Στοχαστικές Ανελίξεις
Ασκήσεις στις Μαρκοβιανές Αλυσίδες Διακριτού Χρόνου

Άσκηση 1. Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ μία Μ.Α.Δ.Χ με αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων S. Να δείξετε ότι οι εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας

$$\sum_{j \in A} \sum_{i \in A^C} \pi_j p_{ji} = \sum_{i \in A^C} \sum_{j \in A} \pi_i p_{ij},\ A \subseteq S$$

είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις πλήρους ισορροπίας

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij},\ j \in S.$$

Να δώσετε μια διαισθητική ερμηνεία για τις εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας.

Άσκηση 2. Θεωρούμε 2 κάλπες: Α και Β. Οι δύο κάλπες μαζί περιέχουν N σφαιρίδια. Σε κάθε βήμα κάνουμε το εξής πείραμα τύχης: Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα N σφαιρίδια και το τοποθετούμε στην κάλπη Α με πιθανότητα p ή στην κάλπη Β με πιθανότητα $q = 1 - p$, ανεξάρτητα από που το πήραμε. Έστω X_n είναι ο αριθμός σφαιριδίων στην κάλπη Α μετά το n-οστό βήμα.
(α) Να δείξετε ότι η $\{X_n, n \geq 0\}$ είναι Μ.Α.Δ.Χ και να βρεθεί ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης P.
(β) Να δείξετε ότι η $\{X_n, n \geq 0\}$ είναι αδιαχώριστη, απεριοδική και θετικά επαναληπτική.
(γ) Να βρείτε τη στάσιμη κατανομή.
(δ) Να βρείτε το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που υπάρχουν i σφαιρίδια στην κάλπη Α, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$.

Άσκηση 3. Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ μία Μ.Α.Δ.Χ με χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P με

$$p_{0j} = \begin{cases} 1-p & ,j=0, \\ p & ,j=1, \\ 0 & ,\text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και

$$p_{ij} = \begin{cases} \theta & ,j=i-1, \\ 1-\theta-\zeta & ,j=i, \\ \zeta & ,j=i+1, \\ 0 & ,\text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

για $i \geq 1$, όπου $p, \theta, \zeta, 1-\theta-\zeta \in (0,1)$.
Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε η $\{X_n, n \geq 0\}$ να είναι θετικά επαναληπτική, μηδενικά επαναληπτική και παροδική. Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή όταν υπάρχει.

Άσκηση 4. Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ μία Μ.Α.Δ.Χ με χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P με

$$p_{ij} = \begin{cases} q & ,j=0, \\ p & ,j=i+1, \\ 0 & ,\text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

για $i \geq 0$, όπου $p > 0$ και $q = 1 - p > 0$.
(α) Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η $\{X_n, n \geq 0\}$ να είναι θετικά επαναληπτική.
(β) Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή.

Άσκηση 5. Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ μία Μ.Α.Δ.Χ με αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων S. Έστω $A \subseteq S \setminus \{0\}$. Έστω f_A η πιθανότητα η Μ.Α.Δ.Χ να επισκεφθεί κάθε κατάσταση του συνόλου Α πριν επισκεφθεί την κατάσταση 0 για πρώτη φορά. Να γράψετε ένα σύνολο εξισώσεων για τον υπολογισμό της πιθανότητας f_A.