rangle$. Θα βρούμε βάσεις και τις διαστάσεις των υποχώρων $U, V, U + V, U \cap V$.

Για τον υπόχωρο U:

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\1&0&0&-1\\1&0&-2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Συνεπώς, μια βάση του U αποτελούν τα διανύσματα $(1,0,-1,0)$ και $(0,0,1,-1)$ και άρα $\dim U = 2$.
Για τον υπόχωρο V:

$$\begin{pmatrix}0&1&0&-1\\0&-1&2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0&-1\\0&0&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

Έτσι, μια βάση του V αποτελούν τα διάνύσματα $(0,1,0,-1)$ και $(0,0,1,-1)$ και άρα $\dim V = 2$.
Για το άθροισμα $U+V = \langle(1,0,-1,0),(1,0,0,-1),(1,0,-2,1),(0,1,0,-1),(0,-1,2,-1)\rangle$:

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\1&0&0&-1\\1&0&-2&1\\0&1&0&-1\\0&-1&2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&-1&1\\0&1&0&-1\\0&-1&2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&-1&1\\0&0&1&-1\\0&-1&2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&-1&1\\0&0&1&-1\\0&0&2&-2\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Συνεπώς, μια βάση του $U+V$ αποτελούν τα διανύσματα $(1,0,0,-1)$, $(0,1,0,-1)$ και $(0,0,1,-1)$ και άρα $\dim(U+V) = 3$.
Για τον υπόχωρο $U\cap V$: Γνωρίζουμε ότι είναι $\dim U + \dim V = \dim(U+V) + \dim(U\cap V)$ και άρα $2+2 = 3+\dim(U\cap V) \Rightarrow \dim(U\cap V) = 1$. Έτσι, για να βρούμε μια βάση του (1-διάστατου διανυσματικού χώρου) $U\cap V$, αρκεί να βρούμε ένα μη-μηδενικό στοιχείο του. Ψάχνουμε να βρούμε $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$ με $a(1,0,-1,0)+b(1,0,0,-1)+c(1,0,-2,1) = d(0,1,0,-1)+e(0,-1,2,-1)$, δηλαδή $(a,0,-a,0)+(b,0,0,-b)+(c,0,-2c,c) = (0,d,0,-d)+(0,-e,2e,-e)$, δηλαδή $(a+b+c,0,-a-2c,-b+c) = (0,d-e,2e,-d-e)$. Λύνουμε το γραμμικό σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c}a+b+c=0\\0=d-e\\-a-2c=2e\\-b+c=-d-e\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}a+b+c=0\\d-e=0\\a+2c+2e=0\\-b+c+d+e=0\end{array}\right\}$$ κατά τα γνωστα:

$$\left(\begin{array}{ccccc:c}1&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&-1&0\\1&0&2&0&2&0\\0&-1&1&1&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc:c}1&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&-1&0\\0&-1&1&0&2&0\\0&-1&1&1&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc:c}1&1&1&0&0&0\\0&1&-1&0&-2&0\\0&0&0&1&-1&0\\0&-1&1&1&1&0\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c}1&1&1&0&0&0\\0&1&-1&-&-2&0\\0&0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&-1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc:c}1&1&1&0&0&0\\0&1&-1&0&-2&0\\0&0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc:c}1&0&2&0&2&0\\0&1&-1&0&-2&0\\0&0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

Συνεπώς, το σύστημα γράφεται ισοδύναμα $\left\{\begin{array}{c}a+2c+2e=0\\b-c-2e=0\\d-e=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}a=-2c-2e\\b=c+2e\\d=e\end{array}\right\}$, όπου $c,e\in\mathbb{R}$ είναι ελεύθερες παράμετροι. Έτσι, για $c=e=1$, παίρνω $a=-4, b=3, d=1$ και έχω το στοιχείο $a(1,0,-1,0)+b(1,0,0,-1)+c(1,0,-2,1) = -4(1,0,-1,0)+3(1,0,0,-1)+(1,0,-2,1) = (-4,0,4,0)+(3,0,0,-3)+(1,0,-2,1) = (0,0,2,-2)$, το οποίο αποτελεί μια βάση του διανυσματικού χώρου $U\cap V$.
Από τις παραπάνω βάσεις των U,V αποφαινόμαστε ότι το διάνυσμα $(0,0,1,-1)\in U\cap V$.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τα διανύσματα $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ με $v_1 = (1,2,3)$ και $v_2 = (1,0,1)$ και τον υπόχωρο $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ που αυτά παράγουν. Θα βρούμε τη διάσταση του V και υπόχωρο $V' \subseteq \mathbb{R}^3$ με $\mathbb{R}^3 = V \oplus V'$.
Για το σκοπό αυτό, παρατηρούμε ότι $\langle v_2 \rangle = \{\lambda v_2 : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, 0, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ και άρα $v_1 \notin \langle v_2 \rangle$. Συνεπώς, τα διανύσματα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα $\dim V = 2$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε υπόχωρο $V' \subseteq \mathbb{R}^3$ με $\mathbb{R}^3 = V \oplus V'$ είναι $\dim \mathbb{R}^3 = \dim V + \dim V'$ και άρα $\dim V' = 1$. Γνωρίζουμε επίσης ότι αν συμπληρώθούν τα διανύσματα v_1, v_2 (που είναι γραμμικά ανεξάρτητα) σε μια βάση v_1, v_2, v_3 του $\mathbb{R}^3$, τότε είναι $\mathbb{R}^3 = V \oplus V'$, όπου $V' = \langle v_3 \rangle$. Σύμφωνα με τη θεωρία, αν $v_3 \in \mathbb{R}^3$ και $v_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$, τότε τα $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ θα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Όμως είναι $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ και άρα τα v_1, v_2, v_3 θα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$. Ψάχνουμε λοιπόν $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, για το οποίο δεν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ με $(x,y,z) = a(1,2,3) + b(1,0,1)$. Με άλλα λόγια, θέλουμε να βρούμε $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, έτσι ώστε να μην έχει λύση το γραμμικό σύστημα $\left\{\begin{matrix} a+b=x \\ 2a=y \\ 3a+b=z \end{matrix}\right\}$. Ας προσπαθήσουμε να λύσουμε το σύστημα κατά τα γνωστά

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \vdots & x \\ 2 & 0 & \vdots & y \\ 3 & 1 & \vdots & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \vdots & x \\ 0 & -2 & \vdots & y-2x \\ 0 & -2 & \vdots & z-3x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \vdots & y \\ 0 & -2 & \vdots & y-2y \\ 0 & 0 & \vdots & z-x-y \end{pmatrix}$$

Συμπεραίνουμε ότι, για να λυνεται το σύστημα, θα πρέπει να ισχύει $z-x-y=0$, δηλαδή $z = x+y$. Έτσι, για παράδειγμα, είναι $(11, 402, 1000) \notin \langle v_1, v_2 \rangle$ (μιας και $1000 \neq 11 + 402$). Μπορούμε συνεπώς να επιλέξουμε $V' = \langle (11, 402, 1000) \rangle$.

Πρόταση

Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος και $U \subseteq V$ ένας υπόχωρός του. Τότε, ο διανυσματικός χώρος πηλίκο V/U ειναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενος και μάλιστα είναι $\dim V/U = \dim V - \dim U$.

Απόδειξη

Θυμίζουμε ότι είναι $V/U = \{v + U : v \in V\}$ και ότι αν $v, v' \in V$ τότε $v + U = v' + U \in V/U \Leftrightarrow v' - v \in U$. Έστω ότι είναι $\dim V = n$ και $\dim U = k$. Γνωρίζουμε ότι είναι $k \leq n$. Θεωρούμε μια βάση $u_1, \ldots, u_k$ του U και την επεκτείνουμε σε μια βάση $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_{n-k}$ του V. Θεωρούμε τα στοιχεία $\xi_1, \ldots, \xi_{n-k} \in V/U$, όπου $\xi_i = v_i + U$ για $i = 1, \ldots, n-k$. Θα δείξουμε ότι τα $\xi_1, \ldots, \xi_{n-k}$ αποτελούν μια βάση του V/U (οπότε θα είναι $\dim V/U = n - k = \dim V - \dim U$).
Θα δείξουμε αρχικά ότι τα $\xi_1, \ldots, \xi_{n-k}$ παράγουν τον V/U: Θεωρούμε ένα στοιχείο $\xi \in V/U$ και γράφουμε $\xi = v + U$, για κάποιο $v \in V$. Γνωρίζουμε ότι μπορούμε να γράψουμε $v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_{n-k} v_{n-k}$ για κατάλληλα $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R}$. Καθώς $v - (\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_{n-k} v_{n-k}) = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k \in U$, έπεται ότι $\xi = v + U = (\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_{n-k} v_{n-k}) + U = \mu_1(v_1 + U) + \cdots + \mu_{n-k}(v_{n-k} + U) = \mu_1 \xi_1 + \cdots + \mu_{n-k} \xi_{n-k} \in \langle \xi_1, \ldots, \xi_{n-k} \rangle$.
Θα δείξουμε τώρα ότι τα $\xi_1, \ldots, \xi_{n-k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα: Έστω $a_1, \ldots, a_{n-k} \in \mathbb{R}$ με $a_1 \xi_1 + \cdots + a_{n-k} \xi_{n-k} = 0 + U \in V/U$. Τότε, είναι $(a_1 v_1 + \cdots + a_{n-k} v_{n-k}) + U = a_1(v_1 + U) + \cdots + a_{n-k}(v_{n-k} + U) = a_1 \xi_1 + \cdots + a_{n-k} \xi_{n-k} = 0 + U$ και άρα $a_1 v_1 + \cdots + a_{n-k} v_{n-k} \in U$. Συνεπώς, είναι $a_1 v_1 + \cdots + a_{n-k} v_{n-k} = b_1 u_1 + \cdots + b_k u_k$ για κάποια $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$. Καθώς τα $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_{n-k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, είναι ($b_i = 0$ για κάθε i) και $a_1 = \cdots = a_{n-k} = 0 \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα

Έστω $V = \langle (1,1,1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$. Θα βρούμε μια βάση και τη διάσταση του χώρου πηλίκο $\mathbb{R}^3/V$.
Καθώς $V = \langle (1,1,1) \rangle$ και $(1,1,1) \neq (0,0,0)$, μια βάση του V αποτελείται από το διάνυσμα $(1,1,1)$ και άρα $\dim V = 1$. Έτσι, έπεται ότι $\dim \mathbb{R}^3/V = \dim \mathbb{R}^3 - \dim V = 3 - 1 = 2$. Θέλουμε να επεκτείνουμε το v σε μια βάση v, v', v'' του $\mathbb{R}^3$, καθώς τότε (όπως είδαμε στην απόδειξη παραπάνω)

μια βάση του $\mathbb{R}^3/V$ θα αποτελούν τα στοιχεια $v' + V, v'' + V \in \mathbb{R}^3/V$. Θεωρούμε την κανονική βάση e_1, e_2, e_3 του $\mathbb{R}^3$. Είναι $\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ και άρα $\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3, v \rangle$. Παρατηρούμε ότι $v = e_1+e_2+e_3$ και άρα $e_3 = v-e_1-e_2 \in \langle e_1, e_2, v \rangle$. Συνεπώς, είναι $\langle e_1, e_2, v \rangle = \langle e_1, e_2, e_3, v \rangle = \mathbb{R}^3$ και άρα τα e_1, e_2, v παράγουν τον $\mathbb{R}^3$. Καθώς $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, έπεται ότι τα διανύσματα e_1, e_2, v αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$. Συνεπώς, έχουμε δείξει ότι μια βάση του διανυσματικού χώρου πηλίκο $\mathbb{R}^3/V$ αποτελείται από τα στοιχεία $e_1 + V, e_2 + V$.

Γραμμικές Απεικονίσεις

Ορισμός

Έστω U, V δύο διανυσματικοί χώροι. Μια απεικόνιση $f : U \longrightarrow V$ λέγεται γραμμική αν:
(i) $f(u + u') = f(u) + f(u')$ για κάθε $u, u' \in U$ και
(ii) $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $u \in U$.

