10/10/22 (4ο Μαθημα)

Ασκηση

$\{N(t), t\geq 0\}$ $PP(\lambda)$

$t=0$, $s\geq 0$ — t — $t+s$

$Cov(N(t), N(t+s)) =$

$= E[N(t)(N(t+s))] - E[N(t)]E[N(t+s)]$

$N(t+s) - N(t) + N(t)$

$= E[N(t)\cdot\{N(t+s) - N(t) + N(t)\}] - E[N(t)]E[N(t+s)]$

$= E[\underbrace{N(t)(N(t+s)-N(t))}_{\text{ανεξαρτητες}}] + E[N^2(t)] - E[N(t)]E[N(t+s)]$

$= E[N(t)]\cdot E[N(s)] + Var(N(t)) + E^2[N(t)]$
$- \lambda t \cdot \lambda(t+s)$

$= \lambda t \cdot \cancel{\lambda s} + \lambda t + \cancel{(\lambda t)^2} - \cancel{(\lambda t)^2} - \cancel{\lambda^2 ts}$

$= \lambda t$

1.3 Δεσμευμενη κατανομη $(S_1, S_2, \ldots S_n \mid N(t)=n)$

Διατεταγμενες ομοιομορφα κατανεμημενες στο $[0,t]$

$U_1, U_2, \ldots U_n \sim Uniform([0,t])$

$U_1, \ldots U_n$ ανεξαρτητες

$\tilde{U}_1, \ldots \tilde{U}_n$ οι αντιστοιχες διατεταγμενες

$\min\{U_1 .. U_n\}$ $\max\{U_1 .. U_n\}$

0 — u — t

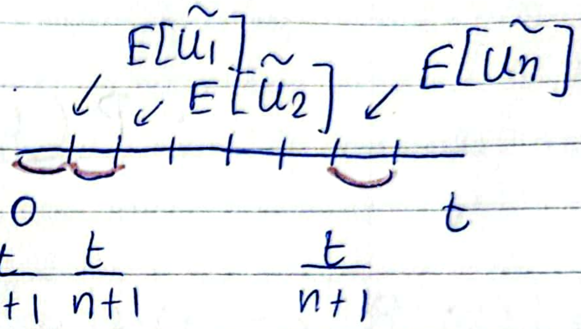
$\Rightarrow F_{\tilde{U}_k}(u) = P(\tilde{U}_k \leq u) = \sum_{i=k}^{n} P(i$ από τις n να ειναι $\leq u)$

Scanned with CamScanner

$$= \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{u}{t}\right)^{i} \left(1-\frac{u}{t}\right)^{n-i}, \quad 0 \le u \le t$$

$$f_{\tilde{U}_k}(u) = \begin{cases} \frac{k}{t}\binom{n}{k}\left(\frac{u}{t}\right)^{k-1}\left(1-\frac{u}{t}\right)^{n-k}, & 0 \le u \le t \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$E[\tilde{U}_k] = \frac{kt}{n+1}$$



$$f_{\tilde{U}_1,\tilde{U}_2,\ldots,\tilde{U}_n}(t_1,t_2,\ldots,t_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le t \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Θεώρημα Campell

$(S_1,\ldots,S_n \mid N(t)=n) \overset{d}{=} (\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \ldots, \tilde{U}_n)$ όπου

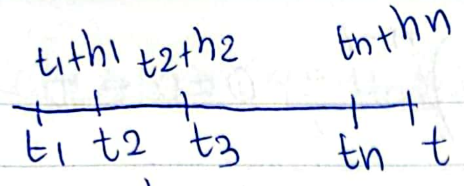
$U_1, U_2, \ldots U_n$ ανεξ κ' $\sim$ Uniform$[0,t]$

και

$\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \ldots \tilde{U}_n$ αντίστοιχες διατεταγμένες

Απόδειξη: Έστω, $0 \le t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n \le t$

και $h_1, h_2, \ldots h_n \ge 0$



όπου h_i είναι τόσο μικρά ώστε $t_i + h_i < t_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$

