Άσκηση 1.

$\{N(t), t \geq 0\}$ RP με $X_n, n \geq 1$ που έχουν σ.π.π. $g(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}, t \geq 0$

Να υπολογίσετε την $P(N(t)=k)$, $k=0,1,2,\dots$

Λύση

$X_n \sim Erlang(2,\lambda)$

Άρα, $X_n = Y_{1,n} + Y_{2,n}$ με $Y_{1,n}, Y_{2,n}$ ανεξ. $Exp(\lambda)$, $n=1,2,\dots$

Οπότε, $S_K = X_1 + X_2 + \dots + X_K$

$$= Y_{1,1} + Y_{2,1} + Y_{1,2} + Y_{2,2} + \dots + Y_{1,k} + Y_{2,k} \sim Erlang(2k,\lambda)$$

$$G_k(t) = 1 - \sum_{r=0}^{2k-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^r}{r!}, \quad t>0, \quad k=1,2,\dots$$

Άρα, $P(N(t)=k) = G_k(t) - G_{k+1}(t)$

$$= \cancel{1} - \sum_{r=0}^{2k-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^r}{r!} - \left(\cancel{1} - \sum_{r=0}^{2(k+1)-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^r}{r!}\right)$$

$$= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!} + e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Άσκηση 2. Βρες ανανεωτική εξίσωση για $E[S_{N(t)+k}]$, $k \geq 1$ και λύσε την

Λύση

Έστω

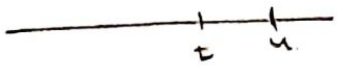
χρόνος μέχρι το k-οστό γεγονός μετά την στιγμή t

$$H(t) = E[S_{N(t)+k}] = \int_0^\infty E[S_{N(t)+k} \mid S_1 = u]\, dG(u).$$

Αν $u < t$

$$E[S_{N(t)+k} \mid S_1 = u] = u + E[S_{N(t-u)+k}] = u + H(t-u)$$

Αν $u > t$



$$E[S_{N(t)+k} \mid S_1 = u] = u + E[S_{k-1}] = u + (k-1)\tau$$

Οπότε

$$H(t) = \int_0^t (u + H(t-u))\, dG(u) + \int_t^\infty (u + (k-1)\tau)\, dG(u)$$

$$= \int_0^t u\, dG(u) + \int_0^t H(t-u)\, dG(u) + \int_t^\infty u\, dG(u) + \int_t^\infty (k-1)\tau\, dG(u)$$

$$= \int_0^\infty u\, dG(u) + (H * G)(t) + (k-1)\tau \int_t^\infty dG(u)$$

$$= \tau + (H * G)(t) + (k-1)\tau\, [G(u)]_t^\infty$$

$$= \tau + (H * G)(t) + (k-1)\tau(1 - G(t))$$

Παίρνουμε LSTs

$$\tilde{H}(s) = \tau + \tilde{H}(s)\tilde{G}(s) + (k-1)\tau(1 - \tilde{G}(s)) \Rightarrow$$

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tau + (k-1)\tau(1 - \tilde{G}(s))}{1 - \tilde{G}(s)} \Rightarrow$$

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tau \tilde{G}(s) + k\tau (1 - \tilde{G}(s))}{1 - \tilde{G}(s)} \Rightarrow$$

$$\tilde{H}(s) = \tau \tilde{M}(s) + k\tau$$

Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό παίρνουμε

$$H(t) = \tau M(t) + k\tau \Rightarrow$$

$$E[S_{N(t)+k}] = \tau [E[N(t)] + k]$$

Ασκηση 3

Θεωρούμε τη διαδικασία $\{N_p(t), t \geq 0\}$ που δημιουργείται ως εξής: κάθε γεγονός της αρχικής διαδικασίας $\{N(t), t \geq 0\}$ καταγράφεται με πιθανότητα p ή αγνοείται με πιθανότητα $1-p$, ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο και $N_p(t)$ είναι ο αριθμος καταγεγραμμένων γεγονοτων μεχρι τη στιγμή t

Είναι η $\{N_p(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία;

Να υπολογιστεί ο LST της $M_p(t) = E[N_p(t)]$ συναρτήσει του $\tilde{G}(s)$ και του p.