Παραδείγματα

(i) Για κάθε διανυσματικό χώρο V και $\lambda \in \mathbb{R}$ η απεικόνιση $r : V \longrightarrow V$ με $r(u) = \lambda u$ για κάθε $u \in V$ είναι γραμμική.
Πράγματι, αν $u, u' \in V$ και $a \in \mathbb{R}$, τότε είναι $r(u + u') = \lambda(u + u') = \lambda u + \lambda u' = r(u) + r(u')$ και $r(au) = \lambda(au) = (\lambda a)u = (a\lambda)u = a(\lambda u) = ar(u)$.
(ii) Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ με $f(x, y, z) = (2x - y, x + z, y + 3z, y)$ για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ είναι γραμμική.
Θεωρούμε $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ και υπολογίζουμε:
$f[(x, y, z)+(x'+y'+z')] = f(x+x', y+y', z+z') = (2(x+x')-(y+y'), (x+x')+(z+z'), (y+y')+3(z+z'), y+y') = (2x-y, x+z, y+3z, y)+(2x'-y', x'+z', y'+3z', y') = f(x, y, z)+f(x', y', z')$ και
$f[\lambda(x, y, z)] = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (2\lambda x - \lambda y, \lambda x + \lambda z, \lambda y + 3\lambda z, \lambda y) = \lambda(2x - y, x + z, y + 3z, y) = \lambda f(x, y, z)$.
(iii) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{R}^{m\times k}$ και $\mathbb{R}^{n\times k}$ και την απεικόνιση $L_A : \mathbb{R}^{m\times k} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times k}$ με $L_A(B) = AB \in \mathbb{R}^{n\times k}$ για κάθε $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$. Η απεικόνιση L_A είναι γραμμική.
Πράγματι, για κάθε $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{m\times k}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $L_A(B_1 + B_2) = A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 = L_A(B_1) + L_A(B_2)$ και $L_A(\lambda B_1) = A(\lambda B_1) = \lambda AB_1 = \lambda L_A(B_1)$.
(iv) Θεωρούμε $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ και τους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{R}^{k\times n}$ και $\mathbb{R}^{k\times m}$. Τότε, η απεικόνιση $R_A : \mathbb{R}^{k\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times m}$ με $R_A(\Gamma) = \Gamma A \in \mathbb{R}^{k\times m}$ για κάθε $\Gamma \in \mathbb{R}^{k\times n}$ είναι γραμμική.
Αν $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathbb{R}^{k\times n}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε είναι $R_A(\Gamma_1+\Gamma_2) = (\Gamma_1+\Gamma_2)A = \Gamma_1 A+\Gamma_2 A = R_A(\Gamma_1)+R_A(\Gamma_2)$ και $R_A(\lambda\Gamma_1) = (\lambda\Gamma_1)A = \lambda\Gamma_1 A = \lambda R_A(\Gamma_1)$.
(v) Η απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^{n\times m} \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$ με $\phi(A) = A^t$ για κάθε $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ είναι γραμμική.
Πράγματι, αν $A, A' \in \mathbb{R}^{n\times m}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε είναι $\phi(A+A') = (A+A')^t = A^t+A'^t = \phi(A)+\phi(A')$ και $\phi(\lambda A) = (\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda\phi(A)$.
(vi) Η απεικόνιση $D : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $D(A) = \det(A) \in \mathbb{R}$ για κάθε $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ δεν είναι γραμμική (αν $n > 1$).
Πράγματι, είναι $D(I_n + I_n) = D(2I_n) = 2^n$, ενώ $D(I_n) + D(I_n) = 1 + 1 = 2$ (και $2^n \neq 2$).
(vii) Η απεικόνιση $\sigma : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ με $\sigma[f(x)] = 2f'(x) - 31f''(x)$ για κάθε $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ είναι γραμμική.
Πράγματι, αν $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$, τότε $\sigma[f(x) + g(x)] = 2(f(x) + g(x))' - 31(f(x) + g(x))'' = 2(f'(x)+g'(x))-31(f''(x)+g''(x)) = [2f'(x)-31f''(x)]+[2g'(x)-31g''(x)] = \sigma[f(x)]+\sigma[g(x)]$ και $\sigma[\lambda f(x)] = 2(\lambda f(x))' - 31(\lambda f(x))'' = 2\lambda f'(x) - 31\lambda f''(x) = \lambda[2f'(x) - 31f''(x)] = \lambda\sigma[f(x)]$.

Ιδιότητες

Αν $f : U \longrightarrow V$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε ισχύουν τα εξής:
(i) $f(0_U) = 0_V \in V$.
Πράγματι, είναι $f(0_U) = f(0_{\mathbb{R}}0_U) = 0_{\mathbb{R}}f(0_U) = 0_V$.
(ii) $f(-u) = -f(u)$.

Είναι $f(-u) = f[(-1)u] = (-1)f(u) = -f(u)$.
(iii) Αν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ και $u_1, \dots, u_n \in U$, τότε $f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_n f(u_n)$.
Πράγματι, είναι $f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = f(\lambda_1 u_1) + \cdots + f(\lambda_n u_n) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_n f(u_n)$.

Παρατήρηση

Αν η απεικόνιση $f : U \longrightarrow V$ είναι τέτοια ώστε $f(\lambda u + \lambda' u') = \lambda f(u) + \lambda' f(u')$ για κάθε $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ και $u, u' \in U$, τότε η f είναι γραμμική.
Πράγματι, θέτοντας $\lambda = \lambda' = 1$, παίρνουμε ότι $f(u + u') = f(u) + f(u')$ για κάθε $u, u' \in U$, ενώ για $\lambda' = 0$ παίρνουμε $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $u \in U$.

Παραδείγματα

(i) Για κάθε διανυσματικό χωρο V η ταυτοτική απεικόνιση $I_V : V \longrightarrow V$ είναι γραμμική.
Πράγματι, αν $v, v' \in V$ και $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, τότε είναι $I_V(\lambda v + \lambda' v') = \lambda v + \lambda' v' = \lambda I_V(v) + \lambda' I_V(v')$.
(ii) Πιο γενικά, αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος και $U \subseteq V$ είναι ένας υπόχωρος, τότε η ενθετική απεικόνιση $i : U \longrightarrow V$ με $i(u) = u \in V$ για κάθε $u \in U$ είναι μια γραμμική απεικόνιση.
Αν $u, u' \in U$ και $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ τότε $i(\lambda u + \lambda' u') = \lambda u + \lambda' u' = \lambda i(u) + \lambda i(u')$.
(iii) Αν ο V είναι ένας διανυσματικός χώρος και $U \subseteq V$ ένας υπόχωρος, τότε η απεικόνιση πηλίκο $\pi : V \longrightarrow V/U$ με $\pi(v) = v + U$ για κάθε $v \in V$ είναι γραμμική.
Πράγματι, αν $v, v' \in V$ και $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, τότε είναι $\pi(\lambda v + \lambda' v') = (\lambda v + \lambda' v') + U = (\lambda v + U) + (\lambda' v' + U) = \lambda(v + U) + \lambda'(v' + U) = \lambda\pi(v) + \lambda'\pi(v')$.
(iv) Έστω $f : U \longrightarrow V$ και $g : V \longrightarrow W$ δυο γραμμικές απεικονίσεις. Τότε, η σύνθεσή τους $g \circ f : U \longrightarrow W$ είναι επίσης γραμμική.
Αν $u_1, u_2 \in U$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, τότε είναι $(g \circ f)(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = g[f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)] = g[\lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2)] = \lambda_1 g[f(u_1)] + \lambda_2 g[f(u_2)] = \lambda_1 (g \circ f)(u_1) + \lambda_2 (g \circ f)(u_2)$.

Υπενθύμιση

Αν X, Y είναι σύνολα και $f : X \longrightarrow Y$ μια απεικόνιση, τότε για κάθε υποσύνολα $X' \subseteq X$ και $Y' \subseteq Y$ ορίζουμε:
(i) την εικόνα $f(X') \subseteq Y$ με $f(X') = \{y \in Y : y = f(x')$ για κάποιο $x' \in X'\}$ και
(ii) την αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(Y') \subseteq X$ με $f^{-1}(Y') = \{x \in X : f(x) \in Y'\}$.

Πρόταση

Έστω $f : U \longrightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση.
(i) Αν $U' \subseteq U$ είναι ένας υπόχωρος, τότε η εικόνα $f(U')$ είναι ένας υπόχωρος του V.
(ii) Αν $V' \subseteq V$ είναι ένας υπόχωρος, τότε η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(V')$ είναι ένας υπόχωρος του U.

Απόδειξη

(i) Είναι $0 \in U'$ και άρα $0 = f(0) \in f(U')$. Έστω τώρα στοιχεία $v_1, v_2 \in f(U')$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Από τον ορισμό της εικόνας $f(U')$, υπάρχουν $u_1, u_2 \in U'$ με $v_1 = f(u_1)$ και $v_2 = f(u_2)$. Συνεπώς, $v_1 + v_2 = f(u_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2) \in f(U')$ και $\lambda v_1 = \lambda f(u_1) = f(\lambda u_1) \in f(U')$.
(ii) Είναι $f(0) = 0 \in V'$ και άρα $0 \in f^{-1}(V')$. Θεωρούμε $u_1, u_2 \in f^{-1}(V')$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $u_1 + u_2, \lambda u_1 \in f^{-1}(V')$. Όμως, είναι $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) \in V' \Rightarrow u_1 + u_2 \in f^{-1}(V')$ και $f(\lambda u_1) = \lambda f(u_1) \in V' \Rightarrow \lambda u_1 \in f^{-1}(V')$.

Ειδικές περιπτώσεις

Θεωρούμε μια γραμμική απεικόνιση $f : U \longrightarrow V$.
(i) Η εικόνα $f(U) \subseteq V$ ειναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του V, ο οποίος ονομάζεται εικόνα της f και συμβολίζεται με $\operatorname{im} f$.
(ii) Η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(0) \subseteq U$ είναι ένας υπόχωρος του U, ο οποίος ονομάζεται πυρήνας της f και συμβολίζεται με $\ker f$.
Έτσι, είναι $\operatorname{im} f = \{v \in V :$ υπάρχει $u \in U$ με $v = f(u)\}$ και $\ker f = \{u \in U : f(u) = 0\}$.

Παρατηρήσεις

(i) Η γραμμική απεικόνιση $f : U \longrightarrow V$ είναι επί αν και μόνο αν $\operatorname{im} f = V$.
(ii) Η γραμμική απεικόνιση f ειναι 1-1 αν και μόνο αν $\ker f = 0$.
Απόδειξη
$[\Rightarrow]$ Υποθέτουμε ότι η f ειναι 1-1 και θεωρούμε $u \in \ker f$. Τότε, είναι $f(u) = 0 = f(0)$ και άρα, καθώς η f είναι 1-1, έπεται ότι $u = 0$. Έτσι, είναι $\ker f = 0$.
$[\Leftarrow]$ Υποθέτουμε ότι $\ker f = 0$ και θεωρούμε $u, u' \in U$ με $f(u) = f(u')$. Καθώς είναι $f(u - u') = f(u) - f(u') = 0 \in V$, έπεται ότι $u - u' \in \ker f$ και άρα $u - u' = 0$, δηλαδή $u = u'$.

Πρόταση

Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για μια γραμμική απεικόνιση $f : U \longrightarrow V$:
(i) Η f είναι 1-1 και επί.
(ii) Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g : V \longrightarrow U$ με $f \circ g = I_V$ και $g \circ f = I_U$.
Απόδειξη
$(ii) \to (i)$: Αυτό είναι γνωστό για κάθε απεικόνιση.
$(i) \to (ii)$: Γνωρίζουμε ότι υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση $f^{-1} : V \longrightarrow U$, η οποία είναι τέτοια ώστε $f \circ f^{-1} = I_V$ και $f^{-1} \circ f = I_U$. Θα δείξουμε ότι η f^{-1} ειναι γραμμική. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε στοιχεία $v_1, v_2 \in V$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Καθώς η f ειναι επί, υπάρχουν $u_1, u_2 \in U$ με $v_1 = f(u_1)$ και $v_2 = f(u_2)$. Συνεπώς, είναι $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) = f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)$ και άρα $f^{-1}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \lambda_1 f^{-1}(v_1) + \lambda_2 f^{-1}(v_2)$.

