21/12/22 (22º Μάθημα)

Ερμηνεια των Εξισωσεων Ισορροπιας

ΜΑΣΧ με χωρο καταστασεων S, πιναχ. ρυθμ μετ. Q και στασιμη $p = [p_j]_{j \in S}$

p_j = μακρ. ποσοστο χρονου που περνα στην κατασταση j

q_{ij} = ρυθμος μεταβ. $j \to i$ ανα χρονικη μοναδα παραμονης στην j

$p_j q_{ji}$ = μακρ. ρυθμος μεταβ. $j \to i$

Τοτε $\quad p_j q_j = \sum_{i \neq j} p_i q_{ij}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{j \neq i} p_j q_{ji}}_{\text{μακρ. ρυθμος εξοδου απο την } j} = \underbrace{\sum_{i \neq j} p_i q_{ij}}_{\text{μακρ. ρυθμος εισοδου } j}$$

Εξισωσεις γενικευμενης Ισορροπιας

$\{X(t), t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ με χκ S π.ρ.μ Q και $A \subseteq S$

$$\underbrace{\sum_{j \in A} \sum_{i \notin A} p_j q_{ji}}_{\substack{\text{ρυθμος εξοδου} \\ \text{απο το } A \\ A \ni j \to i \notin A}} = \underbrace{\sum_{i \notin A} \sum_{j \in A} p_i q_{ij}}_{\substack{\text{ρυθμος εισοδου} \\ \text{στο } A \\ i \notin A \to j \in A}}$$

4.6 Αντιστρεψιμοτητα ΜΑΣΧ

Ορισμος (Αντιστροφη ΜΑΣΧ):

Εστω $\{X(t), t \geq 0\}$ αδιαχ ΜΑΣΧ με χκ S
π.ρ.μ Q, στασιμη $P = [P_j]_{j \in S}$
και αρχικη κατασταση την p. Η $\hat{X}(t) = X(t_0 - t)$
λεγεται αντιστροφη της $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$
ως προς t_0. Η $\{\hat{X}(t), t \in \mathbb{R}\}$ ειναι
ΜΑΣΧ με στασιμη $p = [p_j]_{j \in S}$ και
π.ρ.μ $\hat{Q}$ με $\hat{q}_{ij} = \frac{p_j q_{ji}}{p_i}$ $i, j \in S$

Αφου $\underbrace{\hat{p_i q_{ij}}}_{\substack{\text{ρυθμος} \\ i \to j \\ \text{στην } \hat{X}(t)}} = \underbrace{p_j q_{ji}}_{\substack{\text{ρυθμος} \\ j \to i \\ X(t)}}$

Ορισμος (Αντιστρεψιμη ΜΑΣΧ)

Εστω $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ αδιαχωριστη ΜΑΣΧ με
χκ S και π.ρ.μ Q. Εστω $\{\hat{X}(t), t \in \mathbb{R}\}$ η
αντιστροφη της. Η $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ λεγεται
αντιστρεψιμη αν η $\{X(t)\}$ και η $\{\hat{X}(t), t \in \mathbb{R}\}$
ειναι στοχαστικα ισοδυναμες $\Leftrightarrow \hat{q}_{ij} = q_{ij}$
$\forall i, j \in S$ $\Leftrightarrow p_i q_{ij} = p_j q_{ji}$
$\forall i, j \in S$

(Εξισωσεις λεπτομερους ισορροπιας)

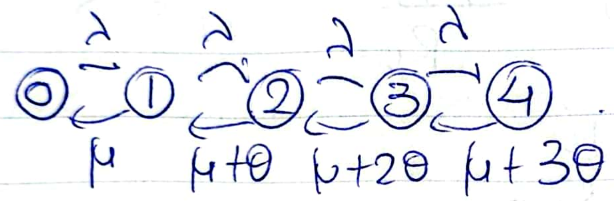
Θεωρημα (Κριτηρια Αντιστρ. Kolmogorov)

Εστω $\{X(t)\}$ ΜΑΣΧ με χκ S και π.ρ.μ Q
Η $\{X(t)\}$ ειναι αντιστρεψιμη ⟺ ∀ κυκλο καταστασεων $i_0, i_1, \dots, i_n, i_0$ ισχύει:

$$q_{i_0 i_1} q_{i_1 i_2} \cdots q_{i_n i_0} = q_{i_0 i_n} q_{i_n i_{n-1}} \cdots q_{i_1 i_0}$$

Φυλλαδιο 4

Ασκηση 1:



