Φυλλάδιο 3.

Άσκηση 1 $\{X_n, n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ με χκ S

Ν.δ.ο οι εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας

$$\sum_{j \in A} \sum_{i \in A^c} \pi_j p_{ji} = \sum_{i \in A^c} \sum_{j \in A} \pi_i p_{ij} \quad , A \subseteq S$$

Είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις πλήρους ισορροπίας

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} \quad , j \in S$$

Λύση

Έστω ότι ισχύουν οι εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας. Τότε για $A = \{j\}$ και $A^c = S \setminus \{j\}$ τότε παίρνουμε

$$\sum_{i \in S \setminus \{j\}} \pi_j p_{ji} = \sum_{i \in S \setminus \{j\}} \pi_i p_{ij} \xrightarrow{+\pi_j p_{jj}}$$

$$\sum_{i \in S} \pi_j p_{ji} = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} \Rightarrow$$

$$\pi_j \underbrace{\sum_{i \in S} p_{ji}}_{1} = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} \Rightarrow$$

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} \quad , j \in S$$

Άρα, προκύπτουν οι εξισώσεις πλήρους ισορροπίας

Έστω ότι ισχύουν οι εξισώσεις πλήρους ισορροπίας.

Δηλαδή, $$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} \quad , \forall j \in S$$

Τότε
$$\pi_j \underbrace{\sum_{i \in S} p_{ji}}_{=1} = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} \Rightarrow$$

$$\sum_{i \in S} \pi_j p_{ji} = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} \quad , \forall j \in S.$$

Αθροίζοντας για $j \in A$, παίρνουμε

$$\sum_{j \in A} \sum_{i \in S} \pi_j p_{ji} = \sum_{j \in A} \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} \Rightarrow$$

$$\sum_{j \in A} \sum_{i \in A} \pi_j p_{ji} + \sum_{j \in A} \sum_{i \in A^c} \pi_j p_{ji} =$$

$$\sum_{j \in A} \sum_{i \in A} \pi_i p_{ij} + \sum_{j \in A} \sum_{i \in A^c} \pi_i p_{ij} \Rightarrow$$

$$\sum_{j \in A} \sum_{i \in A^c} \pi_j p_{ji} = \sum_{i \in A^c} \sum_{j \in A} \pi_i p_{ij} .$$

Οπότε προκύπτουν οι εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας.

Φυλλάδιο 3 -

Άσκηση 2

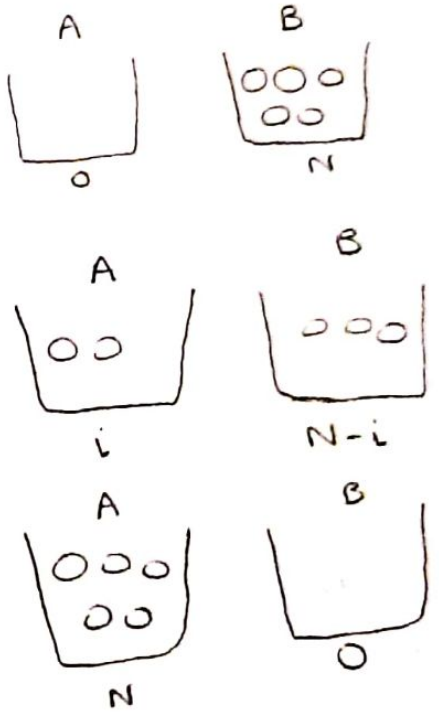
2 κάλπες Α και Β

περιέχουν μαζί N σφαιρίδια

Σε κάθε βήμα επιλέγουμε τυχαία ένα από τα N σφαιρίδια
και το τοποθετούμε στην Α με πιθ. p ή
στην Β με πιθ $q = 1 - p$.

