12/10/22 (5ο Μάθημα)

Θεώρημα

$$\begin{cases} \{N_i(t), t\geq 0\} \sim PP(\lambda_i), \quad i=1\ldots r \\ \{N_i(t), t\geq 0\} \text{ ανεξάρτητες} \\ \{N(t), t\geq 0\} \text{ η υπέρθεση των } \{N_i(t), t\geq 0\}_{i=1\ldots r} \\ Z_n : \text{τύπος } n\text{-οστού γεγονότος της } \{N(t), t\geq 0\} \end{cases}$$

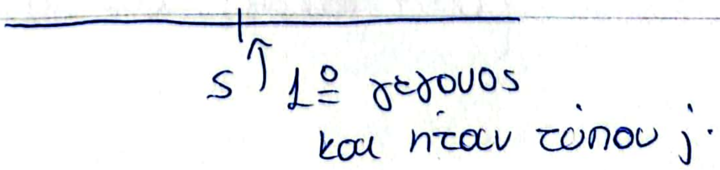
$\Rightarrow$ $\{Z_n, n\geq 1\}$ ακολουθία ισόνομων κ' ανεξάρτητων τμ με $P(Z_n=i) = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_r}$ $\quad i=1\ldots r$, $n=1,2\ldots$

Απόδειξη:

Έστω $\{X_n^{(i)}, n\geq 1\}$ ακολουθία ενδ. χρόνων γεγονότων στην $\{N_i(t), t\geq 0\}$

$$P(Z_1=i) = P\left(X_1^{(i)} = \min\{X_1^{(i)}, X_1^{(2)} \ldots X_1^{(r)}\}\right)$$
$$= \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\ldots+\lambda_r}$$

Έστω το 1ο γεγονός ήταν τύπου j και έγινε τη στιγμή s



Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλοι οι χρόνοι ξεκινούν από την αρχή.

Ο τύπος του $2^{ου}$ γεγονότος δεν εξαρτάται από τον τύπο του $1^{ου}$ γεγ.

$$P(Z_2 = i) = P(X_1^{(i)} = \min\{X_1^{(1)}, \ldots X_1^{(r)}\}) = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^{r} \lambda_j}$$

Παράδειγμα

Σε μια τράπεζα φθάνουν 3 τύποι πελατών

Τύπος 1: Θέλει να κάνει μόνο ανάληψη φθάνουν με $PP(20)$ χρόνος εξυπηρ 3min

Τύπος 2: Θέλει να κάνει μόνο κατάθεση φθάνουν με $PP(15)$, χρόνος εξυπηρέτησης 4 min

Τύπος 3: Θέλει να κάνει και κατάθεση κ' ανάληψη φθάνουν με $PP(10)$, χρόνος εξυπηρέτησης 6 min.

Χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη $E[X]$

Λύση: $E[X]$

Έστω Z τύπος πελάτη

$$P(Z=1) = \frac{20}{45} \quad P(Z=2) = \frac{15}{45}$$

$$P(Z=3) = \frac{10}{45}$$

Scanned with CamScanner

$$E[X] = \sum_{i=1}^{3} E[X|Z=i]\Pr[Z=i]$$

$$= 3\cdot\frac{20}{45} + 4\cdot\frac{15}{45} + 6\cdot\frac{10}{45} = 4 \text{ min}$$

Διαχωρισμός και Εκλέπτυνση Poisson

Διαχωρισμός Bernoulli: Έστω $\{N(t), t\geq 0\}$ μια απαριθμήτρια διαδικασία και κάθε γεγονός χαρακτηρίζεται ως τύπου i, $i=1..r$ με πιθ p_i ($\sum_{i=1} p_i = 1$) ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα.

Τότε $N_i(t)$ = # γεγονοτων τύπου i στο $(0,t]$ και $\{N_i(t), t\geq 0\}$ μια απαριθμήτρια για $i=1..r$
Λέμε ότι η $\{N(t), t\geq 0\}$ διαχωρίστηκε στις $\{N_i(t), t\geq 0\}$ και οι $\{N_i(t), t\geq 0\}$ είναι εκλέπτυνση της $\{N(t), t\geq 0\}$
Αυτή η διαδικασία ονομάζεται διαχωρισμός Bernoulli

Θεώρημα: $\{N(t), t\geq 0\}$ $PP(\lambda)$
και $\{N_i(t), t\geq 0\}$ $i=1,\dots,r$ είναι οι εκλεπτύνσεις της $\{N(t), t\geq 0\}$ μετά από διαχωρισμό Bernoulli με πιθ $(p_1,\dots,p_r)$.