γενικευμ.
και λεπτομερως

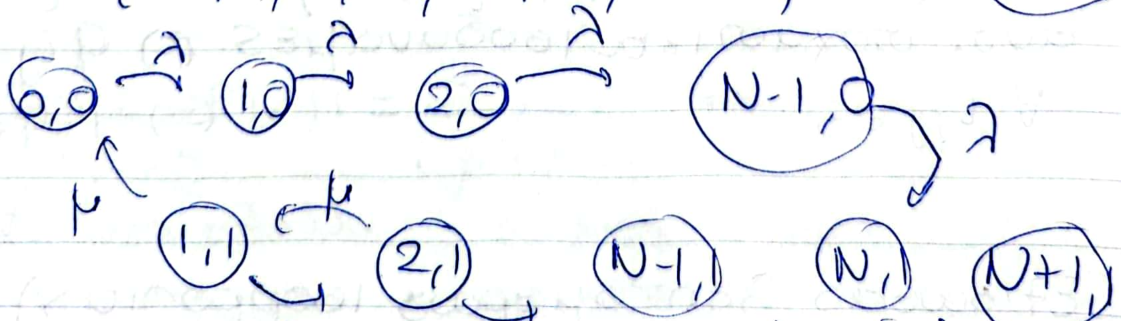
(Αν $\mu = \theta$)

Ασκηση 2: $X(t)$ # πελ στο συστημα

$$I(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν δεν εχει} \\ 1, & \text{αν ετυπ.} \end{cases}$$

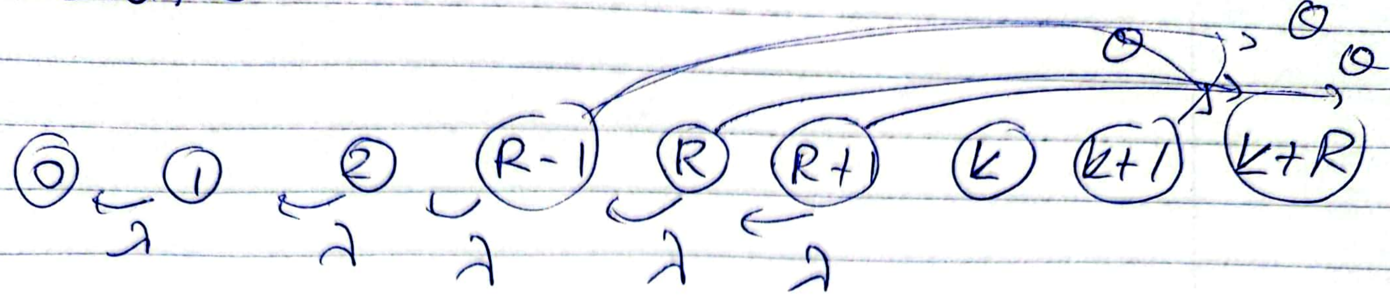
$(X(t), I(t))$

$S = \{(0,0), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1) \dots (N+1, 1)\}$

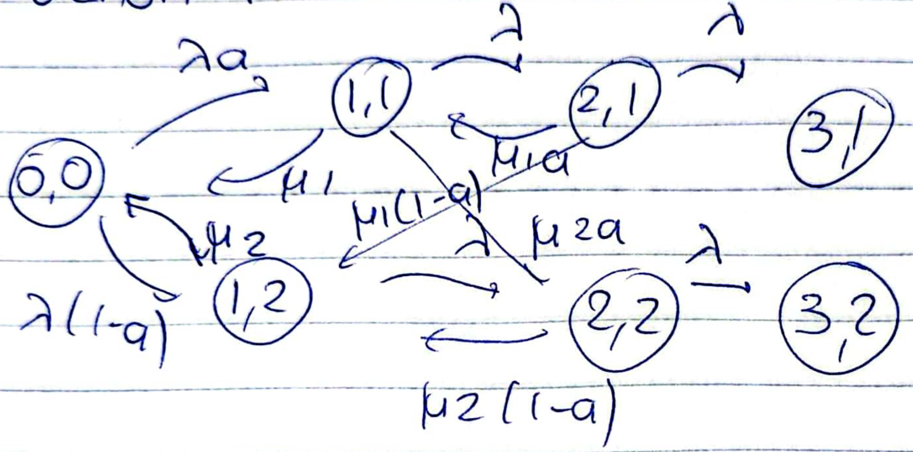


$\lambda P_{N,1} = \mu P_{N+1,1}$

Ασκηση 3:



Ασκηση 4:



Ασκηση 5:

$I(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν ειναι χαλασμ} \\ 1, & \text{αν λειτ.} \end{cases}$

$X(t) =$ αριθμος εργ.

$\{X(t), I(t), t \geq 0\}$ $S = \{(0,0), (0,1), (1,1), (2,1) \ldots\}$