X_n : # σφαιριδίων στην κάλπη Α μετά το n-οστό βήμα

(α) Δείξτε ότι $\{X_n, n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ
Βρείτε τον P



__Λύση__ $S = \{0, 1, \dots, N\}$

$P_{0,0} = 1 \cdot q$

$P_{0,1} = 1 \cdot p$

Για $i \in \{1, \dots, N\}$ $P_{i,i-1} = \frac{i}{N} \cdot q$

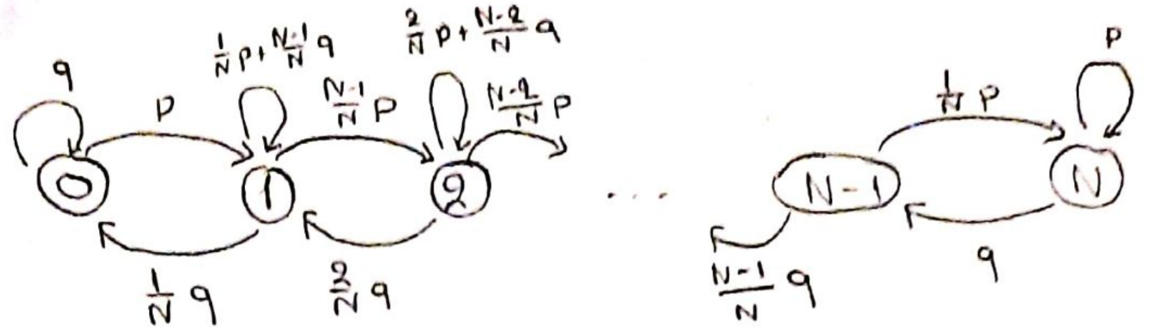
$P_{i,i} = \frac{i}{N} \cdot p + \frac{N-i}{N} \cdot q$

$P_{i,i+1} = \frac{N-i}{N} \cdot p$

$P_{N,N} = 1 \cdot p$

$P_{N,N-1} = 1 \cdot q$

$$P = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & \cdots & N-1 & N \\ \hline 0 & q & p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1q}{N} & \left(\frac{1}{N}p + \frac{N-1}{N}q\right) & \frac{N-1}{N}p & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{2}{N}q & \left(\frac{2}{N}p + \frac{N-2}{N}q\right) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ N-1 & 0 & 0 & 0 & & \left(\frac{N-1}{N}p + \frac{1}{N}q\right) & \frac{1}{N}p \\ N & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & p \end{array}$$



(β) Ν.δ.ο η $\{X_n, n \geq 0\}$ είναι αδιαχώριστη, απεριοδική και θετικά επαναληπτική.

<u>Λύση</u>

Είναι αδιαχώριστη αφού κάθε κατάσταση επικοινωνεί με όλες τις υπόλοιπες

Είναι απεριοδική αφού $p_{ii} > 0 \ \forall i \in S$.

Είναι θετικά επαναληπτική ως αδιαχώριστη και πεπερασμένη

(γ) Να βρείτε τη στάσιμη κατανομή:

<u>Λύση</u>

Εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας:

$$\pi_0 \cdot p = \pi_1 \cdot \frac{1}{N} q$$

$$\pi_1 \frac{N-1}{N} p = \pi_2 \frac{2}{N} q$$

$$\vdots$$

$$\pi_{N-1} \frac{1}{N} p = \pi_N \, q$$

Άρα, για $j \in \{0, \ldots, N-1\}$, $\pi_j \frac{N-j}{N} p = \pi_{j+1} \frac{j+1}{N} q \Rightarrow$

$$\pi_{j+1} = \pi_j \frac{N-j}{j+1} \frac{p}{q}$$

Άρα $\quad \pi_j = \pi_{j-1} \frac{N-(j-1)}{j} \frac{p}{q} \quad , \ j = 1, \ldots, N$

$$\pi_j = \pi_{j-2} \frac{N-(j-2)}{j-1} \frac{p}{q} \frac{N-(j-1)}{j} \frac{p}{q} =$$

$$= \frac{[N-(j-2)][N-(j-1)]}{(j-1) \cdot j} \left(\frac{p}{q}\right)^2 \pi_{j-2} \Rightarrow$$

