1/6/21 $\qquad$ 23ο ΜΑΘΗΜΑ

Λήμμα

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ martingale ως προς $\{Y_n\}$ και T Markov time για την $\{X_n, n\geq 0\}$

Αν $X_{T\wedge n} = \begin{cases} X_n, & n \leq T \\ X_T, & n > T \end{cases}$, $n = 0, 1, \ldots$

stopped process

τότε $\{X_{T\wedge n}, n \geq 0\}$ είναι martingale ως προς $\{Y_n, n\geq 0\}$

Απόδειξη:

$$X_{T\wedge n} = \sum_{k=0}^{n-1} X_k I_{\{T=k\}} + X_n I_{\{T\geq n\}}$$

θδο η $\{X_{T\wedge n}, n\geq 0\}$ είναι martingale

i) $E[|X_{T\wedge n}|] = E\left[\left|\sum_{k=0}^{n-1} X_k I_{\{T=k\}} + X_n I_{\{T\geq n\}}\right|\right]$

$\leq E\left[\sum_{k=0}^{n-1} |X_k| I_{\{T=k\}} + |X_n| I_{\{T\geq n\}}\right]$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E\left[|X_k| I_{\{T=k\}}\right] + E\left[|X_n| I_{\{T\geq n\}}\right] < \infty$$

ii) $E\left[X_{T\wedge(n+1)} \mid Y_0, \dots, Y_n\right] = X_{T\wedge n}$

Έχω $E\left[X_{T\wedge(n+1)} \mid Y_0, \dots, Y_n\right]$

$$E\Big[\sum_{k=0}^{n} \underbrace{X_k}_{\substack{\text{συνάρτηση} \\ \text{των } Y_0,\dots,Y_k}} \underbrace{I_{\{T=k\}}}_{\substack{\Downarrow \text{ Markov time} \\ \text{ως προς } \{X_n, n\geq 0\}}} + X_{n+1} \underbrace{I_{\{T\geq n+1\}}}_{\text{συνάρτηση των } X_0,\dots,X_n} \Big| Y_0, \dots, Y_n\Big]$$

$I_{\{T=k\}}$ συνάρτηση των $X_0, \dots, X_k$

$\Downarrow$ $\{X_n, n\geq 0\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n\geq 0\}$

$I_{\{T=k\}}$ εξαρτάται από $Y_0, \dots, Y_k$

$\downarrow$ συναρτ. των $Y_0, \dots, Y_n$

$$\sum_{k=0}^{n} X_k I_{\{T=k\}} + I_{\{T\geq n+1\}} \underbrace{E(X_{n+1} \mid Y_0, \dots, Y_n)}_{\substack{\Downarrow\ \{X_n, n\geq 0\} \text{ martingale ως προς } \{Y_n, n\geq 0\} \\ X_n}} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} X_k I_{\{T=k\}} + I_{\{T\geq n+1\}} X_n = X_{T\wedge n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} X_k I_{\{T=k\}} + X_n I_{\{T\geq n\}} + \underbrace{X_n I_{\{T\geq n+1\}}}_{X_n I_{\{T\geq n\}}} =$$

iii) $X_{T\wedge n} = \sum_{k=0}^{n-1} X_k I_{\{T=k\}} + X_n I_{\{T\geq n\}}$

συνάρτηση των $Y_0, \dots, Y_n$

Άρα, $\{X_{T\wedge n}, n\geq 0\}$ είναι martingale ως προς $\{Y_n, n\geq 0\}$

Συμπέρασμα, $E[X_{T\wedge n}] = E[X_{T\wedge 0}] = EX_0$

$$X_{T\wedge 0} = \begin{cases} X_0, & 0\leq T \\ X_T, & 0>T \quad \times \end{cases}$$

Πόρισμα

Αν $\{X_n, n\geq 0\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n\geq 0\}$ και T Markov time ως προς $\{X_n, n\geq 0\}$ τότε $E(X_0) = E(X_{T\wedge n}) = E(X_n)$, $\forall n$

Σημείωση:

Κάτω από ορισμένες συνθήκες $E(X_{T\wedge n}) \to E(X_T)$

Άρα τότε $E(X_T) = E(X_0) = E(X_n)$

Θεώρημα:

Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n\geq 0\}$ και T χρόνος Markov ως προς $\{X_n, n\geq 0\}$ με $P(T<\infty)=1$

Αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:

i) $E\left[\sup|X_{T\wedge n}|\right]<\infty$.

ii) $E|X_T|<\infty$ και $\lim\limits_{n\to\infty} E\left[|X_n| I_{\{T\geq n\}}\right]=0$

πιο εύκολες να δειχθούν
iii) $\exists\, c : P(T\leq c)=1$

iv) $\exists\, c : |X_n|\leq c$

v) $E(T)<\infty$ και $\exists\, c : E\left[|X_{n+1}-X_n| \mid Y_0,\dots,Y_n\right]\leq c \quad \forall n\leq T$

Τότε, $E(X_T)=E(X_0)$.

Η παραπάνω σχέση λέει ότι σε ένα δίκαιο παιχνίδι (martingale), αν ο παίκτης χρησιμοποιήσει ένα stopping time για να αποχωρήσει από το παιχνίδι, τότε η αναμενόμενη αμοιβή του $E(X_T)$ θα είναι ίση με την αρχική $E(X_0)$

<u>Εφαρμογή 1</u> Ισότητα Wald

Έστω $\{Y_n, n=1,2,\dots\}$ ακ. ανεξ. και ισ. τ.μ. με $E(Y_n)=\mu$, $Var(Y_n)=\sigma^2<\infty$ και T χρόνος Markov για την $\{Y_n, n\geq 1\}$ με $E(T)<\infty$ και $P(T<\infty)=1$

Τότε, $E\left[\sum\limits_{i=1}^{T} Y_i\right]=E(T)\cdot\mu$

Απόδειξη:

$\{X_n, n\geq 1\}$ $\quad \overbrace{E(X_T)}^{} = E(X_0) \Rightarrow \underbrace{E\left(\sum_{i=1}^{T} Y_i\right) - E(T)\mu}_{E(X_T)}$

$= 0$

$$X_T = \sum_{i=1}^{T} Y_i - T\mu$$

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i - n\mu$$

θέτουμε $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i - n\mu = \sum_{i=1}^{n} Y_i - nE(Y_i)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - E(Y_i)\right)$$

$\{X_n, n\geq 1\}$ martingale ως προς $\{Y_n\}$

ΘΔΟ ισχύει κάποια από τις συνθήκες του θεωρήματος. Θ.δ. η (v)

$P(T<\infty) = 1$, $E(T)<\infty$ από υπόθεση

$E\left[|X_{n+1} - X_n| \,|\, Y_0, \dots, Y_n\right] = E\left[\left|\sum_{i=1}^{n+1} Y_i - (n+1)\mu - \sum_{i=1}^{n} Y_i + n\mu\right| \,\Big|\, Y_0, \dots, Y_n\right] =$

$E\left[|Y_{n+1} - \mu| \,|\, Y_0, \dots, Y_n\right] \leq E\left[|Y_{n+1}| \,|\, Y_0, \dots, Y_n\right]$

$+ \mu = 2\mu < \infty$

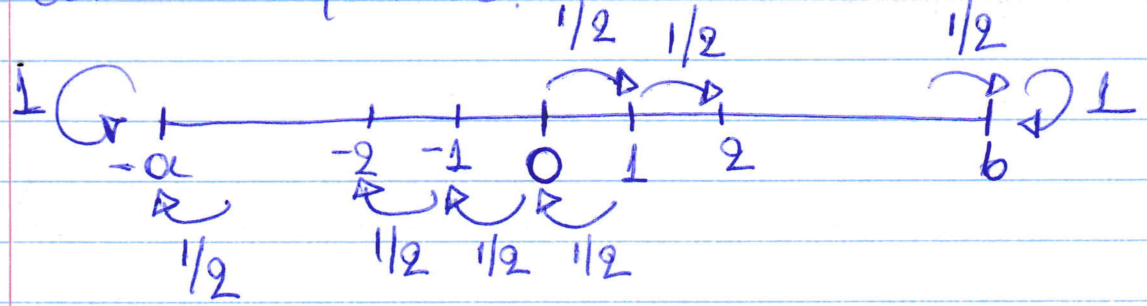
Άρα από θεώρημα .

