12/12/22 (20º Μάθημα)

Θεώρημα

$$\mathbb{P}'(t) = Q\,\mathbb{P}(t)$$
$$\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\,Q$$

με αρχικη συνθήκη , $\mathbb{P}(0) = I$

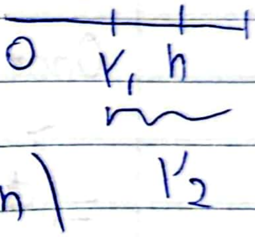
Απόδειξη:

Θελουμε νδο $p_{ij}(h) = \delta_{ij} + q_{ij}h + o(h)$

έχουμε δειξει οτι $P(N(h)=0 \mid X_0=i) = 1 + q_{ii}h + o(h)$
$= 1 - q_i h + o(h)$

$$P(N(h)=1 \mid X_0=i) = P(Y_1 \le h,\ Y_1+Y_2 > h \mid X_0=i) =$$

$$= \int_0^{\infty} P(Y_1 \le h,\ Y_1+Y_2 > h \mid Y_1=s, X_0=i)\, f_{Y_1 \mid X_0=i}(s)\, ds$$



$$= \int_0^{h} P(Y_2 > h-s \mid Y_1=s, X_0=i)\, q_i e^{-q_i s}\, ds$$

(Δεσμευω ως προς την επόμενη κατάσταση)

$$= \sum_{j \ne i} \int_0^{h} \underbrace{P(Y_2 > h-s \mid X_1=j, Y_1=s, X_0=i)}\, P(X_1=j \mid Y_1=s, X_0=i) \cdot q_i e^{-q_i s}\, d$$

$$= \sum_{j \ne i} \int_0^{h} e^{-q_j(h-s)}\, P_{ij}\, q_i e^{-q_i s}\, ds$$

$$= \sum_{j \ne i} e^{-q_j h} P_{ij} q_i \int_0^{h} e^{-(q_i-q_j)s}\, ds$$

$$= \sum_{j \ne i} e^{-q_j h} P_{ij} q_i \left[-\frac{e^{(q_i-q_j)s}}{q_i-q_j} \right]_0^h$$

$$= \sum_{j \ne i} e^{-q_j h} P_{ij} q_i \frac{1 - e^{-(q_i-q_j)h}}{q_i-q_j}$$

$$= \sum_{j \neq i} \frac{P_{ij} q_i}{q_i - q_j} \left(e^{-q_j h} - e^{-q_i h} \right)$$

$$= \sum_{j \neq i} \frac{P_{ij} q_i}{q_i - q_j} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-q_j h)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-q_i h)^k}{k!} \right)$$

$$= \sum_{j \neq i} \frac{P_{ij} q_i}{q_i - q_j} \left(\cancel{1} - q_j h + o(h) - \cancel{1} + q_i h \right)$$

$$= \sum_{j \neq i} \frac{P_{ij} q_i}{q_i - q_j} \left((q_i - q_i) h + o(h) \right)$$

$$= q_i h \cdot 1 + o(h)$$

Onote, $P(N(h) \geq 2 \mid X_0 = i) = 1 - P(N(h) = 0 \mid X_0 = i)$
$- P(N(h) = 1 \mid X_0 = i)$
$= 1 - (1 - q_i h + o(h)) - (q_i h + o(h))$
$= o(h)$

$$P_{ii}(h) = P(X(h) = i \mid X(0) = i)$$
$$= P(X_{N(h)} = i \mid X_0 = i)$$

$$0 = \overset{=1}{P(X_{N(h)} = i \mid X_0 = i, N(h) = 0)}\, P(N(h) = 0 \mid X_0 = i)$$
$$+ P(X_{N(h)} = i \mid X_0 = i, N(h) = 1)\, P(N(h) = 1 \mid X_0 = i)$$
$$+ P(X_{N(h)} = i \mid X_0 = i, N(h) \geq 2)\, \underbrace{P(N(h) \geq 2 \mid X_0 = i)}_{o(h)}$$

$$\Rightarrow p_{ii}(h) = 1(1 + q_{ii} h + o(h)) + o(h)$$
$$p_{ii}(h) = 1 + q_{ii} h + o(h)$$