$$\pi_j = \frac{[N-(j-3)][N-(j-2)][N-(j-1)]}{(j-2)(j-1)j}\left(\frac{p}{q}\right)^3 \pi_{j-3} = \cdots$$

$$= \frac{N(N-1)\cdots(N-j+1)}{1\cdot 2\cdots j}\left(\frac{p}{q}\right)^j \pi_0 \Rightarrow$$

$$\pi_j = \frac{N!}{(N-j)!\,j!}\left(\frac{p}{q}\right)^j \pi_0 \Rightarrow$$

$$\pi_j = \binom{N}{j}\left(\frac{p}{q}\right)^j \pi_0 \qquad , j=1,2,\ldots,N$$

Εξίσωση κανονικοποίησης:

$$\sum_{j=0}^{N} \pi_j = 1 \Rightarrow \pi_0 \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j}\left(\frac{p}{q}\right)^j = 1 \Rightarrow$$

$$\pi_0 \left(\frac{p}{q}+1\right)^N = 1 \Rightarrow$$

$$\pi_0 = \left(\frac{q}{p+q}\right)^N \Rightarrow$$

$$\pi_0 = q^N$$

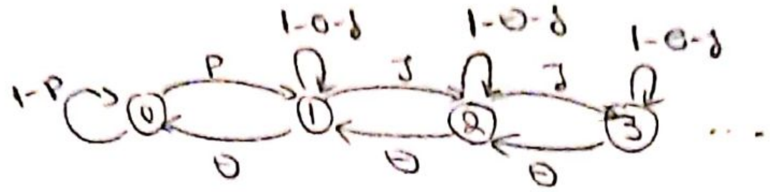
Άρα $\pi_j = \binom{N}{j}\left(\frac{p}{q}\right)^j q^N \Rightarrow$

$$\pi_j = \binom{N}{j} p^j q^{N-j} \quad , j = 0,1,\ldots,N.$$

(5) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} 1\{X_k=i\}}{n} = , \overset{\text{λύση}}{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} 1\{X_k=i\}}{n} = \pi_i = \binom{N}{i} p^i q^{N-i}$$

Scanned with CamScanner

Φυλλάδιο 3 -
Άσκηση 3



Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη
Έχουμε δείξει ότι

- αν $\frac{\theta}{\delta} \geq 1 \iff \theta \geq \delta$, $h_i(\{0\}) = 1, \forall i \geq 1$.
- αν $\frac{\theta}{\delta} < 1 \iff \theta < \delta$, $h_i(\{0\}) = \left(\frac{\theta}{\delta}\right)^i < 1, \forall i \geq 1$

Έχουμε $h_0 = P(T_0 < \infty \mid X_0 = i) = (1-p)\underbrace{h_0(\{0\})}_{=1} + p\, h_1(\{0\})$.

Οπότε, αν $\frac{\theta}{\delta} \geq 1$, $h_0 = 1 - p + p\, 1 = 1 \Rightarrow$
0 επαναληπτική $\Rightarrow$
i επαναληπτική $\forall i \in \mathbb{N}$

Αν $\frac{\theta}{\delta} < 1$, $h_0 = 1 - p + p\frac{\theta}{\delta} < 1 \Rightarrow$
0 παροδική $\Rightarrow$
i παροδική $\forall i \in \mathbb{N}$.

Θα βρούμε τώρα πότε είναι θετικά επαναληπτική, δηλαδή πότε έχει στάσιμη κατανομή
Αν $A_j = \{0,1,2,\dots,j\}$ γράφουμε τις εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας για A_j, $j = 0,1,2,\dots$

A_0: $\pi_0 p = \pi_1 \theta \Rightarrow \pi_1 = \frac{p}{\theta}\pi_0$

A_1: $\pi_1 \delta = \pi_2 \theta \Rightarrow \pi_2 = \frac{\delta}{\theta}\pi_1 = \frac{\delta}{\theta}\frac{p}{\theta}\pi_0$

A_2: $\pi_2 \delta = \pi_3 \theta \Rightarrow \pi_3 = \frac{\delta}{\theta}\pi_2 = \left(\frac{\delta}{\theta}\right)^2 \frac{p}{\theta}\pi_0$