και $t_n + h_n < t$

$$f_{(S_1, \dots, S_n \mid N(t)=n)}(t_1, t_2 \dots t_n) = \lim_{h_1 \to 0} \lim_{h_2 \to 0} \lim_{h_n \to 0} \cdot \frac{P(t_i \le S_i \le t_i + h_i,\ i = 1 \dots n \mid N(t) = n)}{h_1 . h_2 \dots h_n} =$$

$$= \lim_{h_1 \to 0^+} \lim_{h_2 \to 0^+} \cdots \lim_{h_n \to 0^+} \frac{1}{h_1 . h_2 . h_n} \frac{P(t_i < S_i \le t_i + h_i,\ S_{n+1} > t)}{P(N(t) = n)} =$$

$$\text{im} \lim_{\to 0^+} \lim_{h_2 \to 0^+} \dots \lim_{h_n \to 0^+} \frac{1}{h_1 . h_2 \dots h_n} \frac{e^{-\lambda t_1}(\lambda h_1 + o(h_1)) e^{-\lambda(t_2 - t_1 - h_1)}(\lambda h_2 + o(h_2))}{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}} \cdot$$

$$\cdot \frac{e^{-\lambda(t - t_n - h_n)}(\lambda h_n + o(h_n))}{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{t^n}$$

Ερμηνεία: Αν γνωρίζω ότι $N(t) = n$, θεωρώ n ανεξάρτητες ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $[0, t]$. Ο S_1 είναι ο μικρότερος, ο S_2 ο $2^{ος}$ μικρότερος, κτλ

Παρατήρηση: Η κατανομή της $(S_1, S_2, \dots S_n \mid N(t) = n)$

είναι ανεξάρτητη του λ.

Εφαρμογή 1

$\{N(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda)$

$E[\underbrace{S_{N(t)}}]=;$

χρόνος τελευταίου γεγονότος
μέχρι τη στιγμή t.

Λύση: $E[S_{N(t)}] = \sum_{n=0}^{\infty} E[S_{N(t)} \mid N(t)=n] \cdot Pr[N(t)=n]$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{E[S_n \mid N(t)=n]}_{E[\tilde{U}_n]=\frac{nt}{n+1}} e^{\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt}{n+1} \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

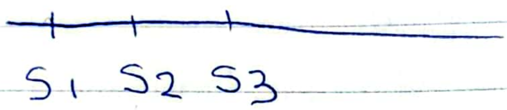
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+1} t e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} t e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= t \cdot 1 - t \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= t - \frac{1}{\lambda} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}}_{1-e^{-\lambda t}} = t - \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

Εφαρμογη 2:

Επιβατες φθανουν σε σταθμο λεωφ με $PP(\lambda)$
Το λεωφορειο φευγει καθε T-χρονικές μονάδες και εχει απειρη χωρητικοτητα.
Αν τη στιγμή 0 αναχωρει λεωφ, ο αριθμός επιβατων που θα μπουν στο επόμενο είναι $N(T)$. Ενας πελάτης που φθανει τη στιγμή S_i περιμένει $T-S_i$



$$\bar{W}=\frac{1}{N(T)}\sum_{i=1}^{N(t)}(T-S_i)$$

$$E[\bar{W} \mid N(T)=n]=\ ?$$

Λυση: $E[\bar{W} \mid N(T)=n]=E\left[\frac{1}{N(T)}\sum_{i=1}^{N(T)}(T-S_i) \mid N(t)=n\right]$

$$=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(T-S_i) \mid N(t)=n\right]$$

$$=T-\frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}S_i \mid N(t)=n\right]$$

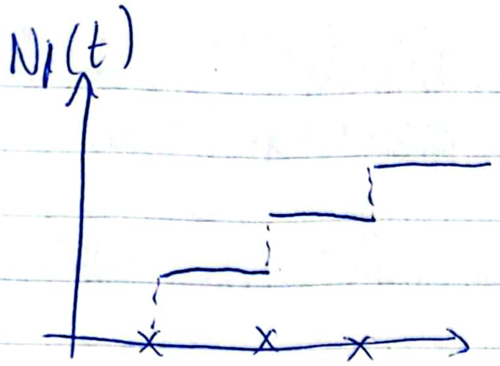
Cambell $=T-\frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}\tilde{U}_i\right]=T-\frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}U_i\right]=$