<u>Λύση</u>

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ οι ενδιάμεσοι χρόνοι γεγονότων της $\{N(t), t \geq 0\}$. Οι $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με συνάρτηση κατανομής $G(t)$.

Έστω $X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3,p}, \ldots$ οι ενδιάμεσοι χρόνοι γεγονότων της $\{N_p(t), t \geq 0\}$.

$X_{i,p}$ είναι ο χρόνος μέχρι να καταγραφεί ένα γεγονός της $\{N(t), t \geq 0\}$ όταν κάθε γεγονός καταγράφεται με πιθ. p ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο.

Άρα $X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3,p}, \ldots$ ανεξάρτητες & ισόνομες τ.μ.

$\Rightarrow$ $\{N_p(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία.

Για να βρούμε τον LST της $M_p(t)$, $\tilde{M}_p(s)$, θα υπολογίσουμε τον LST των $X_{i,p}$, $\tilde{G}_p(s)$, και θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\tilde{M}_p(s) = \frac{\tilde{G}_p(s)}{1-\tilde{G}_p(s)}$.

Υπολογισμός $\tilde{G}_p(s)$: α' τρόπος

$$X_{i,p} = \sum_{n=1}^{N} x_n \quad , \text{οπου} \quad N \sim Geom(p)$$

$$f_N(n) = (1-p)^{n-1} p \quad , n = 1, 2, \ldots$$

$$P_N(t) = E[t^N] = \frac{tp}{1-(1-p)t}$$

↳ πιθανογεννήτρια της γεωμετρικης

Ο LST της $X_{i,p}$ είναι

$$\tilde{G}_p(s) = P_N(\tilde{G}(s)) = \frac{p\,\tilde{G}(s)}{1-(1-p)\tilde{G}(s)}$$

Οπότε ο LST της $\tilde{M}_p(s)$ είναι

$$\tilde{M}_p(s) = \frac{\tilde{G}_p(s)}{1-\tilde{G}_p(s)} \Rightarrow$$

$$\tilde{M}_p(s) = \frac{\dfrac{p\,\tilde{G}(s)}{1-(1-p)\tilde{G}(s)}}{1 - \dfrac{p\,\tilde{G}(s)}{1-(1-p)\tilde{G}(s)}} \Rightarrow$$

$$\tilde{M}_p(s) = p\,\frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} \Rightarrow$$

$$\frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} = \tilde{M}(s)$$

$$\tilde{M}_p(s) = p\,\tilde{M}(s)$$

Scanned with CamScanner

Υπολογισμος $\tilde{G}_p(s)$: β' τροπος

Εστω $G_p(t)$ η συνάρτηση κατανομης των $X_{1,p}, X_{2,p}, \dots$

Εχουμε $G_p(t) = P(X_{1,p} \le t)$. Δεσμεύουμε ως προς τον χρονο $1^{ου}$ γεγονότος της $\{N(t), t \ge 0\}$.

$$G_p(t) = P(X_{1,p} \le t) = \int_0^\infty P(X_{1,p} \le t \mid X_1 = u)\, dG(u).$$

Αν $u > t$,

$$P(X_{1,p} \le t \mid X_1 = u) = 0$$

Αν $u \le t$,

$$P(X_{1,p} \le t \mid X_1 = u) \overset{\text{ΘΟΠ}}{=}$$

$$P(X_{1,p} \le t \mid X_1 = u, \text{καταγράφηκε}) \cdot P(\text{καταγράφηκε}) +$$

$$P(X_{1,p} \le t \mid X_1 = u, \text{δεν καταγρ})\, P(\text{δεν καταγρ}) =$$

$$1 \cdot p + P(X_{1,p} \le t-u)(1-p)$$

Οπότε,
$$G_p(t) = \int_0^t [p + P(X_{1,p} \le t-u)(1-p)]\, dG(u) \Rightarrow$$

$$G_p(t) = p\,G(t) + (1-p)\int_0^t G_p(t-u)\, dG(u) \Rightarrow$$

$$G_p(t) = p\,G(t) + (1-p)(G_p * G)(t)$$

Παίρνουμε LST

$$\tilde{G}_p(s) = p\,\tilde{G}(s) + (1-p)\tilde{G}_p(s) \cdot \tilde{G}(s) \Rightarrow$$

$$\tilde{G}_p(s) = \frac{p\,\tilde{G}(s)}{1-(1-p)\tilde{G}(s)}$$

Οπότε
$$\tilde{M}_p(s) = \frac{\tilde{G}_p(s)}{1-\tilde{G}_p(s)} = \cdots = p\,\tilde{M}(s)$$

