19/10/22 (7º Μάθημα)

2.2 Ιδιότητες $\{N(t), t\geq 0\}$

α) Μεταβατική Κατανομή

Συμβολισμοί: $G(t) = P(X_n \leq t)$, $n \geq 1$

$\tau = E[X_n]$

$\sigma^2 = Var[X_n]$

$s^2 = E[X_n^2]$

Υποθέτουμε ότι $G(0) < 1 \Rightarrow \tau > 0$

$P_k(t) = P(N(t) = k)$, $k \geq 0$, $t \geq 0$

$G_k(t) = P(S_k \leq t)$, $k \geq 1$

$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t$

Θεώρημα: $\{N(t), t\geq 0\}$ RP με κατανομή με σκ ενδ. χρόνων γεγονότων $G(t)$, τότε

$$P_k(t) = P(N(t)=k) = G_k(t) - G_{k+1}(t)$$

Αποδ: $P_k = P(N(t)=k) = P(N(t)\geq k) - P(N(t) \geq k+1)$

$= P(S_k \leq t) - P(S_{k+1} \leq t)$

$= G_k(t) - G_{k+1}(t)$

Υπολογισμός: $G_k(t)$, $k \geq 1$

Γνωρίζουμε την $G(t) = P(X_n \leq t)$, $n \geq 1$

Έχουμε $G_k(t) = P(S_1 \leq t) = P(X_1 \leq t) = G(t)$

Για $k=2$

$$G_2(t) = P(S_2 \leq t) = P(X_1 + X_2 \leq t)$$

$$= \int_0^t P(X_1 + X_2 \leq t \mid X_1 = u)\, dG(u)$$

$$\int_0^t P(X_2 \le t-u)\,dG(u) = \int_0^t G(t-u)\,dG(u)$$

$$= (G*G)(t) = G^{*2}(t)$$

Για $k=3$

$$G_3(t) = P(S_3 \le t) = P(\underbrace{X_1 + X_2}_{S_2} + X_3 \le t) \quad *$$

Δεσμεύω ως προς X_3:

$$\stackrel{*}{=} \int_0^t P(S_2 + X_3 \le t \mid X_3 = u)\,dG(u)$$

$$= \int_0^t P(S_2 \le t-u)\,dG(u)$$

$$= \int_0^t G^{*2}(t-u)\,dG(u) = G^{*3}(t)$$

Γενικά, $G_k(t) = G^{*k}(t) = \int_0^t G^{*(k-1)}(t-u)\,dG(u)$

$$= \int_0^t G(t-u)\,dG^{*(k-1)}(u)$$

Αν $\tilde{G}(s)$ είναι ο LS της $G(t)$ δηλαδή

$$\tilde{G}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\,dG(u)$$

και $\tilde{G}_k(s)$ είναι ο LS της $\underbrace{G_k(t)}_{S_k}$ τότε

$$\tilde{G}_k(s) = \tilde{G}^{*k}(s) = [\tilde{G}(s)]^k$$

Διαδικασία

$$G(t) \xrightarrow{LS} \tilde{G}(s) \to \tilde{G}_k(s) = \tilde{G}^{*k}(s) = [\tilde{G}(s)]^k$$

αντ. $\xrightarrow{LS}$ $G_k(t) \to p_n(t)$

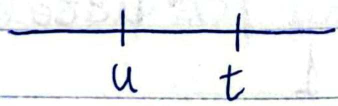
Ανανεωτικός Συλλογισμός

Για να υπολογίσουμε μια πιθανοθεωρητική συνάρτηση δεσμεύουμε ως προς τον χρόνο του $1^{ου}$ γεγονότος.

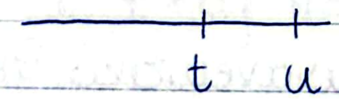
Έκφραση για $p_n(t)$:

$$n \geq 1 \quad p_n(t) = P(N(t)=n) =$$

$$= \int_0^\infty P(N(t)=n \mid X_1=u)\, dG(u)$$



Αν $u \leq t$, $P(N(t)=n \mid X_1=u)$
$= P(N(t-u)=n-1)$
$= p_{n-1}(t-u)$



Αν $u > t$, $P(N(t)=n \mid X_1=u) = 0$

Άρα, $P_n(t) = \int_0^t P_{n-1}(t-u)\, dG(u) + \int_t^\infty 0\, dG(u)$

$$\Rightarrow p_n(t) = \int_0^t p_{n-1}(t-u)\, dG(u), \quad n \geq 1$$

Για $n=0$ $p_0(t) = P(N(t)=0) = P(S_1 > t) = 1-G(t)$

$$\Rightarrow p_0(t) = 1-G(t)$$

Θεώρημα: $\{N(t), t\geq 0\} \Rightarrow P(N(t)<\infty)=1 \ \forall t\geq 0$

Οριακή συμπεριφορά

$$G(\infty) = P(X_n < \infty)$$

$N(\infty)$ = # γεγονότων στο $(0,\infty)$

Θεώρημα: $\{N(t), t\geq 0\}$ RP $\Rightarrow$
οι ενδ. χρόνοι είναι πεπερ

- Αν $G(\infty)=1 \Rightarrow$ $P(N(\infty)=\infty)=1$

- Αν $G(\infty)<1 \Rightarrow$ $P(N(\infty)=k) =$
κάποιο γεγονός μπορεί να συμβεί σε ∞ χρόνο
$= (G(\infty))^k(1-G(\infty))$
$k\geq 0$