$\vdots$

A_{j-1}: $\pi_{j-1}\delta = \pi_j \theta \Rightarrow \pi_j = \frac{\delta}{\theta}\pi_{j-1} = \dots = \left(\frac{\delta}{\theta}\right)^{j-1}\frac{p}{\theta}\pi_0$

Άρα $\pi_j = \left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^{j-1} \frac{\rho}{\theta} \pi_0$, $j \geq 1$

Εξίσωση κανονικοποίησης:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1 \Rightarrow \pi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^{j-1} \frac{\rho}{\theta} \pi_0 = 1 \Rightarrow$$

$$\pi_0 \left(1 + \frac{\rho}{\theta} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^{j} \right) = 1$$

Αν $\frac{\lambda}{\theta} < 1 \Leftrightarrow \lambda < \theta$, τότε $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^{j} = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\theta}} = \frac{\theta}{\theta - \lambda} < \infty$

και $\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{\theta} \frac{\theta}{\theta - \lambda}} = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{\theta - \lambda}}$

$$\pi_j = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{\theta - \lambda}} \frac{\rho}{\theta} \left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^{j-1} , \quad j \geq 1$$

η στάσιμη κατανομή

Άρα, αν $\lambda < \theta$, η αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική

Αν $\frac{\lambda}{\theta} \geq 1 \Leftrightarrow \lambda \geq \theta$, τότε $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^{j} = \infty$

άρα $\pi_j = 0 \quad \forall j \geq 0$.

Δεν υπάρχει στάσιμη και η αλυσίδα δεν είναι θετικά επαναληπτική

Τελικά,

$\lambda < \theta \Leftrightarrow$ θετικά επαναληπτική

$\lambda = \theta \Leftrightarrow$ μηδενικά επαναληπτική

$\lambda > \theta \Leftrightarrow$ παροδική

Φυλλάδιο 3 -

Άσκηση 4

$\{X_n, n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ. $S = \{0,1,2,\dots\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P με

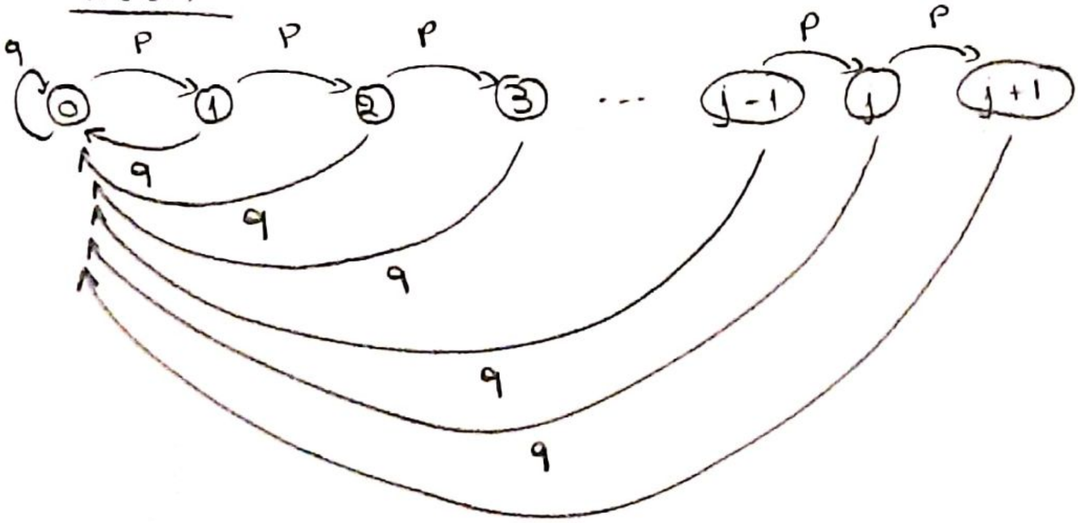
$$p_{ij} = \begin{cases} q & , j=0 \\ p & , j=i+1 \\ 0 & , \text{διαφ.} \end{cases} \quad , i \geq 0 .$$

όπου $p > 0$ και $q = 1-p > 0$.