$$E(X_T)=E(X_1) \Rightarrow E\left(\sum_{i=1}^{T} Y_i - T\mu\right) = E(Y_1-\mu) \Rightarrow$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{T} Y_i\right) - \mu E(T) = \underbrace{E(Y_1)}_{\mu} - \mu \Rightarrow E\left(\sum_{i=1}^{T} Y_i\right) = E(T)\mu$$

Εφαρμογή 2

Υπολογισμός πιθανοτήτων απορρόφησης και μέσων χρόνων απορρόφησης σε απλό τυχαίο περίπατο.



$$Y_n = \begin{cases} 1, & \text{αν γίνεται βήμα προς τα δεξιά} \\ -1, & \text{αν γίνεται βήμα προς τα αριστερά.} \end{cases}$$

$\{Y_n, n \geq 1\}$ ακ. ανεξ. και ισ. τ.μ. με $E(Y_n)=0$

$E(Y_n^2)=\underline{1}$, $Var(Y_n)=E(Y_n^2)-E^2(Y_n)=\underline{1}$

X_n: θέση μετά το n-οστό βήμα

$X_1 = 0$

$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ martingale ως προς $\{Y_n, n \geq 1\}$

α) πιθ. απορρόφησης στο $-\alpha$ και στο $+b$ =;

T = στιγμή απορρόφησης στο $\{-\alpha, b\}$

$\{T=k\}$ εξαρτάται από τις $X_0, X_1, \dots, X_k \Rightarrow$

T χρόνος Markov ως προς $\{X_n, n\geq 0\}$

Αν ισχύει το θεώρημα έχουμε

$$E(X_T) = E(X_0) \Rightarrow E\left(\sum_{i=1}^{T} Y_i\right) = 0 \Rightarrow$$

$$-\alpha \cdot P(X_T=-\alpha) + b\,P(X_T=b) = 0 \Rightarrow$$

$$-\alpha P(X_T=-\alpha) + b(1-P(X_T=-\alpha)) = 0 \Rightarrow$$

$$-\alpha P(X_T=-\alpha) - b\,P(X_T=-\alpha) = -b \Rightarrow$$

$$P(X_T=-\alpha) = \frac{b}{\alpha+b}$$

$$P(X_T=b) = \frac{\alpha}{\alpha+b}$$

πρέπει νδο ισχύει κάποια από τις συνθήκες:

$$|X_n| \leq \underbrace{\max\{|\alpha|, |b|\}}_{\text{σταθερά}}$$

ii) Να βρεθεί η $E(T)$

Hint: έστω $S_n = \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 - n$ νδο είναι martingale ως προς την $\{Y_n, n \geq 1\}$, θα υποθέσουμε ότι ισχύει κάποια από τις συνθήκες του θεωρήματος.

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα για να υπολογίσουμε την $E(T)$

Δείχνουμε ότι $\{S_n, n \geq 0\}$ με $S_n = \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 - n$ martingale ως προς $\{Y_n, n \geq 1\}$

i) $E[|S_n|] = E\left[\left|\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 - n\right|\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2\right] + n$

ii) $E[S_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} Y_i\right)^2 - (n+1) \middle| Y_1, \dots, Y_n\right]$

$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i + Y_{n+1}\right)^2 \middle| Y_1, \dots, Y_n\right] - n - 1 =$

$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) Y_{n+1} + Y_{n+1}^2 \middle| Y_1, \dots, Y_n\right] - n - 1$

$= \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} Y_i \, E[Y_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n] + E[Y_{n+1}^2 | Y_1, \dots, Y_n]$

$- n - 1$

$= \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot 0 + \cancel{1} - n - \cancel{1} = \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 - n$

$= S_n$

ii) $S_n = \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 - n$ συνάρτηση των $Y_1, \ldots, Y_n$

Υποθέτοντας ότι ισχύει μία από τις συνθήκες του θεωρήματος, έχω

$E[S_T] = E[S_1] \Rightarrow$

$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 - T\right] = E[Y_1^2 - 1] = 0 \Rightarrow$

$P\left(\sum_{i=1}^{T} Y_i = -a\right)(-a)^2 + P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i = b\right) b^2 -$

$E(T) = 0 \Rightarrow$

$\frac{b}{a+b} a^2 + \frac{a}{a+b} b^2 = E(T) \Rightarrow$

$\frac{ab\cancel{(a+b)}}{\cancel{a+b}} = E(T) \Rightarrow E(T) = ab$