Παραδείγματα

(i) Η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(x, y) = (x + y, 2x, x - y)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ είναι 1-1, αλλά όχι επί.
Ας δούμε αρχικά ότι η f είναι 1-1, δηλαδή ότι $\ker f = 0$:
Έστω $(x, y) \in \ker f$. Τότε, είναι $f(x, y) = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ και άρα $(x + y, 2x, x - y) = (0, 0, 0)$, δηλαδή $\left\{\begin{matrix} x + y = 0 \\ 2x = 0 \\ x - y = 0 \end{matrix}\right\}$. Το σύστημα λύνεται και δίνει $x = y = 0$ και άρα είναι $(x, y) = (0, 0)$.
Θα δούμε τώρα ότι η f δεν είναι επί, δηλαδή ότι $\operatorname{im} f \neq \mathbb{R}^3$:
Έστω $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Τότε, είναι $(a, b, c) \in \operatorname{im} f$ αν και μόνο αν υπάρχει $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με $(a, b, c) = f(x, y)$, δηλαδή $(a, b, c) = (x + y, 2x, x - y)$. Το γραμμικό σύστημα $\left\{\begin{matrix} x + y = a \\ 2x = b \\ x - y = c \end{matrix}\right\}$ έχει λύση αν και μόνο αν $b = a + c$. Έτσι, είναι $\operatorname{im} f = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : b = a + c\} \neq \mathbb{R}^3$. (Για παράδειγμα, είναι $(1, 1, 1) \notin \operatorname{im} f$).
(ii) Η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(x, y, z) = (x + 2z, 2x + y)$ για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ είναι επί, αλλά όχι 1-1.
Ας δούμε αρχικά γιατί η f είναι επί:
Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ με $(a, b) = f(x, y, z)$. Θα πρέπει συνεπώς να είναι $(a, b) = (x + 2z, 2x + y)$ και άρα $\left\{\begin{matrix} x + 2z = a \\ 2x + y = b \end{matrix}\right\}$. Λύνοντας το γραμμικό αυτό σύστημα, βρίσκουμε τις λύσεις $x = \lambda$, $y = b - 2\lambda$ και $z = \frac{a-\lambda}{2}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. (Για παράδειγμα, θέτοντας $\lambda = 10$, προκύπτει το στοιχείο $(10, b - 20, \frac{a-10}{2}) \in \mathbb{R}^3$, που είναι τέτοιο ώστε $f(10, b - 20, \frac{a-10}{2}) = (a, b)$.
Θα δούμε τώρα ότι η f δεν είναι 1-1:
Αν $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, τότε $(x, y, z) \in \ker f$ αν και μόνο αν $f(x, y, z) = (0, 0)$, δηλαδή αν και μόνο αν $(x + 2z, 2x + y) = (0, 0)$. Έτσι, προκύπτει το γραμμικό σύστημα $\left\{\begin{matrix} x + 2z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = -2z \\ y = 4z \end{matrix}\right\}$.
Συνεπώς, δείξαμε ότι είναι $\ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x = -2z, y = 4z\} = \{(-2z, 4z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(-2, 4, 1) : z \in \mathbb{R}\} = \langle(-2, 4, 1)\rangle \neq 0$. Έτσι, η f δεν είναι 1-1.

(iii) Η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(x, y) = (x + 2y, 2x + 5y)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ είναι 1-1 και επί (δηλαδή ένας ισομορφισμός).
Για να δείξουμε ότι η f είναι 1-1 και επί, θα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει μοναδικό $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με $f(x, y) = (a, b)$. Είναι όμως $f(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow (x + 2y, 2x + 5y) = (a, b) \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x + 2y = a \\ 2x + 5y = b \end{matrix}\right\}$. Για να λύσουμε το σύστημα με τον τύπο του Cramer, υπολογίζουμε $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 \neq 0$, $D_x = \begin{vmatrix} a & 2 \\ b & 5 \end{vmatrix} = 5a - 2b$ και $D_y = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{vmatrix} = b - 2a$. Έτσι, θα είναι $x = \dfrac{D_x}{D} = 5a - 2b$ και $y = \dfrac{D_y}{D} = b - 2a$ (μοναδική λύση).
Γνωρίζουμε ότι, καθώς η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ είναι 1-1 και επί, υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, η οποία ειναι επίσης γραμμική. Από τον ορισμό, είναι $f(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow f^{-1}(a, b) = (x, y)$. Όπως μόλις είδαμε, είναι $f(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = 5a - 2b$ και $y = b - 2a$. Συνεπώς, είναι $f^{-1}(a, b) = (5a - 2b, b - 2a)$ για κάθε $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
(iv) Θεωρούμε έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και τις γραμμικές απεικονίσεις $L_A : \mathbb{R}^{n\times m} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times m}$ και $R_A : \mathbb{R}^{k\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times n}$ με $L_A(B) = AB$ και $R_A(\Gamma) = \Gamma A$, για κάθε $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ και $\Gamma \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε οι γραμμικές απεικονίσεις L_A και R_A είναι ισομορφισμοί.
Θεωρώντας τον πίνακα $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και τη γραμμική απεικόνιση $L_{A^{-1}} : \mathbb{R}^{n\times m} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times m}$, θα δείξουμε ότι η L_A είναι αντιστρέψιμη και μάλιστα ότι είναι ${L_A}^{-1} = L_{A^{-1}}$. Πράγματι, για κάθε πίνακα $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ υπολογίζουμε ότι είναι $(L_A \circ L_{A^{-1}})(B) = L_A(L_{A^{-1}}(B)) = L_A(A^{-1}B) = AA^{-1}B = B$ και $(L_{A^{-1}} \circ L_A)(B) = L_{A^{-1}}(L_A(B)) = L_{A^{-1}}(L_A(B)) = L_{A^{-1}}(AB) = A^{-1}AB = B$.
Ανάλογα, θα δείξουμε ότι η R_A είναι ισομορφισμός και μάλιστα ότι η αντίστροφή της είναι η γραμμική απεικόνση $R_{A^{-1}} : \mathbb{R}^{k\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times n}$. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε έναν πίνακα $\Gamma \in \mathbb{R}^{k\times n}$ και υπολογίζουμε: $(R_A \circ R_{A^{-1}})(\Gamma) = R_A(R_{A^{-1}}(\Gamma)) = R_A(\Gamma A^{-1}) = \Gamma A^{-1}A = \Gamma$ και $(R_{A^{-1}} \circ R_A)(\Gamma) = R_{A^{-1}}(R_A(\Gamma)) = R_{A^{-1}}(\Gamma A) = \Gamma AA^{-1} = \Gamma$.

Ορισμοί

(i) Μια γραμμική απεικόνιση $f : U \longrightarrow V$ καλείται ισομορφισμός αν η f είναι 1-1 και επί.
(ii) Δυο διανυσματικοί χωροι U, V καλούνται ισόμορφοι αν υπάρχει ισομορφισμός $f : U \longrightarrow V$.

Παρατήρηση

Η ισομορφία διανυσματικών χώρων είναι μια σχέση ισοδυναμίας.
Ανακλαστική ιδιότητα: Κάθε διανυσματικός χώρος U είναι ισόμορφος με τον εαυτό του (καθώς η ταυτοτική απεικόνιση $I_U : U \longrightarrow U$ ειναι ισομορφισμός).
Συμμετρική ιδιότητα: Αν U, V ειναι δυο διανυσματικοί χώροι, έτσι ώστε ο U να είναι ισόμορφος με τον V (μέσω ενός ισομορφισμού $f : U \longrightarrow V$), τότε ο V είναι ισόμορφος με τον U (μέσω του ισομορφισμού $f^{-1} : V \longrightarrow U$).
Μεταβατική ιδιότητα: Έστω U, V και W διανυσματικοί χώροι, τέτοιοι ώστε ο U είναι ισόμορφος με τον V και ο V ειναι ισόμορφος με τον W. Θεωρούμε ισομορφισμούς $f : U \longrightarrow V$ και $g : V \longrightarrow W$. Τότε, η σύνθεση $g \circ f : U \longrightarrow W$ ειναι επίσης ένας ισομορφισμός και άρα ο U είναι ισόμορφος με το W.

Ορισμός

Η διατεταμένη n-άδα $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ καλείται διατεταγμένη βάση του V αν τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$ αποτελούν μια βάση του V.

Πρόταση

Αν $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ είναι μια διατεταγμένη βάση του V, τότε η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ με $f(r_1, \ldots, r_n) = r_1v_1 + \cdots + r_nv_n$ για κάθε $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ είναι ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων (δηλαδή γραμμική, 1-1 και επί).
Απόδειξη

Για να δείξουμε τη γραμμικότητα ης f, θεωρούμε δύο στοιχεία $(r_1, \ldots, r_n), (r'_1, \ldots, r'_n) \in \mathbb{R}^n$ και

$\lambda \in \mathbb{R}$ και υπολογίζουμε:
$f[(r_1,\ldots,r_n)+(r'_1,\ldots,r'_n)] = f(r_1+r'_1,r_2+r'_2,\ldots,r_n+r'_n) = \sum_{i=1}^{n}(r_i+r'_i)v_i = \sum_{i=1}^{n}(r_iv_i+r'_iv_i) = \sum_{i=1}^{n} r_iv_i + \sum_{i=1}^{n} r'_iv_i = f(r_1,\ldots,r_n)+f(r'_1,\ldots,r'_n)$ και
$f[\lambda(r_1,\ldots,r_n)] = f(\lambda r_1,\ldots,\lambda r_n) = \lambda r_1v_1+\cdots+\lambda r_nv_n = \lambda(r_1v_1+\cdots+r_nv_n) = \lambda f(r_1,\ldots,r_n)$.
Θα δείξουμε ότι η f είναι επί, δηλαδή ότι $\operatorname{im} f = V$. Καθώς τα διανύσματα $v_1,\ldots,v_n$ παράγουν τον διανυσματικό χωρο V, για κάθε $v \in V$ υπάρχουν $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $v = \lambda_1v_1+\cdots+\lambda_nv_n$. Τότε όμως είναι $v = f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \operatorname{im} f$ και άρα δείξαμε ότι $\operatorname{im} f = V$.
Για να δείξουμε ότι η f ειναι 1-1, αρκεί να δείξουμε ότι $\ker f = 0$. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε ένα στοιχείο $(r_1,\ldots,r_n) \in \ker f$ και έχουμε ότι $f(r_1,\ldots,r_n) = 0 \in V \Rightarrow r_1v_1+\cdots+r_nv_n = 0 \in V$. Καθώς τα $v_1,\ldots,v_n$ ειναι γραμμικά ανεξάρτητα, είναι $r_1 = \cdots = r_n = 0$ και άρα $(r_1,\ldots,r_n) = (0,\ldots,0)$. Συνεπώς, είναι $\ker f = 0$.

Πρόταση

Έστω $f : U \longrightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση.
(i) Αν η f είναι 1-1 και τα $u_1,\ldots,u_n \in U$ ειναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε τα $f(u_1),\ldots,f(u_n) \in V$ ειναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα.
(ii) Αν η f ειναι επί και τα $u_1,\ldots,u_n \in U$ ειναι γεννήτορες του U, τότε τα $f(u_1),\ldots,f(u_n) \in V$ ειναι γεννήτορες του V.
(iii) Αν η f ειναι ισομορφισμός και τα $u_1,\ldots,u_n$ αποτελούν βάση του U, τότε τα $f(u_1),\ldots,f(u_n)$ αποτελούν βάση του V.

Απόδειξη

Το (iii) έπεται άμεσα από τα $(i),(ii)$.
Για να δείξουμε το (ii), θεωρούμε ένα στοιχείο $v \in V$. Καθώς η f είναι επί, υπάρχει $u \in U$ με $v = f(u)$. Είναι $U = \langle u_1,\ldots,u_n\rangle$ και άρα υπάρχουν $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ με $u = \lambda_1u_1+\cdots+\lambda_nu_n$. Συνεπώς, θα είναι $v = f(u) = f(\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_nu_n) = \lambda_1f(u_1)+\cdots+\lambda_nf(u_n)$ και άρα $v \in \langle f(u_1),\ldots,f(u_n)\rangle$. Άρα, έχουμε δείξει ότι $V = \langle f(u_1),\ldots,f(u_n)\rangle$.
Για να δείξουμε το (i), θεωρούμε $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$ με $a_1f(u_1)+\cdots+a_nf(u_n) = 0 \in V$. Τότε, είναι $f(a_1u_1+\cdots+a_nu_n) = a_1f(u_1)+\cdots+a_nf(u_n) = 0 \in V$ και άρα, καθώς η f είναι 1-1, ισχύει ότι $a_1u_1+\cdots+a_nu_n = 0 \in U$. Όμως, τα $u_1,\ldots,u_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα πρέπει να είναι $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Άρα, δείξαμε ότι τα διανύσματα $f(u_1),\ldots,f(u_n)$ ειναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Θεώρημα

Δύο πεπερασμένα παραγόμενοι διανυσματικοί χώροι U,V είναι ισόμορφοι αν και μόνο αν $\dim U = \dim V$.