Ορισμοί: Η $\{N(t), t\geq 0\}$ λέγεται • επαναληπτική
αν $P(N(\infty)=\infty)=1$

• μεταβατική
αν $P(N(\infty)=\infty)<1$

Θεώρημα: Στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα

$$\left.\begin{array}{l}\{N(t), t\geq 0\} \text{ RP} \\ \tau=E[X_n]>0\end{array}\right\} \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau} \quad \text{μ.π. } 1$$

τ: μέσος ενδ χρόνος ανανεω. = περίοδος

$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}$: μακροπρόθεσμος ρυθμός ανανεώσεων = μακροπροθεσμη συχνοτητα

Εφαρμογή:

Μηχανή αντικαθίσταται μόλις χαλάσει
ή μόλις φθάσει την ηλικία των 3 χρόνων

Χρόνος ζωής $L \sim \text{Uniform}[2,5]$

Να βρεθούν:

i) Μακροπρόθεσμος ρυθμός αντικαταστάσεων
ii) >> >> >> λόγω ηλικίας

iii) >> >> >> λόγω βλάβης

Λύση: Ορίζουμε τις εξής απαριθμήτριες

$\{N(t), t\geq 0\}$ με $N(t) = \#$ αντικαταστάσεων στο $(0,t]$

$\{N^{(1)}(t), t\geq 0\}$ με $N^{(1)}(t) =$ >> >> λόγω ηλικίας

$\{N^{(2)}(t), t\geq 0\}$ με $N^{(2)}(t) =$ >> >> λόγω βλάβης

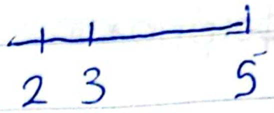
Είναι όλες ανανεωτικές με ενδιάμεσους χρ. γεγονότων $\{X_n, n\geq 1\}$, $\{X_n^{(1)}, n\geq 1\}$ και $\{X_n^{(2)}, n\geq 1\}$ αντίστοιχα.

(i) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{N(t)}{t} = \dfrac{1}{E[X]}$

$$E[X] = E[X \mid L\leq 3]\,\underbrace{P[L\leq 3]}_{\frac{1}{3}} + \underbrace{E[X\mid L>3]}_{3}\,\underbrace{P[L>3]}_{\frac{2}{3}}$$

$$= \underbrace{E[L \mid L\leq 3]}_{\sim U[2,3]} = \frac{5}{2}$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{2}{3} = \frac{5}{6} + \frac{12}{6} = \frac{17}{6}$$



Άρα $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{E[X]} = \frac{6}{17}$

ii) $\lim_{t\to\infty} \frac{N^{(1)}(t)}{t} = \frac{1}{E[X^{(1)}]}$

$$X^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} X_i + 3$$

N = # αποτυχ μέχρι 1η επιτυχία

$$E[X^{(1)}] = E[N]E[X_i] + 3$$

$$E[X^{(1)}] = \underset{(*)}{E}[X^{(1)} \mid L \le 3]\, P[\underbrace{L \le 3}_{\frac{1}{3}}] + E[\underbrace{X^{(1)} \mid L > 3}_{3}]\, P[\underbrace{L > 3}_{\frac{2}{3}}]$$

(*) $E[X^{(1)} \mid \underbrace{L \le 3}_{\text{αντικατ. λόγω βλάβης}}] = \underbrace{E[L \mid L \le 3]}_{\sim \text{uniform } [2,3]} + E[X^{(1)}]$

$$= \left(\frac{5}{2} + E[X^{(1)}]\right)\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow E[X^{(1)}] = \left(\frac{5}{2} + E[X^{(1)}]\right)\frac{1}{3} + 2$$

$$\Rightarrow 3E[X^{(1)}] = \frac{5}{2} + E[X^{(1)}] + 6$$

$$\Rightarrow 2E[X^{(1)}] = \frac{17}{2}$$

$$\Rightarrow E[X^{(1)}] = \frac{17}{4}$$

iii) $$\lim_{t\to\infty} \frac{N^{(2)}(t)}{t} = \frac{1}{E[X^{(2)}]} = \frac{2}{17}$$

$$E[X^{(2)}] = E[X^{(2)} \mid L \leq 3] P[L \leq 3] + E[X^{(2)} \mid L > 3] P[L > 3]$$

$$= E[L \mid L \leq 3] \cdot \frac{1}{3} + (3 + E[X^{(2)}]) \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow E[X^{(2)}] = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} + 2 + \frac{2}{3} E[X^{(2)}]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} E[X^{(2)}] = \frac{5}{6} + 2$$

$$\Rightarrow E[X^{(2)}] = \frac{17}{2}$$

Scanned with CamScanner