Για $j \neq i$

$$P_{ij}(h) = P(X(h)=j \mid X(0)=i) = P(X_{N(h)}=j \mid X_0=i)$$

$$\overset{0}{=} \underline{P(X_{N(h)}=j \mid X_0=i, N(h)=0)} \cdot P(N(h)=0 \mid X_0=i)$$

$$p_{ij} \quad + P(X_{N(h)}=j \mid X_0=i, N(h)=1)\, P(N(h)=1 \mid X_0=i)$$

$$+ P(X_{N(h)}=j \mid X_0=i, N(h)\geq 2)\, \underbrace{P(N(h)\geq 2 \mid X_0=i)}_{o(h)}$$

$$P_{ij}(h) = p_{ij}(q_i h + o(h)) + o(h)$$
$$= q_{ij} h + o(h)$$

Άρα, $p_{ij}(h) = \delta_{ij} + q_{ij} h + o(h)$

$$P_{ij}(t+h) = \sum_{k \in S} P_{ik}(h) P_{kj}(t)$$

$$P_{ij}(t+h) = \sum_{k \in S} (\delta_{ik} + q_{ik} h + o(h)) P_{kj}(t)$$

$$P_{ij}(t+h) = \underbrace{\sum_{k \in S} \delta_{ik} P_{kj}(t)}_{P_{ij}(t)} + \sum_{k \in S} q_{ik} p_{kj}(t) h + o(h)$$

$$\frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = \sum_{k \in S} q_{ik} P_{kj}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

$$\overset{h \to 0}{\Rightarrow} \underbrace{P_{ij}'(t)}_{\substack{\text{στοιχειο } (i,j) \\ \text{του } \mathbb{P}'(t)}} = \sum_{k \in S} \underbrace{q_{ik} p_{kj}(t)}_{\substack{i \text{ γραμμη του } q \\ j \text{ στηλη του } \mathbb{P}(t)}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}'(t) = Q\, \mathbb{P}(t)$$

Για να προκυψει η σχεση $\mathbb{P}'(t)=\mathbb{P}(t)Q$
γράφω:

$$P_{ij}(t+h)=\sum_{k\in S} P_{ik}(t)P_{kj}(h)$$

Σημειωση: $\left.\begin{array}{l}\mathbb{P}'(t)=\mathbb{P}(t)Q \\ p(t)=p(0)\,\mathbb{P}(t)\end{array}\right\} \; p'(t)=p(t)Q$

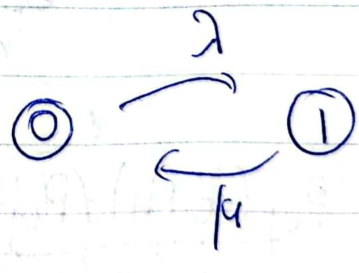
Παραδειγμα: (Μηχανη με 2 καταστασεις)

$\overset{\lambda}{M}/\overset{\mu}{M}/1/1$ ουρα

Μηχανη μπορει να λειτουργει (κατασταση 1)
ή να ειναι χαλασμενη (κατασταση 0)
Αν λειτουργει, ο χρονος ζωης ειναι $Exp(\mu)$
Ο χρονος επιδιορθωσης ειναι $Exp(\lambda)$.
Οι χρονοι ζωης κ' επιδιορθωσεις ειναι ανεξαρτητοι

$$X(t)=\begin{cases}0, & \text{αν δεν λειτουργει}\\ 1, & \text{αν λειτουργει}\end{cases}$$

α) $Q=;$
β) $\mathbb{P}(t)=;$



Λυση:

α)
$$Q=\begin{array}{c|cc} & 0 & 1\\ \hline 0 & -\lambda & \lambda\\ 1 & \mu & -\mu\end{array}$$