Άσκηση 4

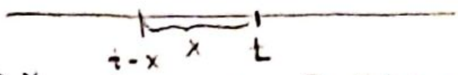
Να βρεθεί ανανεωτική εξίσωση για $P(A(t) \le x)$

Να βρεθεί η $\lim_{t \to \infty} P(A(t) \le x)$

Λύση

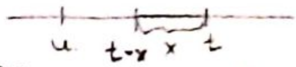
Έστω $H(t) = P(A(t) \le x)$

$$H(t) = \int_0^\infty P(A(t) \le x \mid S_1 = u)\, dG(u)$$



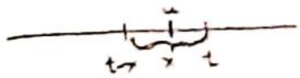
Περ. 1: Αν $t > x$, έχουμε 3 περιπτώσεις:

Αν $0 \le u < t-x$,



$$P(A(t) \le x \mid S_1 = u) = P(A(t-u) \le x) = H(t-u)$$

Αν $t-x \le u < t$,



$$P(A(t) \le x \mid S_1 = u) = 1$$

Αν $u \ge t$,

$$P(A(t) \le x \mid S_1 = u) = 0$$

Άρα

$$H(t) = \int_0^{t-x} H(t-u)\, dG(u) + \int_{t-x}^{t} 1\, dG(u) + \int_t^\infty 0\, dG(u)$$

$$= \int_0^t H(t-u)\, dG(u) + \int_{t-x}^{t} \underbrace{\left(1 - P(A(t-u) \le x)\right)}_{= P(A(t-u) > x) \text{ για } u \in [t-x, t] \; = 0} dG(u)$$

$$\Rightarrow H(t) = \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$$

Περ 2

Αν $t \le x$, $H(t) = 1$ και για να προκύψει ανανεωτική εξίσωση μπορούμε να γράψουμε

$$H(t) = 1 = \int_0^\infty 1 \, dG(u) \Rightarrow$$

$$H(t) = \int_0^t \underset{\substack{\| \\ H(t-u)}}{1} \, dG(u) + \underbrace{\int_t^\infty 1 \, dG(u)}_{\substack{\| \\ 1-G(t)}} \Rightarrow$$

$$H(t) = 1 - G(t) + \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$$

Οπότε, γενικά

$$H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$$

με $$D(t) = \begin{cases} 1 - G(t), & t \le x \\ 0, & t > x \end{cases}$$

Η $D(t)$ είναι μονότονη & φραγμένη και

$$\int_0^\infty D(t)\,dt = \int_0^x (1 - G(t))\,dt < \infty$$

Οπότε

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^x (1 - G(t))\,dt$$

Άσκηση 5. Φυλλάδιο 2

$\{N(t), t\geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία

Εφαρμόστε ανανεωτικό επιχείρημα στην $P(N(t)$ περιττός$)$

Είναι η εξίσωση που προκύπτει ανανεωτική;

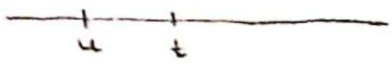
Να λυθεί η εξίσωση αν η $\{N(t), t\geq 0\}$ είναι $PP(\lambda)$

Λύση

Έστω $H(t) = P(N(t)$ περιττός$)$. Εφαρμόζουμε ανανεωτικό επιχείρημα

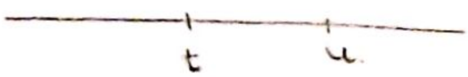
$$H(t) = \int_0^\infty P(N(t) \text{ περιττός} \mid X_1 = u)\, dG(u)$$

Αν $u \leq t$,



$$P(N(t) \text{ περιττός} \mid X_1 = u) =$$
$$P(N(t-u) \text{ άρτιος} \mid X_1 = u) =$$
$$1 - P(N(t-u) \text{ περιττός} \mid X_1 = u) =$$
$$1 - H(t-u)$$