$$=T-\frac{1}{n}\,n\,\frac{T}{2}=\frac{T}{2}$$

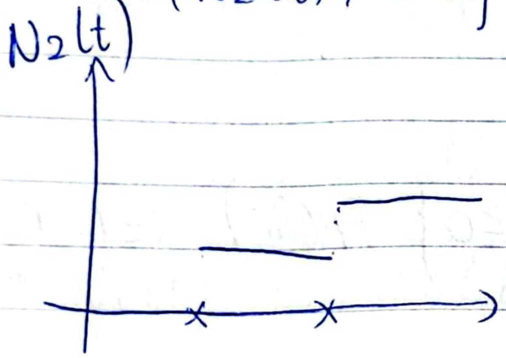
1.4 Υπερθεση κ' Εκλεπτυνση Poisson

Υπερθεση Poisson

$\{N_1(t), t\geq 0\}$ $PP(\lambda_1)$

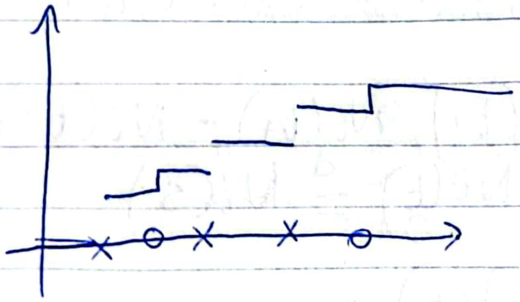


$\{N_2(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda_1)$



$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$
$\{N(t), t \geq 0\}$

$PP(\lambda_2)$



$Z_k = \begin{cases} 1, \text{ αν το } k\text{-οστό γεγονός ήρθε από την } \{N_1(t), t \geq 0\} \\ 2, \text{ 〃 } \{N_2(t), t \geq 0\} \end{cases}$

Θεώρημα

$\{N_i(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda_i)$, $i = 1..r$

$\{N_i(t), t \geq 0\}$ ανεξάρτητες

$\{N(t), t \geq 0\}$ όπου

$N(t) = N_1(t) + N_2(t) + .. + N_r(t)$
δηλ. $\{N(t), t \geq 0\}$ η υπέρθεση των παραπάνω

Scanned with CamScanner

$\{N(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda)$
όπου $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_r$

Απόδειξη

Αρκεί νδο
a) $N(0)=0$,
β) ανεξ και ομογ προσαυξ.
γ) $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

Γνωρίζουμε ότι $\{N_i(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda_i)$ $i=1 \ldots r$
όπου
(i) $N_i(0)=0$
(ii) $\forall t_1, t_2, t_3, t_4$ με $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq t_4$

$$N_i(t_2) - N_i(t_1), \; N_i(t_4) - N_i(t_3) \text{ ανεξ}$$

(iii) $\forall t, s \geq 0$ $N_i(t+s) - N_i(t) \overset{d}{=} N_i(s)$

(iv) $N_i(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_i t)$

- Έχουμε, $N(0) = \sum_{i=1}^{r} N_i(0) \overset{(i)}{=} 0$ (a) ✓

- Θεωρούμε ότι $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$

$$N(t_2) - N(t_1) = \sum_{i=1}^{r} \left(N_i(t_2) - N_i(t_1)\right)$$

$$N(t_4) - N(t_3) = \sum_{i=1}^{r} \left(N_i(t_4) - N_i(t_3)\right)$$

(* κάθε όρος του πάνω αθροίσματος είναι ανεξάρτητο του κάτω.)

$N(t_2)-N(t_1), N(t_4)-N(t_3)$ ανεξ. λόγω (ii) και ανεξαρτησίας $\{N_i(t), t\geq 0\}$ ✓

- Έστω $t, s \geq 0$

$$\left.\begin{aligned} N(t+s)-N(t) &= \sum_{i=1}^{r}\left(N_i(t+s)-N_i(t)\right) \\ N(s) &= \sum_{i=1}^{r} N_i(s) \end{aligned}\right\} \overset{(iii)}{\Longrightarrow}$$

$$N(t+s)-N(t) \overset{d}{=} N(s) \quad ✓$$

- $N_i(t) \sim Poisson(\lambda_i t)$

$$P_{N_i(t)}(s) = E\left[e^{sN_i(t)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{sn} P(N_i(t)=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{sn} e^{-\lambda_i t} \frac{(\lambda_i t)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \frac{(\lambda_i t e^s)^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda_i t} e^{\lambda_i t e^s} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t e^s} \frac{(\lambda_i t e^s)^n}{n!}}_{=1}$$

$$= e^{-\lambda_i t(1-e^s)}$$

$$P_{N(t)}(s) = E\left[e^{sN(t)}\right] = E\left[e^{s(N_1(t)+\dots+N_r(t))}\right] =$$

$= E[e^{sN_1(t)}]E[e^{sN_2(t)}]\ldots E[e^{sN_r(t)}]$

$= e^{-\lambda_1 t(1-e^s)} \cdots e^{-\lambda_r t(1-e^s)}$

$= e^{-(\lambda_1 + \ldots + \lambda_r)t(1-e^s)}$

$\Rightarrow N(t) \sim Poisson(\lambda t)$ όπου $\lambda_1 + \ldots + \lambda_r$

Scanned with CamScanner