β) $\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)Q \Leftrightarrow \begin{bmatrix} P_{00}'(t) & P_{01}'(t) \\ P_{10}'(t) & P_{11}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) \end{bmatrix} \cdot$

$$\cdot \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

$$P_{00}'(t) = -\lambda P_{00}(t) + \mu P_{01}(t) \quad (1)$$

$$P_{01}'(t) = \lambda P_{00}(t) - \mu P_{01}(t) \quad (2)$$

$$P_{10}'(t) = -\lambda P_{10}(t) + \mu P_{11}(t) \quad (3)$$

$$P_{11}'(t) = \lambda P_{10}(t) - \mu P_{01}(t) \quad (4)$$

$$P_{00}(t) + P_{01}(t) = 1 \quad (5)$$

$$P_{10}(t) + P_{11}(t) = 1 \quad (6)$$

$$(1) \overset{(5)}{\Rightarrow} P_{00}'(t) = -\lambda P_{00}(t) + \mu(1 - P_{00}(t)) \Rightarrow$$

$$P_{00}'(t) = -(\lambda+\mu) P_{00}(t) + \mu \Rightarrow$$

$$P_{00}'(t) + (\lambda+\mu) P_{00}(t) = \mu \Rightarrow$$

$$e^{(\lambda+\mu)t} P_{00}'(t) + (\lambda+\mu) e^{(\lambda+\mu)t} P_{00}(t) = \mu \cdot e^{(\lambda+\mu)t} \Rightarrow$$

$$\left(e^{(\lambda+\mu)t} P_{00}(t)\right)' = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{(\lambda+\mu)t}\right)'$$

$$e^{(\lambda+\mu)t} P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{(\lambda+\mu)t} + c$$

Όμως, $P_{00}(0) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + c \Rightarrow$

$$c = 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}$$

Άρα $P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$

$$(5) \Rightarrow P_{01}(t) = 1 - P_{00}(t)$$
$$= 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$
$$\Rightarrow P_{01}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Ομοίως, $(3) \overset{(6)}{\Rightarrow} P_{10}(t) = \ldots = \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$

$$(6) \Rightarrow P_{11}(t) = \ldots = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Παράδειγμα : 2 (Διαδικασία Poisson
Διαδικασία Γέννησης)

$$0 \xrightarrow{\lambda} 1 \xrightarrow{\lambda} 2 \xrightarrow{\lambda} 3 \xrightarrow{\lambda}$$

$X(t)$ #γεγονότων στο $(0,t]$

$$Q = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} & \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \cdots \\ & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$E[X(t)] = \sum_{j=0}^{\infty} j P(X(t) = j) = \sum_{j=0}^{\infty} j p_j(t)$$

$p(t)$

Λύση : $p'(t) = p(t)Q$

$$[p_0'(t)\ p_1'(t) \ldots] = [p_0(t)\ p_1(t)\ p_2(t)] \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow p_0'(t) = -\lambda P_0(t) \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} p_1'(t) &= \lambda P_0(t) - \lambda P_1(t) \\ P_2'(t) &= \lambda P_1(t) - \lambda P_2(t) \\ &\vdots \end{aligned}\right\}$$

για $j \geq 1$

$$\Rightarrow P_j'(t) = \lambda P_{j-1}(t) - \lambda P_j(t) \quad (2)$$

Πολ/ζω την (1)x0 και την (2) για j x j και προσθέτω για $j \in \{0,1,2 \ldots\}$

$$\sum_{j=0} jP_j'(t) = -\lambda \sum_{j=0}^{\infty} jP_j(t) + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} jP_{j-1}(t)$$

$$\frac{d}{dt} E[X(t)] = -\lambda E[X(t) + \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)P_j(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} E[X(t)] = -\lambda E[\cancel{X}(t)] + \lambda E[\cancel{X}(t)] + \lambda \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} P_j(t)}_{1}$$

$$\frac{d}{dt} E[X(t)] = \lambda$$

$$E[X(t)] = \lambda t + c$$

Όμως, $E[X(0)] = 0$

$$\Rightarrow c = 0$$

Οποτε $E[X(t)] = \lambda t$

19/12/22 (21ο Μάθημα)

