31/10/22 (10º Μάθημα)

Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα

Έστω συνάρτηση $H(t)$ η "οποία ικανοποιεί" την ανανεωτική εξίσωση

$$H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-u)\,dG(u)$$

όπου η G είναι σκ μιας τμ X
και η $D(t)$ είναι συνάρτηση τέτοια ώστε:

1) η $D(t) = D_1(t) - D_2(t)$ όπου $D_1(t)$ και $D_2(t)$ μη-αρνητικές, φθίνουσες και φραγμένες

2) $\int_0^\infty |D(t)|\,dt < \infty$

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

α) αν X απεριοδική με $E[X] = \tau > 0$
τότε $\lim\limits_{t\to\infty} H(t) = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty D(t)\,dt$

β) αν X περιοδική με περίοδο d και μ. τ $\tau > 0$, τότε $\lim\limits_{k\to\infty} H(kd+x) = \frac{d}{\tau}\sum_{k=0}^{\infty} D(kd+x)$

Άσκηση:
Έστω $M(t)$ η ανανεωτική συνάρτηση μιας απεριοδικής ανανεωτικής διαδικασίας $\{N(t), t \geq 0\}$.

$M(t)=E[N(t)]$ με ενδ. χρονους ανανεωσης $\{X_n, n\geq 1\}$ με σκ G και $0 < E[X_n] \leq \tau < \infty$ και $Var[X_n]=\sigma^2<\infty$. Να βρεθει ανανεωτική εξίσωση για την $H(t) = M(t) - \frac{t}{\tau}$

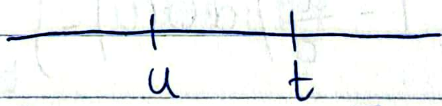
και νδο $\lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\sigma^2-\tau^2}{2\tau^2}$

Λύση: Εχουμε $H(t)=M(t) - \frac{t}{\tau} = E[N(t)] - \frac{t}{\tau}$

$$\Rightarrow H(t) = E\left[N(t) - \frac{t}{\tau}\right]$$

$$H(t) = E\left[N(t) - \frac{t}{\tau}\right] = \int_0^\infty E\left[N(t) - \frac{t}{\tau} \,\Big|\, X_1 = u\right] dG(u)$$

• Αν $u \leq t$



τότε $E\left[N(t) - \frac{t}{\tau} \,\Big|\, X_1 = u\right] = 1 + E[N(t-u)] - \frac{t}{\tau}$

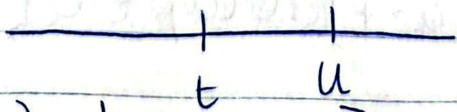
$$= 1 + M(t-u) - \frac{t}{\tau}$$

$H(t-u) = N(t-u) - \frac{t-u}{\tau}$

$$1 + M(t-u) - \frac{t-u}{\tau} + \frac{t-u}{\tau} - \frac{t}{\tau}$$

$$= H(t-u) + 1 - \frac{u}{\tau}$$

• Αν $u > t$



τότε: $E\left[N(t) - \frac{t}{\tau} \,\Big|\, X_1 = u\right] = -\frac{t}{\tau}$

$$H(t) = \int_0^\infty E\left[N(t) - \frac{t}{\tau} \,\middle|\, X_1 = u\right] dG(u)$$

$$= \int_0^t \left(H(t-u) + 1 - \frac{u}{\tau}\right) dG(u) + \int_t^\infty \left(-\frac{t}{\tau}\right) dG(u)$$

$$H(t) = \underbrace{\int_0^t \left(1 - \frac{u}{\tau}\right) dG(u) + \int_t^\infty \left(-\frac{t}{\tau}\right) dG(u)}_{D(t)} +$$

$$+ \int_0^t H(t-u) dG(u)$$

$$D(t) = \int_0^t \left(1 - \frac{u}{\tau}\right) dG(u) - \int_t^\infty \frac{t}{\tau} dG(u)$$

$$= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{\tau}\right) dG(u) - \int_t^\infty \left(1 - \frac{u}{\tau}\right) dG(u)$$

$$- \int_t^\infty \frac{t}{\tau} \quad dG(u)$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty 1 dG(u)}_{1} - \frac{1}{\tau} \underbrace{\int_0^\infty u dG(u)}_{\tau} - \int_t^\infty 1 dG(u)$$

$$+ \frac{1}{\tau} \int_t^\infty (u-t) dG(u)$$

$$= \frac{1}{\tau} \int_t^\infty (u-t) dG(u) - (\underbrace{1 - G(t)}_{D_2(t)})$$