Απόδειξη

$[\Rightarrow]$ Έστω $f : U \longrightarrow V$ ένας ισομορφισμός και $u_1,\ldots,u_n$ μια βάση του U (οπότε είναι $\dim U = n$). Όπως είδαμε, τα $f(u_1),\ldots,f(u_n)$ αποτελούν μια βάση του V και άρα είναι $\dim V = n (= \dim U)$.
$[\Leftarrow]$ Αν $n = \dim U = \dim V$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε διατεταγμένες βάσεις $(u_1,\ldots,u_n)$ του U και $(v_1,\ldots,v_n)$ του V. Όπως έχουμε δει, υπάρχουν ισομορφισμοί $\mathbb{R}^n \longrightarrow U$ και $\mathbb{R}^n \longrightarrow V$. Καθώς η ισομορφία είναι μια σχέση ισοδυναμίας, έπεται ότι οι διανυσματικοί χώροι U,V είναι ισόμορφοι.

Παρατηρήσεις

(i) Έστω $f,g : U \longrightarrow V$ δυο γραμμικές απεικονίσεις και $u_1,\ldots,u_n$ γεννήτορες του U. Τότε, είναι $f = g$ αν και μόνο αν $f(u_i) = g(u_i)$ για κάθε $i = 1,...,n$.
Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $f(u_i) = g(u_i)$ για $i = 1,\ldots,n$. Για κάθε διάνυσμα $u \in U$ υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$, ώστε $u = \lambda_1u_1+\cdots+\lambda_nu_n$. Συνεπώς, $f(u) = f(\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_nu_n) = \lambda_1f(u_1)+\cdots+\lambda_nf(u_n) = \lambda_1g(u_1)+\cdots+\lambda_ng(u_n) = g(\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_nu_n) = g(u)$ και άρα είναι $f = g$.
(ii) Έστω U,V δυο διανυσματικοί χώροι με τον U πεπερασμένα παραγόμενο και $u_1,\ldots,u_n \in U$

γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Τότε, για κάθε $v_1, \ldots, v_n \in V$ υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : U \longrightarrow V$ με $f(u_i) = v_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.
Πράγματι, γνωρίζω ότι υπάρχει βάση του U της μορφής $u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_m$. Ορίζουμε την απεικόνιση $f : U \longrightarrow V$, ως εξής: Γνωρίζω ότι για κάθε $u \in U$ υπάρχουν μοναδικοί συντελεστές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, ώστε $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} u_{n+1} + \cdots + \lambda_m u_m$. Τότε, θέτουμε $f(u) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \in V$. Η f είναι καλά ορισμένη, γραμμική και είναι $f(u_i) = v_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.
(iii) Έστω U, V δυο διανυσματικοί χώροι και $(u_1, \ldots, u_n)$ μια διατεταγμένη βάση του U. Τότε για κάθε n-άδα $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ υπάρχει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : U \longrightarrow V$ με $f(u_i) = v_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Με άλλα λόγια, υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων $\{f : U \longrightarrow V : f \text{ γραμμική}\}$ και V^n, όπου $n = \dim U$.
Πράγματι, καθώς τα $u_1, \ldots, u_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, γνωρίζουμε από το (ii) ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : U \longrightarrow V$ με $f(u_i) = v_i$ για $i = 1, \ldots, n$. Καθώς τα $u_1, \ldots, u_n$ παράγουν το U, γνωρίζουμε από το (i) ότι η f ειναι μοναδική.

Υπενθύμιση

Έστω X, Y δύο σύνολα και $f : X \longrightarrow Y$ μια απεικόνιση. Τότε, γνωρίζουμε ότι:
(i) Η f είναι 1-1 αν και μόνο αν υπάρχει απεικόνιση $r : Y \longrightarrow X$ με $r \circ f = I_X$.
(ii) Η f είναι επί αν και μόνο αν υπάρχει απεικόνιση $s : Y \longrightarrow X$ με $f \circ s = I_Y$.

Πρόταση

Έστω U, V δυο πεπερασμένα παραγόμενοι διανυσματικοί χώροι και $f : U \longrightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε, ισχύουν τα εξής:
(i) Η f είναι 1-1 αν και μόνο αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $r : V \longrightarrow U$ με $r \circ f = I_U$.
(ii) Η f είναι επί αν και μόνο αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $s : V \longrightarrow U$ με $f \circ s = I_V$.

Απόδειξη

(i) Γνωρίζουμε ότι η ύπαρξη της $r : V \longrightarrow U$ με $r \circ f = I_U$ δίνει ότι η f είναι 1-1. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η γραμμική απεικόνιση $f : U \longrightarrow V$ είναι 1-1. Θεωρούμε μια βάση $u_1, \ldots, u_n$ του U. Καθώς η f είναι 1-1, τα διανύσματα $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ του V είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Γνωρίζουμε συνεπώς ότι υπάρχει μια βάση του V της μορφής $f(u_1), \ldots, f(u_n), v_1, v_2, \ldots, v_k$. Ορίζουμε τη γραμμική απεικόνιση $r : V \longrightarrow U$, έτσι ώστε $r[f(u_1)] = u_1, \ldots, r[f(u_n)] = u_n, r(v_1) = 0, \ldots, r(v_k) = 0$. Ισχυρίζομαστε ότι $r \circ f = I_U : U \longrightarrow U$. Καθώς τα διανύσματα $u_1, \ldots, u_n$ παράγουν τον U, αρκεί να δείξω ότι $(r \circ f)(u_i) = I_U(u_i)$, δηλαδή ότι $r[f(u_i)] = u_i$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Αυτό όμως ισχύει από τον ορισμό της r.
(ii) Γνωρίζουμε ότι αν υπάρχει απεικόνιση $s : V \longrightarrow U$ με $f \circ s = I_V$, τότε η f είναι επί. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η γραμμική απεικόνιση $f : U \longrightarrow V$ ειναι επί. Θεωρούμε διανύσματα $u_1, \ldots, u_n$ που παράγουν του U και παρατηρώ ότι τα διανύσματα $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ παράγουν το V. Γνωρίζουμε συνεπώς ότι κάποιο υποσύνολο του $\{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ αποτελει μια βάση του V. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα $f(u_1), \ldots,, f(u_m)$ αποτελούν βάση του V (για κάποιο $m \leq n$). Ορίζουμε τώρα τη γραμμική απεικόνιση $s : V \longrightarrow U$, θέτοντας $s[f(u_1)] = u_1, \ldots,, s[f(u_m)] = u_m$. Ισχυριζόμαστε ότι $f \circ s = I_V : V \longrightarrow V$. Καθώς τα διανύσματα $f(u_1), \ldots, f(u_m)$ παράγουν το V, αρκεί να δείξουμε ότι $(f \circ s)(f(u_i)) = I_V(f(u_i))$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$, δηλαδή ότι $f[s(f(u_i))] = f(u_i)$ για $i = 1, \ldots, m$. Αυτό όμως ισχύει από τον ορισμό της s.

Παραδείγματα

(i) Η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(x, y) = (x+2y, x+y, 2x+5y)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ είναι 1-1. Θα βρούμε μια γραμμική απεικόνιση $r : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $r \circ f = I_{\mathbb{R}^2}$, ακολουθώντας τα βήματα της προηγούμενης απόδειξης:
Θεωρούμε τη βάση $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ του $\mathbb{R}^2$ και υπολογίζουμε τις εικόνες $v_1 = f(e_1) = (1, 1, 2)$ και $u_2 = f(e_2) = (2, 1, 5)$. Γνωρίζουμε ότι τα v_1, v_2 ειναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα

του $\mathbb{R}^3$. Παρατηρούμε ότι $v_3 = (0,0,1) \notin \operatorname{im} f = \langle f(e_1), f(e_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$, μιας και το γραμμικό σύστημα $\left\{\begin{array}{c} x+2y=0 \\ x+y=0 \\ 2x+5y=1 \end{array}\right\}$ δεν έχει λύση. Συνεπώς, τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Ορίζουμε την απεικόνιση $r : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, έτσι ώστε $r(v_1) = e_1 = (1,0)$, $r(v_2) = e_2 = (0,1)$ και $r(v_3) = (1,-1)$. (Μπορούμε να επιλέξουμε το διάνυσμα $r(v_3) \in \mathbb{R}^2$ κατά βούληση.) Τότε, είναι $r \circ f = I_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Για να βρούμε έναν τύπο για την εικόνα $r(a,b,c) \in \mathbb{R}^2$, θα πρέπει αρχικά να βρούμε συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, ώστε $(a,b,c) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$. Άρα, θα πρέπει να είναι $(a,b,c) = \lambda_1(1,1,2) + \lambda_2(2,1,5) + \lambda_3(0,0,1)$, δηλαδή $(a,b,c) = (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3)$. Λύνουμε τώρα το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c} \lambda_1 + 2\lambda_2 = a \\ \lambda_1 + \lambda_2 = b \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = c \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \lambda_1 = -a+2b \\ \lambda_2 = a-b \\ \lambda_3 = c - 2(-a+2b) - 5(a-b) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \lambda_1 = -a+2b \\ \lambda_2 = a-b \\ \lambda_3 = -3a+b+c \end{array}\right\}.$$

Συνεπώς, είναι $(a,b,c) = (-a+2b)v_1 + (a-b)v_2 + (-3a+b+c)v_3$ και άρα $r(a,b,c) = (-a+2b)r(v_1) + (a-b)r(v_2) + (-3a+b+c)r(v_3) = (-a+2b)(1,0) + (a-b)(0,1) + (-3a+b+c)(1,-1) = (-a+2b, 0) + (0, a-b) + (-3a+b+c, 3a-b-c) = (-4a+3b+c, 4a-2b-c)$.

(ii) Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(x,y,z) = (x+2z, 2x+y)$ για κάθε $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, η οποία είναι επί. Θα βρούμε μια γραμμική απεικόνιση $s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $f \circ s = I_{\mathbb{R}^2}$, ακολουθώντας όπως πριν τα βήματα της απόδειξης:

Θεωρούμε την κανονική βάση e_1, e_2, e_3 του $\mathbb{R}^3$ και τα διανύσματα $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$, όπου $v_1 = f(e_1) = f(1,0,0) = (1,2)$, $v_2 = f(e_2) = f(0,1,0) = (0,1)$ και $v_3 = f(e_3) = f(0,0,1) = (2,0)$. Γνωρίζουμε ότι τα v_1, v_2, v_3 παράγουν τον $\mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε ότι $v_1 = (1,0) + (0,2) = \frac{1}{2}(2,0) + 2(0,1) = \frac{1}{2}v_3 + 2v_2$ και άρα $\mathbb{R}^2 = \langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle v_2, v_3\rangle$. Έτσι, δείξαμε ότι τα διανύσματα v_2, v_3 αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^2$. Ορίζουμε τώρα τη γραμμική απεικόνιση $s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, θέτοντας $s(v_2) = e_2 = (0,1)$ και $s(v_3) = e_3 = (0,0,1)$. Για να βρούμε έναν τύπο για την εικόνα $s(a,b) \in \mathbb{R}^3$, θα πρέπει να εκφράσουμε το $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης v_2, v_3 του $\mathbb{R}^2$. Έτσι, ψάχνουμε να βρούμε $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ με $(a,b) = \lambda v_2 + \lambda' v_3 \Rightarrow (a,b) = \lambda(0,1) + \lambda'(2,0) \Rightarrow (a,b) = (0,\lambda) + (2\lambda', 0) \Rightarrow (a,b) = (2\lambda', \lambda) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a = 2\lambda' \\ b = \lambda \end{array}\right\}$. Θα πρέπει λοιπόν να είναι $\lambda = b$ και $\lambda' = \frac{a}{2}$. Έτσι, έχουμε $(a,b) = bv_2 + \frac{a}{2}v_3$ και άρα $s(a,b) = bs(v_2) + \frac{a}{2}s(v_3) = b(0,1,0) + \frac{a}{2}(0,0,1) = (0, b, \frac{a}{2})$.