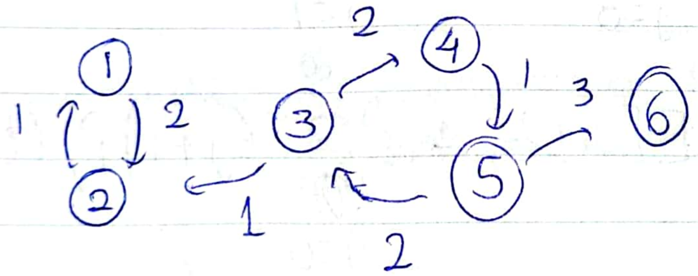
Προσπελασιμότητα / Επικοινωνία Καταστάσεων

Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ με χ.κ S και πινακα ρυθμών μετάβασης Q

Ορισμοί:

- Η $j \in S$ ειναι προσπελάσιμη από την $i \in S$ αν $p_{ij}(t) > 0$ για καποιο $t \geq 0$
$\Leftrightarrow \exists\, i_1, i_2, \dots i_n \in S: q_{ii_1} q_{i_1 i_2} \dots q_{i_n j} > 0$
Τότε γράφουμε $i \to j$

Παράδειγμα:



$4 \to 1$, $1 \not\to 4$
$3 \to 4$, $4 \to 3 \Rightarrow 4 \leftrightarrow 3$

- Οι $i, j \in S$ επικοινωνουν αν $i \to j$ και $j \to i$
Τότε γραφουμε $i \leftrightarrow j$
Η $\leftrightarrow$ ειναι σχεση ισοδυναμιας. Το S χωρίζεται σε κλάσεις επικοινωνιας
πχ $\{1,2\}, \{3,4,5\}, \{6\}$

- Μια κλάση επικοινωνιας C ειναι κλειστη αν $\forall i \in C$ και $j \in S \setminus C$ $q_{ij} = 0$

πχ $\{1,2\}$ κλειστη, $\{3,4,5\}$ ανοιχτη, $\{6\}$ κλειστη

· Μια κλαση C ειναι ανοιχτη, αν δεν ειναι κλειστή

· Η ΜΑΣΧ ονομαζεται αδιαχωριστη, αν ολες οι καταστασεις επικοινωνουν

· Η $j \in S$ ονομάζεται απορροφητικη αν η $\{j\}$ αποτελει κλειστη κλαση επικοινωνιας

πχ $\{6\}$ απορροφητική

Πιθανότητες και χρονοι $1^{ης}$ εισοδου:
Εστω $\{X(t), t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ με χκ S και πινακα ρυθμων μετ. Q. Αν $C \subseteq S$ οριζουμε:

- $\tau_C = \inf\{t \geq 0 : X(t) \in C\}$ χρονοι $1^{ης}$ εισοδου
- $h_i(C) = P(\tau_C < \infty \mid X(0) = i)$ πιθανοτητα $1^{ης}$ εισοδου ξεκινωντας απο την $i \in S$
- $m_i(C) = E[\tau_C \mid X(0) = i]$: μεσοι χρονοι $1^{ης}$ εισοδου ξεκινωντας απο την $i \in S$

Παραδειγμα:
ΜΑΣΧ με δ.ρ.μ

$$\begin{tikzcd} 0 & 1 \arrow[l, "2"'] \arrow[r, bend left, "1"] & 2 \arrow[l, bend left, "1"] \arrow[r, "2"] & 3 \end{tikzcd}$$