Εχουμε $\int_t^{\infty} (u-t)\,dG(u) = \int_t^{\infty} (u-t) G'(u)\,du$

$$= -\int_t^{\infty} (u-t)(1-G(u))'\,du$$

$$= -\left[(u-t)\cancel{(}1-G(u)\right]_t^{\infty} + \int_t^{\infty} (1-G(u))\,du$$

$$= \int_t^{\infty} (1-G(u))\,du$$

Άρα $D(t) = \underbrace{\frac{1}{\tau}\int_t^{\infty} (1-G(u))\,du}_{D_1(t)} - \underbrace{(1-G(t))}_{D_2(t)}$

$0 \le D_1(t)$

$D_1(t) \downarrow$ ως προς t

$0 \le D_1(t) = \frac{1}{\tau}\int_t^{\infty} (1-G(u))\,du \le \frac{1}{\tau}\underbrace{\int_0^{\infty}(1-G(u))\,du}_{\tau}$

$= \tau \frac{1}{\tau} = 1$

$D_2(t) \downarrow$ ως προς t

$0 \le D_2(t) = 1 - G(t) \le 1$

$$\int_0^\infty D_1(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{\tau}\int_t^\infty (1-G(u))\,du\,dt$$

$$\underline{\underline{0\le t\le u<\infty}} \quad \frac{1}{\tau}\int_0^\infty\int_0^u (1-G(u))\,dt\,du$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty (1-G(u))\left(\int_0^u dt\right)du$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty u\,(1-G(u))\,du$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \left(\frac{u^2}{2}\right)'(1-G(u))\,du$$

$$= \frac{1}{\tau}\left[\cancel{\frac{u^2}{2}(1-G(u))}\right]_0^\infty + \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \frac{u^2}{2}\,g_X(u)\,du$$

$$= \frac{1}{\tau}\,\frac{E[X^2]}{2} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\sigma^2+\tau^2}{2}\right)$$

$$\int_0^\infty D_2(t)\,dt = \int_0^\infty (1-G(t))\,dt = \tau$$

Οπότε, $\displaystyle\int_0^\infty |D(t)|\,dt = \int_0^\infty |D_1(t) - D_2(t)|\,dt$

$$\le \int_0^\infty |D_1(t)|\,dt + \int_0^\infty |D_2(t)|\,dt$$

$$= \frac{\sigma^2+\tau^2}{2\tau} + \tau < \infty$$

Εφαρμόζοντας ΒΑΘ εχουμε:

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty D(t)\,dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \big(D_1(t)-D_2(t)\big)\,dt$$

$$= \frac{1}{\tau}\left(\frac{\sigma^2+\tau^2}{2\tau}-\tau\right) = \frac{1}{\tau}\,\frac{\sigma^2+\tau^2-2\tau^2}{2\tau} = \frac{\sigma^2-\tau^2}{2\tau^2}$$

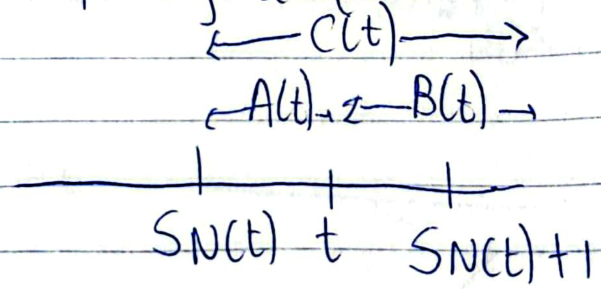
2.6 Χρονοι $A(t) = t - S_{N(t)}$

$B(t) = S_{N(t)+1} - t$

$C(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$

Ορισμοί:

Εστω $\{N(t), t\geq 0\}$ απεριοδικη ανανεωτικη διαδικασια

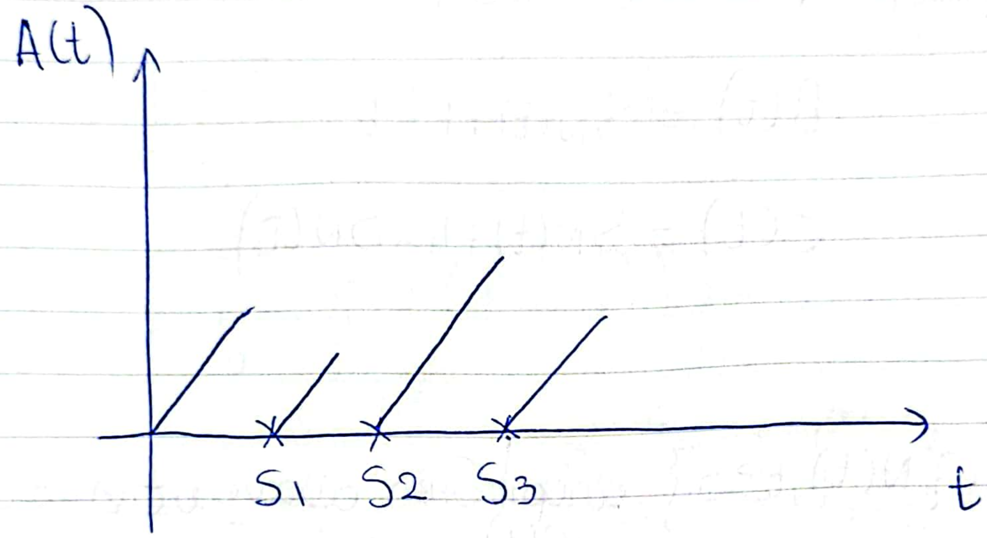


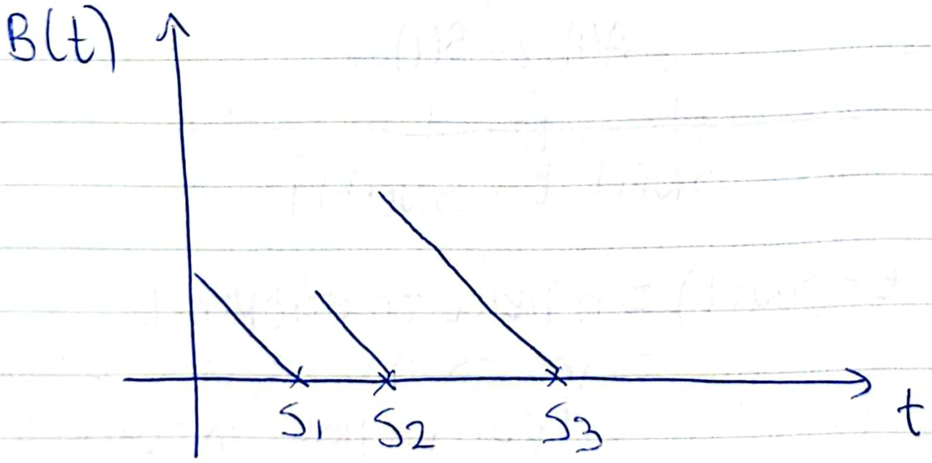
$A(t) = t - S_{N(t)}$ = ηλικια τη στιγμη t
= χρονος που περασε απο το προηγουμενο γεγονος μεχρι τη στιγμη t
= αναδρομικος χρονος
= παρελθων χρονος

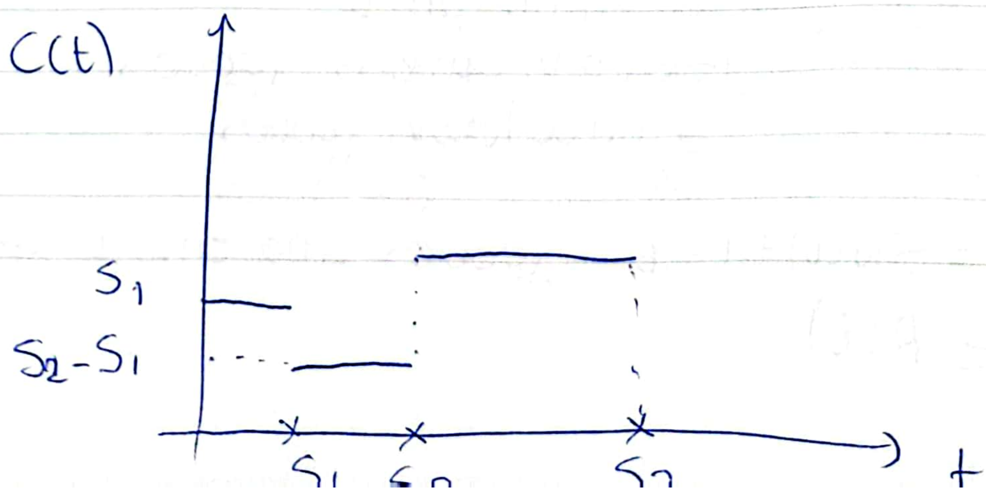
$B(t) = S_{N(t)+1} - t$ = χρονος απο την t μεχρι
$= R(t)$

την επόμενη ανανεωση
= υπολειπομενος χρονος ανανεώσης
= προδρομικος χρόνος.