<u>Πρόταση</u> (πρώτο θεώρημα ισομορφισμών)

Έστω $f : U \longrightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε, υπάρχει ισομορφισμός διανυσματικών χώρων $U/\ker f \simeq \operatorname{im} f$.

<u>Απόδειξη</u>

Παρατηρούμε ότι ο $U_0 = \ker f$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του U και άρα ορίζεται ο διανυσματικός χώρος πηλίκο U/U_0. Επίσης, η εικόνα $V_0 = \operatorname{im} f$ της f ειναι διανυσματικός υπόχωρος του V. Ορίζουμε τώρα μια απεικόνιση $\phi : U/U_0 \longrightarrow V_0$, ως εξής: Για κάθε $u + U_0 \in U/U_0$ (με $u \in U$) θέτουμε $\phi(u + U_0) = f(u) \in \operatorname{im} f = V_0$.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι η ϕ είναι καλά ορισμένη: Πράγματι, θεωρούμε $u_1, u_2 \in U$ με $u_1 + U_0 = u_2 + U_0 \in U/U_0$. Τότε, είναι $u_2 - u_1 \in U_0 = \ker f$ και άρα $f(u_2 - u_1) = 0 \Rightarrow f(u_2) - f(u_1) = 0 \Rightarrow f(u_1) = f(u_2)$.

Για να δείξουμε ότι η απεικόνιση ϕ ειναι γραμμική, θεωρούμε $u+U_0, u'+U_0 \in U/U_0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε, είναι $\phi[(u+U_0)+(u'+U_0)] = \phi[(u+u')+U_0] = f(u+u') = f(u)+f(u') = \phi(u+U_0)+\phi(u'+U_0)$ και $\phi[\lambda(u+U_0)] = \phi(\lambda u + U_0) = f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda\phi(u+U_0)$.

Θα δείξουμε ότι η ϕ είναι 1-1, δηλαδή ότι $\ker\phi = \{0 + U_0\} \subseteq U/U_0$. Θεωρούμε ένα στοιχείο $u + U_0 \in \ker\phi$. Τότε, είναι $f(u) = \phi(u + U_0) = 0 \in V_0 \subseteq V$ και άρα $u \in \ker f = U_0$. Έτσι, είναι $u + U_0 = 0 + U_0 \in U/U_0$.

Τέλος, για δούμε ότι η $\phi : U/U_0 \longrightarrow V_0$ είναι επί, θεωρούμε ένα στοιχείο $v \in V_0 = \operatorname{im} f$. Τότε, υπάρχει $u \in U$ με $v = f(u)$ και άρα για το στοιχείο $u + U_0 \in U/U_0$ είναι $v = f(u) = \phi(u + U_0) \in$

$\operatorname{im}\phi$. Έτσι, δείξαμε ότι $\operatorname{im}\phi = V_0$.

Πόρισμα

Έστω $f : U \longrightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν ο διανυσματικός χώρος U ειναι πεπερασμένα παραγόμενος, τότε οι διανυσματικοί χώροι $\ker f$, $\operatorname{im} f$ είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενοι και μάλιστα ισχύει ότι $\dim\ker f + \dim\operatorname{im} f = \dim U$.

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι ο διανυσματικός χώρος πηλίκο $U/\ker f$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος και μάλιστα ισχύει ότι $\dim U/\ker f = \dim U - \dim\ker f$. Καθώς οι διανυσματικοί χώροι $U/\ker f$ και $\operatorname{im} f$ ειναι ισόμορφοι, είναι $\dim\operatorname{im} f = \dim U/\ker f$. Συνεπώς, $\dim\operatorname{im} f = \dim U - \dim\ker f \Rightarrow \dim\ker f + \dim\operatorname{im} f = \dim U$.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ με $f(x, y, z) = (x + y, x - y, 2x + 2z, z - y)$ για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Καθώς το ομογενές γραμμικό σύστημα $\left\{ \begin{array}{c} x+y=0 \\ x-y=0 \\ 2x+2z=0 \\ z-y=0 \end{array} \right\}$ έχει μόνο την τετριμμένη (μηδενική) λύση, έπεται ότι $\ker f = 0$. Θα πρέπει λοιπόν να είναι $\dim\operatorname{im} f = \dim\mathbb{R}^3 - \dim\ker f = 3 - 0 = 3$. Εναλλακτικά, μπορούμε να υπολογίσουμε τη διάσταση της εικόνας της f, ως εξής: Είναι $\operatorname{im} f = \{(x + y, x - y, 2x + 2z, z - y) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 1, 2, 0) + y(1, -1, 0, -1) + z(0, 0, 2, 1) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ και άρα $\operatorname{im} f = \langle(1, 1, 2, 0), (1, -1, 0, -1), (0, 0, 2, 1)\rangle$. Δείχνουμε στη συνέχεια ότι τα διανύσματα $(1, 1, 2, 0)$, $(1, -1, 0, -1)$ και $(0, 0, 2, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και συμπεραίνουμε ότι αυτά αποτελούν μια βάση της εικόνας $\operatorname{im} f$ της f (οπότε είναι $\dim\operatorname{im} f = 3$).

Πόρισμα

Έστω U, V δύο διανυσματικοί χώροι με πεπερασμένη διάσταση και $f : U \longrightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση.

(i) Αν η f είναι 1-1, τότε $\dim U \leq \dim V$.

(ii) Αν η f είναι επί, τότε $\dim V \leq \dim U$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη σχέση $\dim U = \dim\ker f + \dim\operatorname{im} f$.

(i) Αν η f είναι 1-1, τότε $\ker f = 0$ και άρα $\dim\ker f = 0$. Συνεπώς, είναι $\dim U = 0 + \dim\operatorname{im} f = \dim\operatorname{im} f \leq \dim V$ (καθώς η εικόνα $\operatorname{im} f$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V).

(ii) Αν η f είναι επί, τότε $\operatorname{im} f = V$ και άρα $\dim V = \dim\operatorname{im} f \leq \dim\ker f + \dim\operatorname{im} f = \dim U$.

Πρόταση

Θεωρούμε μια γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow V$ και υποθέτουμε ότι ο V είναι πεπερασμένα παραγόμενος. Τότε, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) η f είναι 1-1,

(ii) η f είναι επί και

(iii) η f είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη

Είναι προφανές ότι $(iii) \longrightarrow (i), (ii)$. Θα δείξουμε ότι $(i) \longrightarrow (iii)$ και $(ii) \longrightarrow (iii)$.

$(i) \longrightarrow (iii)$: Υποθέτουμε ότι η f είναι 1-1 και θα δείξουμε ότι η f είναι επί. Πράγματι, από τη σχέση $\dim V = \dim\ker f + \dim\operatorname{im} f$, έπεται ότι $\dim\operatorname{im} f = \dim V$. Καθώς η εικόνα της f είναι ένας υπόχωρος του πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου V, γνωρίζουμε ότι η τελευταία ισότητα ισχύει μόνο αν $\operatorname{im} f = V$. Συνεπώς, η f είναι επί.

$(ii) \longrightarrow (iii)$: Υποθέτουμε τώρα ότι η f είναι επί και θα δείξουμε ότι η f είναι 1-1. Θεωρούμε τη σχέση $\dim V = \dim\ker f + \dim\operatorname{im} f$. Καθώς είναι $\operatorname{im} f = V$, έπεται ότι $\dim\operatorname{im} f = \dim V$ και άρα είναι $\dim\ker f = 0 \Rightarrow \ker f = 0$ και άρα η f είναι 1-1.

Εφαρμογή
Θεωρούμε έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει πίνακας $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $BA = I_n$. Θα δείξουμε ότι είναι $AB = I_n$ (και άρα ο A είναι αντιστρέψιμος με $B = A^{-1}$).
Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $L_A : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ με $L_A(X) = AX$ για κάθε $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Παρατηρούμε ότι η L_A είναι 1-1. Πράγματι, αν οι πίνακες $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι τέτοιοι ώστε $L_A(X) = L_A(Y)$, δηλαδή $AX = AY$, τότε είναι $X = I_nX = BAX = BAY = I_nY = Y$. Συνεπώς, με βάση την προηγούμενη πρόταση, η γραμμική απεικόνιση L_A είναι επί και άρα υπάρχει πίνακας $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, έτσι ώστε $AC = L_A(C) = I_n$. Τότε όμως, είναι $B = BI_n = BAC = I_nC = C$.

Ορισμός
Αν $f, g : U \longrightarrow V$ είναι δύο γραμμικές απεικονίσεις, τότε ορίζουμε το άθροισμα $f + g : U \longrightarrow V$, θέτοντας $(f + g)(u) = f(u) + g(u) \in V$ για κάθε $u \in U$. Επίσης, αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε την απεικόνιση $\lambda f : U \longrightarrow V$, θέτοντας $(\lambda f)(u) = \lambda f(u) \in V$ για κάθε $u \in U$.

Παρατήρηση
Έστω $f, g : U \longrightarrow V$ δύο γραμμικές απεικονίσεις και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε, οι απεικονίσεις $f + g, \lambda f : U \longrightarrow V$ είναι γραμμικές.
Απόδειξη:
Για κάθε $u, u' \in U$ και $a, a' \in \mathbb{R}$ υπολογίζουμε $(f + g)(au + a'u') = f(au + a'u') + g(au + a'u') = af(u)+a'f(u')+ag(u)+a'g(u') = a(f(u)+g(u))+a'(f(u')+g(u')) = a(f+g)(u)+a'(f+g)(u')$ και $(\lambda f)(au+a'u') = \lambda f(au+a'u') = \lambda[af(u)+a'f(u')] = \lambda af(u)+\lambda a'f(u') = a\lambda f(u)+a'\lambda f(u') = a(\lambda f)(u) + a'(\lambda f)(u')$.

Γραμμικές Απεικονίσεις και Πίνακες

Έστω U, V δύο πεπερασμένα παραγόμενοι διανυσματικοί χώροι και $f : U \longrightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Θεωρούμε μια διατεταγμένη βάση $\widehat{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ του U και μια διατεταγμένη βάση $\widehat{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ του V (οπότε είναι $\dim U = n$ και $\dim V = m$). Μπορούμε να γράψουμε τα διανύσματα $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n) \in V$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων της βάσης $v_1, \ldots, v_m$ του V. Έτσι, υπάρχουν μοναδικοί συντελεστές $a_{ij} \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι
$f(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{m1}v_m$
$f(u_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{m2}v_m$
$\vdots$
$f(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ... + a_{mn}v_m$.

Μπορούμε συνεπώς να θεωρήσουμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Ορισμός
Ο πίνακας A που ορίστηκε παραπάνω καλείται ο πίνακας της f ως προς τις διατεταγμένες βάσεις $\widehat{u}$ και $\widehat{v}$ και συμβολίζεται με $(f : \widehat{u}, \widehat{v})$.

Παραδείγματα
(i) Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(x, y, z) = (2x + 3y - z, x - y + z)$ για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Θεωρούμε επίσης τις κανονικές βάσεις $\widehat{e} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ και $\widehat{e'} = ((1, 0), (0, 1))$ των διανυσματικών χώρων $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$ αντίστοιχα. Θέλουμε να βρούμε τον πίνακα $(f : \widehat{e}, \widehat{e'}) \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Για το σκοπό αυτό, υπολογίζουμε
$f(1, 0, 0) = (2, 1) = 2(1, 0) + 1(0, 1)$,
$f(0, 1, 0) = (3, -1) = 3(1, 0) + (-1)(0, 1)$ και
$f(0, 0, 1) = (-1, 1) = (-1)(1, 0) + 1(0, 1)$.

Συνεπώς, θα είναι $(f : (\widehat{e}, \widehat{e'})) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.