Το συστημα αρχικα βρισκεται στην κατασταση 1
$p_1(0) = 1$

i $h_1(\{3\})$

ii $m_1(\{0,3\})$

Λύση: i) Θα υπολογισουμε τα $h_i(\{3\})$ κανοντας αναλυση $1^{ου}$ βηματος (δεσμευοντας ως προς την κατασταση μετα την $1^{η}$ μεταβαση)

- $h_0(\{3\}) = 0$
- $h_3(\{3\}) = 1$
- $h_1(\{3\}) = p_{12} h_2(\{3\}) + p_{10} \overset{0}{\cancel{h_0}}(\{3\}) = \frac{1}{3} h_2(\{3\})$

  $\hookrightarrow \frac{q_{12}}{q_1} = \frac{1}{3}$ $\quad \hookrightarrow \frac{q_{10}}{q_1} = \frac{2}{3}$

- $h_2(\{3\}) = p_{21} h_1(\{3\}) + p_{23} h_3(\{3\})$

  $\hookrightarrow \frac{q_{21}}{q_2} = \frac{1}{3}$ $\quad \hookrightarrow \frac{q_{23}}{q_2} = \frac{2}{3}$

$= \frac{1}{3} h_1(\{3\}) + \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{8}{9} h_2(\{3\}) = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow h_2(\{3\}) = \frac{3}{4}, \ h_1(\{3\}) = \frac{1}{4}$

ii) Θα βρουμε τα $m_1(\{0,3\})$ κανουτας την αναλυση του $1^{ου}$ βηματος

- $m_0(\{0,3\}) = 0$
- $m_3(\{0,3\}) = 0$
- $m_1(\{0,3\}) = \frac{1}{q_1} + p_{10} m_0(\{0,3\}) + p_{12} m_2(\{0,3\})$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} m_2(\{0,3\})$

- $m_2(\{0,3\}) = \frac{1}{q_2} + p_{21} m_1(\{0,3\}) + p_{23} m_3(\{0,3\})$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} m_1(\{0,3\}) \Rightarrow$

$\frac{8}{9} m_2(\{0,3\}) = \frac{4}{3} \Rightarrow m_2(\{0,3\}) = \frac{1}{2}$

$m_1(\{0,3\}) = \frac{1}{2}$

Θεωρημα: τα $\{h_i(C), i \in S\}$ ειναι η ελαχιστη μη-αρνητικη λυση του συστηματος:

$\cdot\ x_i = 1 \quad i \in C$

$$x_i = \sum_{\substack{j \in i \\ j \neq i}} \frac{q_{ij}}{q_i} x_j, \quad i \in S/C$$

· Τα $\{m_i(C), i \in S\}$ είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του συστήματος:

$$y_i = 0, \quad i \in C$$

$$y_i = \frac{1}{q_i} + \sum_{\substack{j \in i \\ j \neq i}} \frac{q_{ij}}{q_i} y_j, \quad i \in S/C$$

Επαναληπτικότητα / Παροδικότητα Καταστ.:
Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ με χ.κ S και π.ρ.μ Q

Ορισμοί: · Χρόνοι επανόδου στην i (θεωρώντας ότι ξεκινάμε από την i)

$$\tau_i = \inf\{t \geq \gamma_1 : X(t) = i\} = \inf\{t \geq 0 : X(t) = i \text{ και } X(t^-) \neq i\}$$

· Πιθανότητα επανόδου στην i

$$h_i(\{i\}) \neq h_i = P(\tau_i < \infty \mid X(0) = i)$$

$$h_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_{ij}}{q_i} \cdot h_j(\{i\})$$

· Μέσοι χρόνοι επανόδου στην i

$$m_i(\{i\}) \neq m_i = E[\tau_i \mid X(0) = i], \quad m_i = \frac{1}{q_i} + \sum_{j \neq i} \frac{q_{ij}}{q_i} \cdot m_j(\{i\})$$

· Η j ονομαζεται επαναληπτικη, αν $h_j = 1$
επιπλεον αν $m_j < \infty$ λεγεται θετικα επαναληπτικη
αν $m_j = \infty$ λεγεται μηδενικά επαναληπτικη

· Η $j \in S$ ονομαζεται παροδικη αν $h_j < 1$

Ιδιοτητες παροδικοτητας/επαναληπτικοτητας

① Η θετικη επαναληπτικοτητα /μηδενικη επαναληπτικοτητα /παροδικοτητα ειναι ιδιοτητες κλάσης επικοινωνίας.