$\Rightarrow$ $\{N_i(t), t\geq 0\}$ $PP(\lambda p_i)$ $i=1..r$

$\{N_i(t), t\geq 0\}$ $i=1..r$ ανεξάρτητες

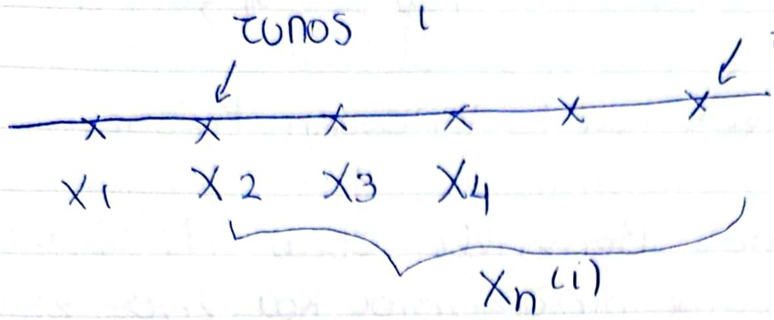
Απόδειξη:
- Θα δείξουμε ότι $\{N_i(t), t\geq 0\}$ $PP(\lambda p_i)$ $i=1..r$

Scanned with CamScanner

Θα δείξουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι $Exp(\lambda p_i)$

Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ οι ενδ. χρόνοι στην $\{N(t), t\geq 0\}$

και $\{X_n^{(i)}, n\geq 0\}$ " — " $\{N_i(t), t\geq 0\}$



$$X_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{N} X_j$$

N = # γεγονότων της $\{N(t), t\geq 0\}$ μέχρι να εμφανιστεί το πρώτο τύπου i.

$N \sim Geom(p_i)$

Άρα $X_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{N} X_j \sim Exp(\lambda p_i)$

Οπότε $\{N_i(t), t\geq 0\}$ είναι $PP(\lambda p_i)$

▫ Θδο οι $\{N_i(t), t\geq 0\}$ $i=1\ldots r$ ανεξάρτητες

Θα το δείξουμε για $r=2$.

Αρκεί νδο $P(N_1(t)=i, N_2(t)=j) = P(N_1(t)=i)P(N_2(t)=j)$ $\forall i,j=0,1\ldots$ $t\geq 0$

$$P(N_1(t)=i, N_2(t)=j) = P(N_1(t)=i, N_2(t)=j, N(t)=i+j)$$
$$= \underbrace{P(N_1(t)=i, N_2(t)=j \mid N(t)=i+j)}_{(*)\ \binom{i+j}{i} p_1^i p_2^j}\ P(\underbrace{N(t)=i+j}_{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{i+j}}{(i+j)!}})$$

$$P(N_1(t)=i, N_2(t)=j) = P(N_1(t)=i)\,P(N_2(t)=j)$$

$$e^{-\lambda p_1 t}\frac{(\lambda p_1 t)^i}{i!} \quad e^{-\lambda p_2 t}\frac{(\lambda p_2 t)^j}{j!}$$

$$(*) = e^{-\lambda p_1 t} e^{-\lambda p_2 t} \frac{(i+j)!}{i!\,j!} \frac{(\lambda p_1 t)^i (\lambda p_2 t)^j}{(i+j)!}$$

$$= P(N_1(t)=i)\,P(N_2(t)=j)$$

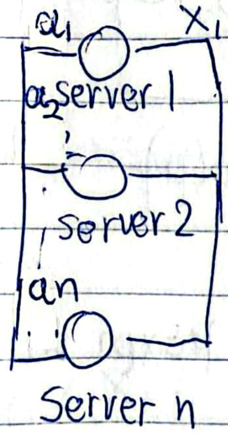
Άσκηση 1: $X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow h(x) = \lambda, \quad x \geq 0$

$h(x) = \lambda \quad x \geq 0 \rightarrow \bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$

Άσκηση 2: $h(x) = \dfrac{f(x)}{\bar{F}(x)}$ ← άθροισμα

Άσκηση 3:

$X_1 \sim Exp(\lambda_1)$



$X_n \sim Exp(\lambda_n)$

$$X \sim HyperExponential(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \alpha_1, \ldots \alpha_n)$$

$$P(I=i) = \alpha_i, \quad i=1..n$$

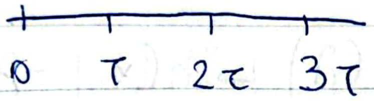
$$(X|I=i) = Y_i \sim Exp(\lambda_i)$$

$$\bar{F}_X(x) = P(X>x) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{P(X>x|I=i)}_{P(Y_i>x)} \underbrace{P(I=i)}_{\alpha_i}$$

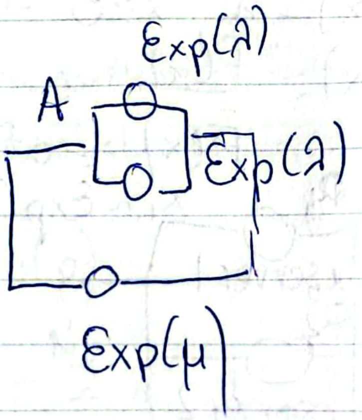
Άσκηση 4: $Z = \min\{X_1 + X_2, X_3\}$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(\min\{X_1+X_2, X_3\} \le z)$$
$$= 1 - P(\min\{X_1+X_2, X_3\} > z)$$
$$= 1 - P(X_1 + X_2 > z, X_3 > z)$$

Άσκηση 5:



Άσκηση 6:



Z_A = χρονος μεχρι να χαλασει το A

Z_B = " " B

$\sim Exp(2\lambda)$ $\quad\quad$ $\sim Exp(\mu)$

$Z_2 \sim Exp(\lambda)$

$$\underbrace{Z_1 \,|\, Z_2}_{Z_A}$$

$$P(Z_A < Z_B) = P(Z_1 + Z_2 < Z_B) =$$

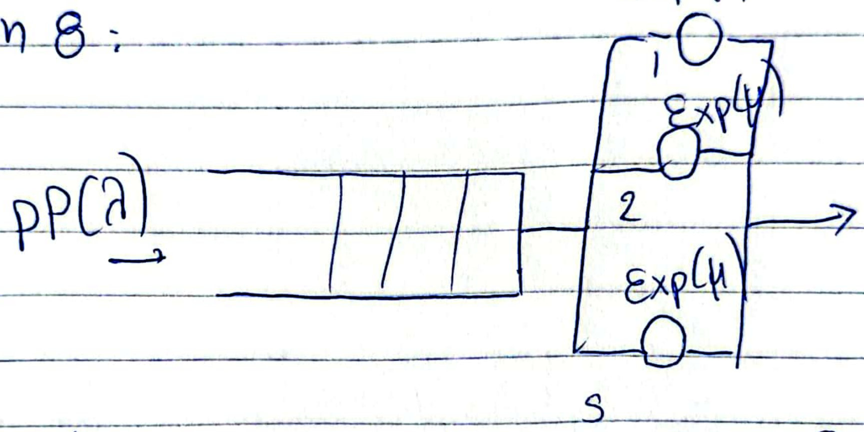
$$= P(Z_1 + Z_2 < Z_B \mid Z_B \geq Z_1)\, P(Z_B \geq Z_1)$$

$$+ \quad P(Z_1 + Z_2 < Z_B \mid \overset{0}{\cancel{Z_B}} < Z_1)\, P(Z_B < Z_1)$$

'Ασκηση 7 :

$$P(N(t) = k \mid N(t+s) = k+m) = \frac{P(N(t)=k,\, N(t+s) = k+m)}{P(N(t+s) = k+m)}$$

Ασκηση 8 :



a) Y_1 : χρόνος μεχρι επομ αφιξη $\sim Exp(\lambda)$

X_2 : " εξυπηρ $\sim Exp(5\mu)$

$P(Y_1 < X_1)$

β) $\{N(t), t \geq 0\}$ διαδ αφιξ $PP(\lambda)$

$N = N(X_1) \sim ?$

Δεσμευω ως προς X_1
κ' ερμηνειας αποτελ.

γ) οπως ασκηση 6.

Scanned with CamScanner

Άσκηση 9:

$\{N(t), t \geq 0\}$ $PP(8)$

α) $E[N(8)]$, $Var[N(8)]$

β) $P\left(N\left(\frac{1}{4}\right) > 4\right)$