(ii) Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_2[x] = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] : \deg f(x) \leq 2\} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ και τη γραμμική απεικόνιση $\Delta : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$, με $\Delta[f(x)] = f''(x) - 2f'(x) + 3f(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ για κάθε $f(x) \in \mathbb{R}_2[x]$.

Η απεικόνιση Δ είναι γραμμική. Πράγματι, αν $f(x), g(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε είναι $\Delta[\lambda f(x)+\mu g(x)] = (\lambda f(x)+\mu g(x))''-2(\lambda f(x)+\mu g(x))'+3(\lambda f(x)+\mu g(x)) = [\lambda f''(x)+\mu g''(x)]-2[\lambda f'(x) + \mu g'(x)] + 3[\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda[f''(x) - 2f'(x) + 3f(x)] + \mu[g''(x) - 2g'(x) + 3g(x)] = \lambda\Delta[f(x)] + \mu\Delta[g(x)]$.

Θεωρούμε τώρα τη διατεταγμένη βάση $\widehat{e} = (x^2, x, 1)$ του $\mathbb{R}_2[x]$ και υπολογίζουμε τον πίνακα $(\Delta : \widehat{e}, \widehat{e}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Είναι:

$\Delta(x^2) = 2 - 4x + 3x^2 = 3x^2 - 4x + 2$,

$\Delta(x) = 0 - 2 + 3x = 0x^2 + 3x - 2$ και

$\Delta(1) = 3 = 0x^2 + 0x + 3$.

Έτσι, έπεται ότι $(\Delta : \widehat{e}, \widehat{e}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Θεωρούμε τώρα τα στοιχεία $u_1 = x + 1$, $u_2 = x^2 + 1$ και $u_3 = x^2 + x$ του $\mathbb{R}_2[x]$. Θα δείξουμε ότι αυτά αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}_2[x]$ και θα υπολογίσω τον πίνακα $(\Delta : \widehat{u}, \widehat{u}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, όπου $\widehat{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Καθώς είναι $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$, τα στοιχεία u_1, u_2, u_3 αποτελούν βάση αν αυτά παράγουν τον $\mathbb{R}_2[x]$. Θεωρούμε ένα $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ και ψάχνουμε συντελεστές $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε να είναι $f(x) = \lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3$. Θα πρέπει να είναι $a_0 + a_1x + a_2x^2 = \lambda(x+1)+\mu(x^2+1)+\nu(x^2+x) \in \mathbb{R}_2[x]$, δηλαδή $a_0+a_1x+a_2x^2 = \lambda x+\lambda+\mu x^2+\mu+\nu x^2+\nu x \in \mathbb{R}_2[x]$. Έτσι, από την ισότητα $a_0 + a_1x + a_2x^2 = (\lambda + \mu) + (\lambda + \nu)x + (\mu + \nu)x^2$, παίρνουμε το γραμμικό σύστημα $\left\{\begin{matrix} \lambda + \mu = a_0 \\ \lambda + \nu = a_1 \\ \mu + \nu = a_2 \end{matrix}\right\}$. Λύνουμε το σύστημα κατά τα γνωστά:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & a_0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & a_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & a_0 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & a_1 - a_0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & a_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & a_0 - a_1 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & a_2 + a_1 - a_0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & (a_1 + a_0 - a_2)/2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & (a_0 + a_2 - a_1)/2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & (a_2 + a_1 - a_0/2) \end{pmatrix}.$$

Καθώς το σύστημα έχει λύση ($\lambda = \frac{1}{2}(a_1 + a_0 - a_2)$, $\mu = \frac{1}{2}(a_0 - a_1 + a_2)$, $\nu = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_0)$), τα διανύσματα u_1, u_2, u_3 παράγουν τον $\mathbb{R}_2[x]$ και άρα αυτά αποτελούν μια βάση του. Θα υπολογίσουμε τώρα τον πίνακα $(\Delta : \widehat{u}, \widehat{u})$. Υπολογίζουμε:

$\Delta(u_1) = \Delta(x + 1) = (x + 1)'' - 2(x + 1)' + 3(x + 1) = -2 + 3x + 3 = 3x + 1 = 2u_1 - u_2 + u_3$,

$\Delta(u_2) = \Delta(x^2 + 1) = (x^2 + 1)'' - 2(x^2 + 1)' + 3(x^2 + 1) = 2 - 4x + 3x^2 + 3 = 5 - 4x + 3x^2 = -1u_1 + 6u_2 - 3u_3$ και

$\Delta(u_3) = \Delta(x^2 + x) = (x^2 + x)'' - 2(x^2 + x)' + 3(x^2 + x) = 2 - 2(2x + 1) + 3x^2 + 3x - 2 - 4x - 2 + 3x^2 + 3x = -x + 3x^2 = -2u_1 + 2u_2 + 1u_3$.

Τελικά, έπεται ότι είναι $(\Delta : \widehat{u}, \widehat{u}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

(iii) Θεωρούμε τον 3×4 πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & -11 & 12 \end{pmatrix}$ και την απεικόνιση $f : \mathbb{R}^{4\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}$

με $f\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&-11&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b+3c+4d\\5a+6b+7c+8d\\9a+10b-11c+12d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times1}$ για κάθε $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times1}$. Η απεικόνιση f είναι γραμμική. Θέλουμε να υπολογίσουμε τον πίνακα της f ως προς τις κανονικές βάσεις $\widehat{e}=(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix})$ και $\widehat{e}=(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})$ των $\mathbb{R}^{4\times1}$ και $\mathbb{R}^{3\times1}$ αντίστοιχα. Υπολογίζουμε:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+9\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\\10\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+10\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\\-11\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-11\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\text{ και}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\\12\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+8\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+12\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, είναι $(f:\widehat{e},\widehat{e'})=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&-11&12\end{pmatrix}=A$.

<u>Παρατήρηση</u>

Αν U,V είναι διανυσματικοί χώροι με διατεταγμένες βάσεις $\widehat{u}$ και $\widehat{v}$ αντίστοιχα και $f:U\longrightarrow V$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε για κάθε $u\in U$ με $u=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\cdots+\lambda_nu_n$ είναι $f(u)=\mu_1v_1+\mu_2v_2+\cdots+\mu_mv_m$, όπου $\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_m\end{pmatrix}=(f:\widehat{u},\widehat{v})\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}$.

Πράγματι, αν $(f:\widehat{u},\widehat{v})=(a_{ij})$, τότε είναι $f(u_j)=a_{1j}v_1+a_{2j}v_2+\cdots+a_{mj}v_m=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}v_i$ για κάθε $j=1,\ldots,n$. Καθώς $u=\sum_{j=1}^{n}\lambda_ju_j$, θα είναι $f(u)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_jf(u_j)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\sum_{i=1}^{m}a_{ij}v_i=\sum_{i,j}\lambda_ja_{ij}v_i=\sum_i(\sum_j a_{ij}\lambda_j)v_i$. Όμως, είναι $f(u)=\sum_{i=1}^{m}\mu_iv_i$ και άρα θα πρέπει να ισχύει η ισότητα $\mu_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\lambda_j$ για κάθε $i=1,\ldots,m$. Αυτό σημαίνει ακριβώς ότι είναι $\begin{pmatrix}\mu_1\\\vdots\\\mu_m\end{pmatrix}=(a_{ij})\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}$.

<u>Παρατήρηση</u> Έστω U,V δύο διανυσματικοί χώροι και $L(U,V)$ το σύνολο όλων των γραμμικών

απεικονίσεων από το U στο V. Οι πράξεις της πρόσθεσης γραμμικών απεικονίσεων και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού με πραγματικούς αριθμούς (όπως ορίστηκαν παραπάνω) εφοδιάζουν το σύνολο $L(U, V)$ με τη δομή ενός διανυσματικού χώρου.

Πρόταση
Αν οι διανυσματικοί χώροι U, V διαστάσεων n και m αντίστοιχα έχουν διατεταγμένες βάσεις $\widehat{u}$ και $\widehat{v}$ αντίστοιχα, τότε η απεικόνιση $L(U, V) \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$ με $f \mapsto (f : \widehat{u}, \widehat{v})$ είναι γραμμική, 1-1 και επί, είναι δηλαδή ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Πόρισμα
Αν $\dim U = n$ και $\dim V = m$, τότε $\dim L(U, V) = nm$.

Πρόταση
Έστω U, V, W διανυσματικοί χώροι με διατεταγμένες βάσεις $\widehat{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\widehat{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ και $\widehat{w} = (w_1, \ldots, w_l)$ αντίστοιχα. Θεωρούμε δύο γραμμικές απεικονίσεις $f : U \longrightarrow V$ και $g : V \longrightarrow W$ και τη σύνθεσή τους $g \circ f : U \longrightarrow W$. Τότε, είναι $(g \circ f : \widehat{u}, \widehat{w}) = (g : \widehat{v}, \widehat{w})(f : \widehat{u}, \widehat{v}) \in \mathbb{R}^{l\times n}$.
Απόδειξη Έστω ότι είναι $(f : \widehat{u}, \widehat{v}) = A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $(g : \widehat{v}, \widehat{w}) = B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{l\times m}$ και $(g \circ f : \widehat{u}, \widehat{w}) = C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{l\times n}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει η ισότητα $C = BA$. Από τους ορισμούς των πινάκων A, B και C, είναι $f(u_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji} v_j$ για κάθε i, $g(v_j) = \sum\limits_{k=1}^{l} b_{kj} w_k$ για κάθε j και $(g \circ f)(u_i) = \sum\limits_{k=1}^{l} c_{ki} w_k$ για κάθε i. Όμως, είναι $(g \circ f)(u_i) = g[f(u_i)] = g\left[\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji} v_j\right] = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji} g(v_j) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji} \sum\limits_{k=1}^{l} b_{kj} w_k = \sum\limits_{j,k} a_{ji} b_{kj} w_k = \sum\limits_{k=1}^{l} (\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji} b_{kj}) w_k$. Συνεπώς, θα πρέπει να είναι $c_{ki} = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji} b_{kj} = \sum\limits_{j=1}^{m} b_{kj} a_{ji}$ για κάθε k, i, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

Πρόταση
Έστω $f : U \longrightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση και $\widehat{u}$, $\widehat{v}$ διατεταγμένες βάσεις των U και V αντίστοιχα. Τότε, η f είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν ο πίνακας $(f : \widehat{u}, \widehat{v})$ είναι αντιστρέψιμος.
Απόδειξη
Αν η f είναι ισομορφισμός, θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f^{-1} : V \longrightarrow U$ και τον πίνακά της $B = (f^{-1} : \widehat{v}, \widehat{u})$. Τότε, για τον πίνακα $A = (f : \widehat{u}, \widehat{v})$ είναι $AB = (f : \widehat{u}, \widehat{v})(f^{-1} : \widehat{v}, \widehat{u}) = (f \circ f^{-1} : \widehat{v}, \widehat{v}) = (1_V : \widehat{v}, \widehat{v}) = I_m$ (όπου $m = \dim V$) και $BA = (f^{-1} : \widehat{v}, \widehat{u})(f : \widehat{u}, \widehat{v}) = (f^{-1} \circ f : \widehat{u}, \widehat{u}) = (1_U : \widehat{u}, \widehat{u}) = I_n$ (όπου $n = \dim U$). Καθώς οι U, V είναι ισόμορφοι, έπεται ότι $n = \dim U = \dim V = m$. Έτσι, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος (και μάλιστα $B = A^{-1}$).
Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος (και άρα $\dim U = \dim V = n$). Καθώς η απεικόνιση $L(V, U) \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ με $\sigma \mapsto (\sigma : \widehat{v}, \widehat{u})$ είναι επί, υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g : V \longrightarrow U$ με $(g : \widehat{v}, \widehat{u}) = A^{-1}$. Θα δείξουμε ότι $g = f^{-1}$, δηλαδη ότι $f \circ g = 1_V$ και $g \circ f = 1_U$. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι $(f \circ g : \widehat{v}, \widehat{v}) = I_n$ και $(g \circ f : \widehat{u}, \widehat{u}) = I_n$. Όμως, έχουμε $(f \circ g : \widehat{v}, \widehat{v}) = (f : \widehat{u}, \widehat{v})(g : \widehat{v}, \widehat{u}) = AA^{-1} = I_n$ και $(g \circ f : \widehat{u}, \widehat{u}) = (g : \widehat{v}, \widehat{u})(f : \widehat{u}, \widehat{v}) = A^{-1}A = I_n$.