② Καθε ανοιχτη κλαση ειναι παροδικη

③ Καθε κλειστη και πεπερασμενη ειναι θετικα επαναληπτική.

Στασιμη Κατανομη:

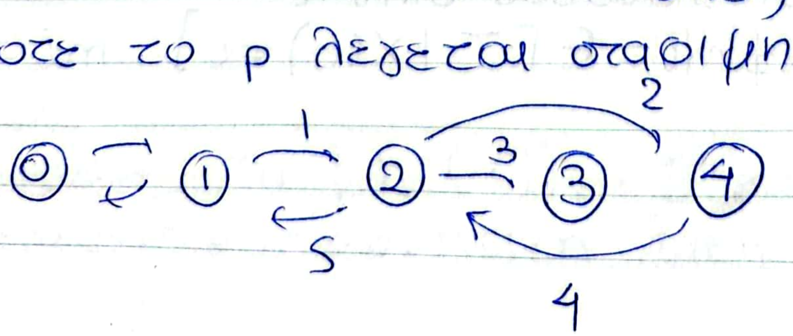
Ορισμος:

Εστω $\{X(t), t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ με χ κ S και π.ρ.μ $Q = (q_{ij})$. Ενα διανυσμα $p = [p_i]_{i \in S}$ με $p_i \geq 0$ $i \in S$ λεγεται στασιμο μετρο της $\{X(t), t \geq 0\}$ αν: $p_j q_j = \sum_{i \neq j} p_i q_{ij}$, $j \in S$

(εξισωσεις ισορροπιας)

Αν επιπλεον $\sum_{j \in S} p_j = 1$ (εξισωση κανονικοποιησης)

τοτε το p λεγεται στασιμη κατανομή.



Εξισωση ισορροπιας για κατασταση 2:

$p_2(2+3+5) = p_1 1 + p_4 \cdot 4$

Θεωρημα:

Εστω $\{X(t), t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ αδιαχωριστη με $X \in S$ και π.ρ.μ Q. Τοτε η $\{X(t), t \geq 0\}$ θετικα επαναληπτικη, ανν εχει στασιμη κατανομη $p = [p_j]_{j \in S}$. Επιπλεον, $p_j = \frac{1}{q_j m_j} = \frac{\frac{1}{q_j}}{m_j}$ μεσοι χρονοι παραμονης στην j

χρονος στο $(0,t]$ που βρισκεται στην j

ποσοστο χρονου που μενει στην j

μεσος χρονου επανοδου

① $\lim_{t \to \infty} \frac{\int_0^t I\{X(u)=j\} du}{t} = \frac{1}{q_j m_j} = p_j$ με πιθ 1

μακροπρ. ποσοστο του χρονου που βρισκ. στην j.

(ii) $\lim_{t \to \infty} E\left[\frac{\int_0^t I\{X(u)=j\} du}{t}\right] = p_j, \ j \in S$

μακροπροθ. μεσο ποσοστο χρονου j

(iii) $\lim_{t \to \infty} \frac{\int_0^t P(X(u)=j) du}{t} = p_j \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \frac{\int_0^t P_j(u) du}{t} = p_j$

πιθανοτητα αν παρουμε ενα μεγαλο χρονικο διαστημα και επιλεξουμε ομοιομορφα μια στιγμη σε αυτο να βρισκεται στην j

(iv) $\lim_{t \to \infty} P_j(t) = p_j, \ j \in S$

(v) Αν $p(0) = p$, τοτε $p(t) = p$.