(α) Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η $\{X_n, n \geq 0\}$ να είναι θετικά επαναληπτική

(β) Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή.

Λύση



Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη.

Εξισώσεις πλήρους ισορροπίας.

$$\pi_0 (q+p) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \cdot q \Rightarrow \pi_0 = q \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j}_{=1 \text{ (από εξ. του)}} \Rightarrow \pi_0 = q$$

$$\pi_1 (p+q) = \pi_0 \cdot p \Rightarrow \pi_1 = pq$$

$$\pi_2 (p+q) = \pi_1 \cdot p \Rightarrow \pi_2 = p^2 q$$

$$\pi_3 (p+q) = \pi_2 \, p \Rightarrow \pi_3 = p^3 q$$

$$\pi_j (p+q) = \pi_{j-1} \, p \Rightarrow \pi_j = p^j q$$

Άρα $\pi_j = p^j q$, $j \geq 0$

Από την εξίσωση κανονικοποίησης παίρνουμε

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} p^j q = 1 \Rightarrow$$

$p \in (0,1)$

$$q \frac{1}{1-p} = 1 \Rightarrow$$

$$p \frac{1}{p} = 1$$ ✓

Άρα, η αλυσίδα έχει πάντα στάσιμη κατανομή και είναι θετικά επαναληπτική.

Η στάσιμη κατανομή είναι

$$\pi_j = p^j q \quad , \; j = 0, 1, 2, \dots$$

Φυλλάδιο 3-

Άσκηση 5

(και π μ P)

Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ ΜΑΔΧ με αριθμήσιμο χ.κ. S. Έστω διατεταγμένο $A \subseteq S \setminus \{0\}$. Έστω f_A η πιθανότητα η $\{X_n, n\geq 0\}$ να επισκεφθεί κάθε κατάσταση του A πριν επισκεφθεί την 0 για $1^{η}$ φορά. Να γράψετε το σύνολο εξισώσεων για τον υπολογισμό της πιθανότητας f_A

Λύση

Έστω Y_n το υποσύνολο του A που έχει επισκεφθεί η αλυσίδα μέχρι το n-οστό βήμα. Η $\{(X_n, Y_n), n\geq 0\}$ είναι ΜΑΔΧ. Θεωρούμε ότι η παραπάνω ΜΑΔΧ απορροφάται όταν επισκεφθεί κατάσταση με $X_n = 0$ ή $Y_n = A$. Δηλαδή,

Οι πιθ. μετάβασης της νέας ΜΑΔΧ είναι

$$P(X_{n+1} = i, Y_{n+1} = B \mid X_n = i, Y_n = B) = 1 \quad \text{αν } i = 0 \text{ ή } B = A$$

Διαφορετικά,

$$P(X_{n+1} = j, Y_{n+1} = C \mid X_n = i, Y_n = B) = p_{ij}$$

με $C = B \cup \{j\}$ αν $j \in A - B$

και $C = B$ αν $j \notin A - B$.

Για $B \subseteq A$ και $i \geq 1$, συμβολίζουμε με $p(i,B)$ την πιθανότητα να απορροφηθεί η αλυσίδα σε κατάσταση με $Y_n = A$ ξεκινώντας από την (i,B). Κάνοντας ανάλυση $1^{ου}$ βήματος

$$p(i,B) = \sum_{j \in A-B} p_{ij}\, p(j, B\cup\{j\}) + \sum_{j\neq 0,\, j\notin A-B} p_{ij}\, p(j,B).$$

$$p(i,A) = 1$$

Τελικά, αν $\pi^{(0)}$ είναι η αρχική κατανομή

$$f_A = \sum_{i\in A} \pi^{(0)}(i)\, p(i,\{i\}) + \sum_{\substack{i\notin A \\ i\neq 0}} \pi^{(0)}(i)\, p(i,\{\ \}) + \pi^{(0)}(0)\cdot 0$$