Παράδειγμα
Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ και την ταυτοτική απεικόνιση $I : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Θεωρούμε επίσης την κανονική βάση $\widehat{e} = ((1, 0), (0, 1))$ και τη διατεταγμένη βάση $\widehat{v} = ((2, 5), (1, 3))$. Ασφαλώς είναι $(I : \widehat{e}, \widehat{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $(I : \widehat{v}, \widehat{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Θέλουμε να υπολογίσουμε τους πίνακες $(I : \widehat{v}, \widehat{e})$ και $(I : \widehat{e}, \widehat{v})$. Από τον ορισμό, είναι $(I : \widehat{v}, \widehat{e}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Για να βρούμε τον πίνακα $(I : \widehat{e}, \widehat{v}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ψάχνω να βρω τα a, b, c και d, ώστε να είναι $(1, 0) = a(2, 5) + c(1, 3)$ και

$(0,1) = b(2,5) + d(1,3)$. Λύνοντας τα δύο γραμμικά συστήματα που προκύπτουν, έπεται ότι είναι $(I : \widehat{e}, \widehat{v}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.
Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι ισότητες $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Ορισμός

Έστω U ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n και $\widehat{u}, \widehat{u'}$ δύο διατεταγμένες βάσεις του. Τότε, ο $n \times n$ πίνακας $P = (I_U : \widehat{u}, \widehat{u'})$ ονομάζεται πίνακας αλλαγής βάσης από τη $\widehat{u}$ στη $\widehat{u'}$.

Ιδιότητες

(i) Οι πίνακες αλλαγής βάσης είναι αντιστρέψιμοι. Πιο συγκεκριμένα, ο αντίστροφος του πίνακα $P = (I_U : \widehat{u}, \widehat{u'})$ είναι ο πίνακας $Q = (I_U : \widehat{u'}, \widehat{u})$.
Πράγματι, αν $\dim U = n$, μπορούμε να υπολογίσουμε τα γινόμενα $PQ = (I_U : \widehat{u}, \widehat{u'})(I_U : \widehat{u'}, \widehat{u}) = (I_U \circ I_U : \widehat{u'}, \widehat{u'}) = (I_U : \widehat{u'}, \widehat{u'}) = I_n$ και $QP = (I_U : \widehat{u'}, \widehat{u})(I_U : \widehat{u}, \widehat{u'}) = (I_U \circ I_U : \widehat{u}, \widehat{u}) = (I_U : \widehat{u}, \widehat{u}) = I_n$.
(ii) Έστω U ένας n-διάστατος διανυσματικός χώρος, $P = (I_U : \widehat{u}, \widehat{u'})$ ένας πίνακας αλλαγής βάσης και $u \in U$. Μπορούμε να γράψουμε $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$ και $u = \mu_1 u'_1 + \mu_2 u'_2 + \cdots + \mu_n u'_n$. Τότε, ως ειδική περίπτωση ενός γνωστού αποτελέσματος για την περίπτωση όπου $f = I_U$, έπεται ότι είναι $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη διατεταγμένη βάση $\widehat{v} = ((2,5),(1,3))$ του $\mathbb{R}^2$ και το διάνυσμα $(-1,4) \in \mathbb{R}^2$. Θεωρούμε επίσης την κανονική βάση $\widehat{e} = ((1,0),(0,1))$ του $\mathbb{R}^2$ και έχουμε ότι $(-1,4) = -(1,0) + 4(0,1)$. Σύμφωνα με το (ii) παραπάνω, μπορούμε να γράψουμε $(-1,4) = x(2,5) + y(1,3)$, όπου $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (I : \widehat{e}, \widehat{v}) \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Έχοντας υπολογίσει ότι $(I : \widehat{e}, \widehat{v}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, προκύπτει ότι $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 13 \end{pmatrix}$.
Συνεπώς, είναι $(-1,4) = -7(2,5) + 13(1,3)$.
(iii) Έστω $\widehat{u}$ μια διατεταγμένη βάση του διανυσματικού χώρου U διάστασης n και $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε, υπάρχει διατεταγμένη βάση $\widehat{u'}$ του U, έτσι ώστε $P = (I_U : \widehat{u'}, \widehat{u})$.
Πράγματι, καθώς η απεικόνιση $L(U,U) \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ με $\sigma \longrightarrow (\sigma : \widehat{u}, \widehat{u})$ είναι επί, υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : U \longrightarrow U$, ώστε $(f : \widehat{u}, \widehat{u}) = P$. Καθώς ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος, η f είναι ισομορφισμός και άρα τα διανύσματα $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)$ αποτελούν βάση του U. Γράφουμε $u'_i = f(u_i)$ για $i = 1, \ldots, n$ και θεωρούμε τη διατεταγμένη βάση $\widehat{u'} = (u'_1, \ldots, u'_n)$. Αν είναι $P = (p_{ij})$, τότε έχουμε $u'_j = f(u_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} u_i$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$ και άρα, από τον ορισμό, έπεται ότι $P = (I_U : \widehat{u'}, \widehat{u})$.

Πρόταση

Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για δυο πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$:
(i) Υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ και $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ώστε $B = PAQ$.
(ii) Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ και διατεταγμένες βάσεις $\widehat{u}, \widehat{u'}$ του $\mathbb{R}^n$ και $\widehat{v}, \widehat{v'}$ του $\mathbb{R}^m$, ώστε $A = (f : \widehat{u}, \widehat{v})$ και $B = (f : \widehat{u'}, \widehat{v'})$.
Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι ο A είναι ισοδύναμος με τον B.

Απόδειξη

$(i) \longrightarrow (ii)$: Θεωρούμε τις κανονικές βάσεις $\widehat{e},\widehat{\epsilon}$ των διανυσματικών χώρων $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα. Καθώς η απεικόνιση $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$ με $\sigma \mapsto (\sigma : \widehat{e},\widehat{\epsilon})$ είναι επί, μπορούμε να βρούμε γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ με $(f : \widehat{e},\widehat{\epsilon}) = A$. Για τους πίνακες P, Q μπορούμε να βρούμε νέες διατεταγμένες βάσεις $\widehat{u},\widehat{v}$ των $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $P^{-1} = (I_{\mathbb{R}^m} : \widehat{v},\widehat{\epsilon})$ και $Q = (I_{\mathbb{R}^n} : \widehat{u},\widehat{e})$. Συνεπώς, είναι $P = (I_{\mathbb{R}^m} : \widehat{\epsilon},\widehat{v})$ και άρα $B = PAQ = (I_{\mathbb{R}^m} : \widehat{\epsilon},\widehat{v})(f : \widehat{e},\widehat{\epsilon})(I_{\mathbb{R}^n} : \widehat{u},\widehat{e}) = (I_{\mathbb{R}^m} \circ f \circ I_{\mathbb{R}^n} : \widehat{u},\widehat{v}) = (f : \widehat{u},\widehat{v})$.
$(ii) \longrightarrow (i)$: Ορίζουμε τους πίνακες $P = (I_{\mathbb{R}^m} : \widehat{v},\widehat{v'})$ και $Q = (I_{\mathbb{R}^n} : \widehat{u'},\widehat{u})$, οι οποίοι είναι αντιστρέψιμοι (ως πίνακες αλλαγής βάσης) και υπολογίζουμε $PAQ = (I_{\mathbb{R}^m} : \widehat{v},\widehat{v'})(f : \widehat{u},\widehat{v})(I_{\mathbb{R}^n} : \widehat{u'},\widehat{u}) = (I_{\mathbb{R}^m} \circ f \circ I_{\mathbb{R}^n} : \widehat{u'},\widehat{v'}) = (f : \widehat{u'},\widehat{v'}) = B$.

Παρατήρηση

Η ισοδυναμία πινάκων είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathbb{R}^{m\times n}$.
(i) (ανακλαστική ιδιότητα) Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ είναι ισοδύναμος με τον εαυτό του, καθώς $A = I_m A I_n$.
(ii) (συμμετρική ιδιότητα) Αν $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ είναι δύο πίνακες και ο A είναι ισοδύναμος με το B, τότε ο B είναι ισοδύναμος με τον A. (Αν $B = PAQ$ για κάποιους αντιστρέψιμους πίνακες $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ και $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε είναι $A = P^{-1}BQ^{-1}$ και οι πίνακες $P^{-1} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ και $Q^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμοι.
(iii) (μεταβατική ιδιότητα) Αν $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ είναι τρεις πίνακες, τέτοιοι ώστε ο A είναι ισοδύναμος με το B και ο B είναι ισοδύναμος με το C, τότε ο A είναι ισοδύναμος με το C. (Αν είναι $B = PAQ$ και $C = P'BQ'$ για κάποιους αντιστρέψιμους πίνακες $P, P' \in \mathbb{R}^{m\times m}$ και $Q, Q' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε έχουμε $C = P'(PAQ)Q' = (P'P)A(QQ')$ και οι πίνακες $P'P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ και $QQ' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμοι.

Πρόταση

Αν $f : U \longrightarrow V$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε υπάρχουν διατεταγμένες βάσεις $\widehat{u}$, $\widehat{v}$ των διανυσματικών χώρων U και V αντίστοιχα, ώστε $(f : \widehat{u},\widehat{v}) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$. (Εδώ, $I_r \in \mathbb{R}^{r\times r}$ είναι ο μοναδιαίος $r \times r$ πίνακας.)

Απόδειξη

Έστω $n = \dim V$ και $m = \dim U$. Θεωρούμε τους υπόχωρους $\ker f \subseteq U$ και $\operatorname{im} f \subseteq V$ και ορίζουμε $k = \dim\ker f$ και $r = \dim\operatorname{im} f$. Γνωρίζουμε ότι θα πρέπει να είναι $k + r = \dim\ker f + \dim\operatorname{im} f = \dim U = m$. Επιλέγουμε μια βάση $u_1, \ldots, u_k$ του $\ker f$ και την επεκτείνουμε σε μια βάση $u_1, \ldots, u_k, u'_1, \ldots, u'_r$ του U. Καθώς τα διανύσματα αυτά παράγουν τον U, οι εικόνες τους $f(u_1), \ldots, f(u_k), f(u'_1), \ldots, f(u'_r)$ παράγουν την εικόνα $\operatorname{im} f$ της f. Καθώς είναι $f(u_i) = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$, έπεται ότι $\operatorname{im} f = \langle f(u'_1), \ldots, f(u'_r)\rangle$. Όμως είναι $\dim\operatorname{im} f = r$ και άρα τα διανύσματα $f(u'_1), \ldots, f(u'_r)$ (που παράγουν τον υπόχωρο $\operatorname{im} f$) είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Μπορούμε συνεπώς να βρούμε μια βάση του V της μορφής $f(u'_1), \ldots, f(u'_r), v_1, \ldots, v_{n-r}$. Θεωρούμε τώρα τις διατεταγμένες βάσεις $\widehat{u} = (u'_1, \ldots, u'_r, u_1, u_2, \ldots, u_k)$ και $\widehat{v} = (f(u'_1), \ldots, f(u'_r), v_1, \ldots, v_{n-r})$ και έχω ότι $(f : \widehat{u},\widehat{v}) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Πόρισμα

Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ είναι ισοδύναμος με τον $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, για κάποιο $r \leq \min\{m, n\}$.

Απόδειξη

Θεωρούμε μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ με $(f : \widehat{e},\widehat{\epsilon}) = A$, όπου $\widehat{e},\widehat{\epsilon}$ είναι οι κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα. Μόλις είδαμε ότι υπάρχουν διατεταγμένες βάσεις $\widehat{u}$ του $\mathbb{R}^n$ και $\widehat{v}$ του $\mathbb{R}^m$, τέτοιες ώστε $(f : \widehat{u},\widehat{v}) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Όμως οι πίνακες $(f : \widehat{e},\widehat{\epsilon}) = A$ και $(f : \widehat{u},\widehat{v})$ είναι ισοδύναμοι.