$C(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)} = X(t)$
= ενδιάμεσος χρονος ανανεωσης
τη στιγμη t
= t - ελαρεωμενος







Άσκηση:

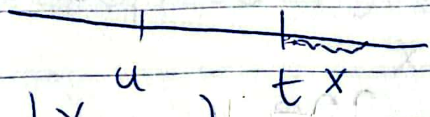
Έστω, $B(t)$ ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης μιας απεριοδικής ανανεωτικής διαδικασίας $\{N(t), t\geq 0\}$ με σκ ενδιάμεσων χρόνων σε $G(t)$ και $0 < E[X_n] = \tau < \infty$. Νδο για δεδομένο $x>0$ η $H(t) = P(B(t)>x)$, $t\geq 0$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση

$$H(t) = 1 - G(x+t) + \int_0^t H(t-u)\,dG(u)$$

και $\lim\limits_{t\to\infty} H(t) = \lim\limits_{t\to\infty} P(B(t)>x) = \frac{1}{\tau}\int_x^{\infty} (1-G(u)$

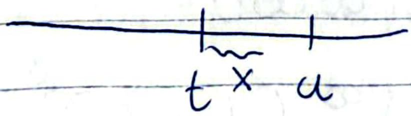
Λύση: $H(t) = P(B(t)>x) = \int_0^{\infty} P(B(t)>x \mid X_1 = u)\,dG(u)$

Αν $u \leq t$



τότε $P(B(t)>x \mid X_1=u) = P(B(t-u)>x) = H(t-$

Αν $u > t$



τότε

$$P(B(t)>x \mid X_1=u) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x > u-t \Leftrightarrow u < t+ \\ 1, & \text{αν } x < u-t \Leftrightarrow u > t+x \end{cases}$$

Οπότε, $H(t) = \int_0^{\infty} P(B(t)>x \mid X_1=u)\,dG(u)$

$$= \int_0^t H(t-u)\,dG(u) + \overset{0}{\int_t^{t+x} 0\,dG(u)} + \int_{t+x}^{\infty} 1\,dG(u)$$

Scanned with CamScanner

$$= \underbrace{1 - G(t+x)}_{D(t)} + \int_0^t H(t-u)\,dG(u)$$

Έχουμε, $D(t) = \underbrace{1 - G(t+x)}_{D_1(t)} - \underbrace{0}_{D_2(t)}$

Οποτε, $D_1(t)$ κ $D_2(t)$ μη-αρνητικες, φραγμενες, φθινουσες.

$$\int_0^\infty |D(t)|\,dt = \int_0^\infty |D_1(t) - \cancel{D_2(t)}|\,dt$$

$$= \int_0^\infty D_1(t)\,dt = \int_0^\infty (1 - G(t+x))\,dt$$

$$\overset{u=t+x}{=\!=} \int_x^\infty (1 - G(u))\,du \leq \int_0^\infty (1 - G(u))\,du = \tau < \infty$$

Εφαρμόζω, ΒΑΘ

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = \lim_{t\to\infty} P(B(t) > x) = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty D(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_x^\infty (1 - G(u))\,du$$

Σημειωση:

Για καθε τμ X με σκ G με μ.τ

$0 < E[X] = \tau < \infty$ μπορω να θεωρησω μιανεα τμ την X_e με σκ $G_e(x)$

$$G_e(x) = \frac{1}{\tau}\int_0^x (1-G(u))\,du.$$

Η σκ G_e λεγεται κατανομη ισορροπιας της G.

Εχουμε οτι $G_e(\infty) = \frac{1}{\tau}\underbrace{\int_0^\infty (1-G(u))\,du}_{\tau} = \frac{1}{\tau}\tau = 1$

Επισης, $\lim_{t\to\infty} P(B(t) > x) = \frac{1}{\tau}\int_x^\infty (1-G(u))\,du$

$$= \frac{1}{\tau}\underbrace{\int_0^\infty (1-G(u))\,du}_{\tau} - \frac{1}{\tau}\int_0^x (1-G(u))\,du$$

$$= 1 - G_e(x)$$

Αρα, ο οριακος υπολειπόμενος χρονος ανανεωσης ακολουθει την κατανομη ισορροπιας.

$$E[X_e] = \int_0^\infty (1-G_e(u))\,du = \int_0^\infty \frac{1}{\tau}\int_u^\infty (1-G(t))\,dt\,du$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty\int_u^\infty\int_t^\infty dG(x)\,dt\,du \quad \underline{\underline{0 \le u \le t \le x < \infty}}$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \underbrace{\int_0^x \underbrace{\int_0^t 1\,du}_{t}\,dt}_{\frac{x^2}{2}}\,dG(x) = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \frac{x^2}{2}\,dG(x)$$

$$= \frac{1}{\tau}\frac{E[X^2]}{2} = \frac{\sigma^2+\tau^2}{2\tau} > \frac{\tau}{2}$$