Αν $u > t$,



$$P(N(t) \text{ περιττός} \mid X_1 = u) = 0$$

Άρα $$H(t) = \int_0^t (1 - H(t-u))\, dG(u) + \int_t^\infty 0\, dG(u) \Rightarrow$$

$$H(t) = \int_0^t 1\, dG(u) - \int_0^t H(t-u)\, dG(u) \Rightarrow$$

$$H(t) = \int_0^t 1\, dG(u) - \int_0^t H(t-u)\, dG(u) \Rightarrow$$

$$H(t) = G(t) - (H * G)(t) \qquad (1)$$

Η εξισωση δεν ειναι ανανεωτικη.

Αν η $\{N(t), t \geq 0\}$ ειναι $PP(\lambda)$, $\tilde{G}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$

Παιρνοντας LST στην (1), έχουμε

$$\tilde{H}(s) = \tilde{G}(s) - \tilde{H}(s) \cdot \tilde{G}(s) \Rightarrow$$

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1 + \tilde{G}(s)} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda+s}}{1 + \frac{\lambda}{\lambda+s}} = \frac{\lambda}{2\lambda + s} \Rightarrow$$

$$\tilde{H}(s) = \frac{1}{2} \frac{2\lambda}{2\lambda + s} \Rightarrow$$

$$H(t) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\lambda t}\right)$$

Άσκηση 6- Φυλλάδιο 2

$\{N(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική εξίσωση

$H(t) = E[N^2(t)]$, $t \geq 0$

(i) Να βρεθεί ανανεωτική εξίσωση για την $H(t)$.

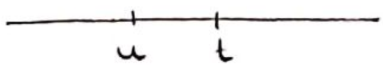
(ii) Ν.δ.ο $\quad H(t) = M(t) + 2\int_0^t M(t-u)\, dM(u)$

<u>Λύση</u>

(i) $H(t) = E[N^2(t)]$. Δεσμεύουμε ως προς τον χρόνο 1ου γεγονότος.

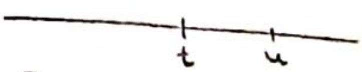
$$H(t) = E[N^2(t)] = \int_0^\infty E[N^2(t) \mid X_1 = u]\, dG(u)$$

Αν $\quad u \leq t$,



$$E[N^2(t) \mid X_1 = u] = E[(1 + N(t-u))^2] =$$
$$1 + 2E[N(t-u)] + E[N^2(t-u)] =$$
$$1 + 2M(t-u) + H(t-u)$$

Αν $\quad u > t$



$$E[N^2(t) \mid X_1 = u] = 0$$

Οπότε, $\quad H(t) = \int_0^t (1 + 2M(t-u) + H(t-u))\, dG(u) + \int_t^\infty 0\, dG(u)$

$$= \underbrace{\int_0^t 1\, dG(u)}_{G(t)} + 2\underbrace{\int_0^t M(t-u)\, dG(u)}_{(M*G)(t)} + (H*G)(t)$$

$$\Rightarrow H(t) = G(t) + 2(M*G)(t) + (H*G)(t)$$

$$\xRightarrow{M(t) = G(t) + (M*G)(t)} \quad H(t) = G(t) + 2M(t) - 2G(t) + (H*G)(t)$$

$$\Rightarrow H(t) = 2M(t) - G(t) + (H * G)(t)$$

Ανανεωτική εξίσωση με $D(t) = 2M(t) - G(t)$

ii) Λύση ανανεωτικής εξίσωσης

$$H(t) = 2M(t) - G(t) + \int_0^t \left[2M(t-u) - G(t-u)\right] dM(u) \Rightarrow$$

$$H(t) = 2M(t) - G(t) + 2\int_0^t M(t-u)\, dM(u) - (G * M)(t) \Rightarrow$$

$$H(t) = 2M(t) \cancel{- G(t)} - M(t) + G(t) + 2\int_0^t M(t-u)\, dM(u) \Rightarrow$$

$$H(t) = M(t) + 2\int_0^t M(t-u)\, dM(u).$$