Παρατήρηση

Αν $r, s \in \{0, 1, \ldots, k\}$, όπου $k = \min\{m, n\}$ και οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ είναι ισοδύναμοι, τότε είναι $r = s$.
Πράγματι, υποθέτοντας ότι οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι, γνωρίζουμε ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ και διατεταγμένες βάσεις $\widehat{u}, \widehat{u'}$ του $\mathbb{R}^n$ και $\widehat{v}, \widehat{v'}$ του $\mathbb{R}^m$, τέτοιες ώστε να είναι $(f : \widehat{u}, \widehat{v}) = A$ και $(f : \widehat{u'}, \widehat{v'}) = B$. Έτσι, αν είναι $\widehat{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ και $\widehat{v} = (v_1, \ldots, v_m)$, τότε είναι $f(u_1) = v_1, \ldots, f(u_r) = v_r, f(u_{r+1}) = 0, \ldots, f(u_n) = 0$. Συνεπώς, είναι $\operatorname{im} f = \langle v_1, \ldots, v_r, 0, \ldots, 0\rangle = \langle v_1, \ldots, v_r\rangle \subseteq \mathbb{R}^m$ και άρα $\dim \operatorname{im} f = r$. Εργαζόμενοι ανάλογα με τις διατεταγμένες βάσεις $\widehat{u'}$ και $\widehat{v'}$, μπορούμε να δούμε ότι είναι $\dim \operatorname{im} f = s$. Συνεπώς, έπεται ότι $r = s$.

Πόρισμα

Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ είναι ισοδύναμος με έναν πίνακα της μορφής $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, για ένα μοναδικό $r \in \mathbb{N}$ με $0 \le r \le \min\{m, n\}$.

Παρατήρηση

Έχουμε δείξει ότι, αν $k = \min\{m, n\}$, τότε υπάρχουν ακριβώς $k+1$ κλάσεις ισοδυναμίας πινάκων στο σύνολο $\mathbb{R}^{n\times m}$, οι οποίες έχουν ως αντιπροσώπους τους πίνακες $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $r = 0, 1, \ldots k$.

Ορισμός

Η τάξη $r = r(A)$ ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ είναι ο μοναδικός φυσικός αριθμός που είναι τέτοιος ώστε οι πίνακες A και $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ να είναι ισοδύναμοι.

Παρατηρήσεις

(i) Αναδιατυπώνοντας αυτά που είδαμε παραπάνω, έπεται ότι δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ είναι ισοδύναμοι αν και μόνο αν $r(A) = r(B)$.
(ii) Η τάξη ενός πίνακα $A = (c_1\ c_2\ \ldots\ c_m) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, όπου $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ ειναι οι στήλες του, είναι ίση με τη διάσταση του υπόχωρου $\langle c_1, c_2, \ldots, c_m\rangle \subseteq \mathbb{R}^{n\times 1}$.
Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε $A = (f : \widehat{e}, \widehat{\epsilon})$ για μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, όπου $\widehat{e}$ και $\widehat{\epsilon}$ είναι οι κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^n$ αντίστοιχα. Τότε όμως, όπως έχουμε δει, είναι $r(A) = \dim \operatorname{im} f = \dim\langle f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_m)\rangle = \dim\langle c_1, c_2, \ldots, c_m\rangle$.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Θα βρούμε την τάξη $r(A) = r \in \{0, 1, 2, 3\}$ και αντιστρέψιμους πίνακες $P, Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(1, 0, 0) = (2, 1, 0)$, $f(0, 1, 0) = (0, 2, -4)$ και $f(0, 0, 1) = (2, -1, 4)$. Τότε, είναι $f(x, y, z) = f[x(1, 0, 0)+y(0, 1, 0)+z(0, 0, 1)] = xf(1, 0, 0)+ yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) = (2x, x, 0) + (0, 2y, -4y) + (2z, -z, 4z) = (2x+2z, x+2y-z, -4y+4z)$ για καθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Έτσι, αν $\widehat{e} = (e_1, e_2, e_3)$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, έχουμε ότι $A = (f : \widehat{e}, \widehat{e})$.

Θα βρούμε μια βάση του πυρήνα της f. Είναι $(x, y, z) \in \ker f \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x + 2z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ -4y + 4z = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = -z \\ y = z \end{array}\right\}$. Έτσι, είναι $\ker f = \{(-z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(-1, 1, 1) : z \in \mathbb{R}\} = \langle(-1, 1, 1)\rangle$.

Μια βάση του $\ker f$ είναι το $u = (-1, 1, 1)$. Επεκτείνουμε το διάνυσμα αυτό σε μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Παρατηρούμε ότι είναι $u = -e_1 + e_2 + e_3$ και άρα $e_3 = e_1 - e_2 - u \in \langle e_1, e_2, u\rangle$. Συνεπώς, είναι $e_1, e_2, e_3 \in \langle e_1, e_2, u\rangle$ και άρα ο $\mathbb{R}^3$ παράγεται από τα e_1, e_2, u. Όμως, είναι $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ και άρα τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έτσι, η $\widehat{u} = (e_1, e_2, u)$ είναι μια διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$.

Καθώς είναι $u \in \ker f$, έπεται ότι $\operatorname{im} f = \langle f(e_1), f(e_2)\rangle = \langle (2, 1, 0), (0, 2, -4)\rangle$. Παρατηρούμε ότι $e_2 = (0, 1, 0) \notin \langle (2, 1, 0), (0, 2, -4)\rangle$ και άρα τα τρια διανύσματα $f(e_1), f(e_2), e_2$ ειναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς, αυτά αποτελούν μια βάση του (3-διάστατου) διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$. Θέτουμε $\widehat{v} = (f(e_1), f(e_2), e_2)$. Τότε, είναι $(f : \widehat{u}, \widehat{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ και άρα $r(A) = \dim \operatorname{im} f = 2$.

Για να βρούμε αντιστρέψιμους πίνακες $P, Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $PAQ = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, παρατηρούμε ότι $(f : \widehat{u}, \widehat{v}) = (I_{\mathbb{R}^3} : \widehat{e}, \widehat{v})(f : \widehat{e}, \widehat{\epsilon})(I_{\mathbb{R}^3} : \widehat{u}, \widehat{e})$. Έτσι, μπορούμε να θέσουμε $Q = (I_{\mathbb{R}^3} : \widehat{u}, \widehat{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $P = (I_{\mathbb{R}^3} : \widehat{e}, \widehat{v})$. Καθώς $P^{-1} = (I_{\mathbb{R}^3} : \widehat{v}, \widehat{e}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, είναι $P = (P^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$. Εργαζόμαστε κατά τα γνωστά για να βρούμε τον P:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Άρα, είναι $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Μπορούμε να επαληθεύσουμε άμεσα ότι είναι

$$PAQ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

(i) Έστω $f, g : V \longrightarrow V$ δύο γραμμικές απεικονίσεις και $f \circ g : V \longrightarrow V$ η σύνθεσή τους. Τότε, είναι $\operatorname{im}(f \circ g) \subseteq \operatorname{im} f$, μιας και $\operatorname{im}(f \circ g) = (f \circ g)(V) = f[g(V)] \subseteq f(V) = \operatorname{im} f$. Συνεπώς, είναι $\dim \operatorname{im}(f \circ g) \leq \dim \operatorname{im} f$.

(ii) Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ δύο πίνακες. Τότε, είναι $r(AB) \leq r(A)$.

Πράγματι, γνωρίζουμε ότι υπάρχουν γραμμικές απεικονίσεις $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, ώστε $A = (f : \widehat{e}, \widehat{e})$ και $B = (g : \widehat{e}, \widehat{e})$, όπου $\widehat{e}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε, είναι $AB = (f \circ g : \widehat{e}, \widehat{e})$ και άρα $r(AB) = \dim \operatorname{im}(f \circ g) \leq \dim \operatorname{im} f = r(A)$.

(iii) Ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είναι $r(A) = n$.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ με $A = (f : \widehat{e}, \widehat{e})$, όπου $\widehat{e}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η f είναι ισομορφισμός. Αν, η f είναι ισομορφισμός τότε η f είναι επί, δηλαδή $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim \operatorname{im} f = n \Rightarrow r(A) = n$. Έστω τώρα ότι $r(A) = n$ δηλαδή ο A είναι ισοδύναμος με το I_n. Από τη θεωρία μπορούμε να βρούμε αντιστρέψιμους πίνακες, P, Q ώστε $PAQ = I_n$ και άρα $A = P^{-1} \cdot I_n \cdot Q^{-1} = P^{-1} \cdot Q^{-1}$ δηλαδή ο A είναι αντιστρέψιμος ως γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων.

<u>Ορισμός</u>

Οι πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ καλούνται όμοιοι αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, έτσι ώστε να είναι $B = PAP^{-1}$.

Παρατηρήσεις

(i) Αν οι πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι όμοιοι, τότε οι A, B είναι ισοδύναμοι. (Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα, αφού ο μοναδιαίος πίνακας I_n είναι ισοδύναμος με όλους τους αντιστρέψιμους $n \times n$ πίνακες, αλλά είναι όμοιος μόνο με τον εαυτό του.)
(ii) Η ομοιότητα πινάκων είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathbb{R}^{n\times n}$.
Πράγματι, κάθε πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι όμοιος με τον εαυτό του (καθώς είναι $A = I_n A I_n^{-1}$) και άρα ισχύει η ανακλαστική ιδιότητα.
Επίσης, αν ο A είναι όμοιος με τον B, τότε μπορούμε να γράψουμε $B = PAP^{-1}$ για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα P. Τότε, ο πίνακας P^{-1} είναι επίσης αντιστρέψιμος και $A = P^{-1}BP = P^{-1}B(P^{-1})^{-1}$. Συνεπώς, έπεται ότι ο B είναι όμοιος με τον A (συμμετρική ιδιότητα).
Τέλος, αν ο πίνακας A είναι όμοιος με το B και ο B είναι όμοιος με το C, τότε μπορούμε να γράψουμε $B = PAP^{-1}$ και $C = QBQ^{-1}$, για κάποιους αντιστρέψιμους πίνακες P, Q. Καθώς ο πίνακας QP είναι επίσης αντιστρέψιμος και $C = Q(PAP^{-1})Q^{-1} = QPAP^{-1}Q^{-1} = (QP)A(QP)^{-1}$, συμπεραίνουμε ότι ο A είναι όμοιος με το C (μεταβατικη ιδιότητα).

Πρόταση

Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για δυο πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$:
(i) Οι πίνακες A, B είναι όμοιοι.
(ii) Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ και διατεταγμένες βάσεις $\widehat{u}, \widehat{v}$ του $\mathbb{R}^n$, τέτοιες ώστε $A = (f : \widehat{u}, \widehat{u})$ και $B = (f : \widehat{v}, \widehat{v})$.

Απόδειξη

$(i) \longrightarrow (ii)$: Γράφουμε $B = PAP^{-1}$ για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και επιλέγουμε μια διατεταγμένη βάση $\widehat{u}$ του $\mathbb{R}^n$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ με $(f : \widehat{u}, \widehat{u}) = A$. Γνωρίζουμε επίσης ότι, καθώς ο P^{-1} είναι αντιστρέψιμος, υπάρχει διατεταγμένη βάση $\widehat{v}$ του $\mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε $P^{-1} = (I_{\mathbb{R}^n} : \widehat{v}, \widehat{u})$. Έτσι, είναι $B = PAP^{-1} = (I_{\mathbb{R}^n} : \widehat{u}, \widehat{v})(f : \widehat{u}, \widehat{u})(I_{\mathbb{R}^n} : \widehat{v}, \widehat{u}) = (I_{\mathbb{R}^n} \circ f \circ I_{\mathbb{R}^n} : \widehat{v}, \widehat{v}) = (f : \widehat{v}, \widehat{v})$.
$(ii) \longrightarrow (i)$: Θεωρούμε τον πίνακα αλλαγής βάσης $P = (1_{\mathbb{R}^n} : \widehat{u}, \widehat{v})$ και υπολογίζουμε $PAP^{-1} = (I_{\mathbb{R}^n} : \widehat{u}, \widehat{v})(f : \widehat{u}, \widehat{u})(I_{\mathbb{R}^n} : \widehat{v}, \widehat{u}) = (I_{\mathbb{R}^n} \circ f \circ I_{\mathbb{R}^n} : \widehat{v}, \widehat{v}) = (f : \widehat{v}, \widehat{v}) = B$. Συνεπώς, οι πίνακες A και B είναι πράγματι όμοιοι.