22^{ο} ΜΑΘΗΜΑ

27/5/2021

(παράδειγμα 2: συνέχεια)

Ακόμη, $E[X_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n] =$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - E(Y_i | Y_1, \dots, Y_n)\right) \Big| Y_1, \dots, Y_n\right] =$$

Ξεχωρίζω το $i = n+1$ γιατί μέχρι $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ εξαρτ. από $Y_1, \dots, Y_n$

$$E\left[Y_{n+1} - E[Y_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n] \Big| Y_1, \dots, Y_n\right] +$$

$$E\left[\overbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - E(Y_i | Y_1, \dots, Y_{i-1})\right)}^{\text{συνάρτηση των } Y_1, \dots, Y_n} \Big| Y_1, \dots, Y_n\right]$$

$$= E[Y_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n] - E\left[\underbrace{E[Y_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n]}_{\text{συνάρτηση των } Y_1, \dots, Y_n} \Big| Y_1, \dots, Y_n\right]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - E(Y_i | Y_1, \dots, Y_{i-1})\right) =$$

$$\overset{\text{ιδ. πλήρους}}{\underset{\text{εξάρτησης}}{=}} \cancel{E(Y_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n)} - \cancel{E[Y_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n]} + X_n$$

$$= X_n$$

Τέλος, $X_n = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \underbrace{E(Y_i | Y_1, \dots, Y_n)}_{\text{συνάρτηση των } Y_1, \dots, Y_{i-1}}\right)$ συνάρτηση

των $Y_1, \dots, Y_n$

$E(X)$: σταθερός αριθμός

$E(X|Y=y)$: σταθερός αριθμός συνάρτηση της y

παράδειγμα 3

Αν X τ.μ. με $E|X|<\infty$ και $Y_1, \dots$ ακολ. τ.μ. Τότε, αν $X_n = E[X|Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$ νδο η $\{X_n, n\geq 1\}$ είναι martingale ως προς $\{Y_n, n\geq 1\}$

Λύση

Έχουμε $E|X_n| = E\big[\,|E[X|Y_1,\dots,Y_n]|\,\big] \leq$

$$E\big[E[|X|\,|Y_1,\dots,Y_n]\big] \underset{\Theta\Delta\mathrm{MT}}{=} E[|X|] < \infty, \ \forall n$$

Επίσης, $E[X_{n+1}|Y_1,\dots,Y_n] =$

$$E\big[E[X|Y_1,\dots,Y_{n+1}]\,|Y_1,\dots,Y_n\big] \underset{\text{ιδ. πύργου}}{=} E[X|Y_1,\dots,Y_n] = X_n$$

$$E[X|Z] = E\big[E[X|Y,Z]\,|Z\big]$$

Τέλος, $X_n = E[X|Y_1,\dots,Y_n]$ συνάρτηση των $Y_1,\dots,Y_n$

παράδειγμα 4

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ. $S = \mathbb{N}$ και πιθ. μετ. $P_{ij} = \frac{e^{-1}}{(j-i)!}$, $i = 0, 1, \ldots$, $j = i, i+1, i+2, \ldots$ και $E(X_0) < \infty$. Νδο η $\{Y_n, n \geq 0\}$ με $Y_n = X_n - n$, $n = 0, 1, \ldots$ είναι martingale ως προς $\{X_n, n \geq 0\}$

Λύση

αρχικά θδο

$$E[Y_{n+1} \mid X_0, X_1, \ldots, X_n] = Y_n$$

Έχουμε $E[Y_{n+1} \mid X_0, X_1, \ldots, X_n] =$

$E[X_{n+1} - (n+1) \mid X_0, X_1, \ldots, X_n] =$

$E[X_{n+1} \mid X_0, X_1, \ldots, X_n] - (n+1) \overset{\text{Markov}}{\underset{\text{Ιδιότητα}}{=}}$

$E[X_{n+1} \mid X_n] - (n+1)$

Θα υπολογίσουμε $E[X_{n+1} | X_n = i] =$

$$\sum_{j=i}^{\infty} j \, P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

$$= \sum_{j=i}^{\infty} j \, P_{ij} = \sum_{j=i}^{\infty} j \frac{e^{-1}}{(j-i)!}$$

$$\underline{\underline{k=j-i}} \; \frac{1}{e} \sum_{k \geq 0} \frac{k+i}{k!} =$$

$$= \frac{1}{e} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{k}{k!} + \sum_{k \geq 0} \frac{i}{k!} \right)$$

$$= \frac{1}{e} \left(\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k-1)!} + i \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \right)$$

$$= \frac{1}{e} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} + ie \right)$$

$$= \frac{1}{e} (e + ie) = 1 + i$$

Άρα, $E[X_{n+1} | X_n] = 1 + X_n \quad (1)$

Οπότε, $E[Y_{n+1} | X_0, \ldots, X_n] = 1 + X_n - (n+1)$

$$= X_n - n$$

$$= Y_n$$

Επίσης, $E|Y_n| = E|X_n - n| \leq E|X_n| + n \overset{X_n>0}{=\!=} EX_n + n$

Όμως, $E(X_n) = E\left[E[X_n | X_{n-1}]\right] \overset{(1)}{=\!=} E(1+X_{n-1})$

Δεσμεύω ως προς X_{n-1} λόγω της (1)

$\Rightarrow E(X_n) = E(X_{n-1}) + 1 = E(X_{n-2}) + 1 + 1 = \cdots$

$= E(X_0) + n$

$E|Y_n| \leq E[X_n] + n = E(X_0) + n + n = \underbrace{E(X_0) + 2n}_{<\infty}$

iii) $Y_n = X_n - n$ συνάρτηση της X_n

<u>Ορισμός</u> (Χρόνος Markov - Stopping Time)

Έστω $\{Y_0, Y_1, \dots\}$ ακ. τ.μ. Η τ.μ. T λέγεται <u>χρόνος Markov</u> για την ακολουθία $\{Y_n, n\geq 0\}$ αν το ενδεχόμενο $\{T=n\}$ εξαρτάται από τις $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$. Δηλαδή T ο χρόνος Markov για την $\{Y_n, n\geq 0\} \Leftrightarrow I_{\{T=n\}}$ είναι συνάρτηση των $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$

Αν επιπλέον $P(T<\infty)=1$, ο χρόνος T λέγεται stopping time (χρόνος στάσης)

<u>π.χ.</u> σε ΜΑΔΧ αν η $\{Y_n, n\geq 0\}$ είναι ΜΑΔΧ χρόνος $1^{ης}$ εισόδου είναι χρόνος Markov.

<u>παράδειγμα</u>

Έστω $\{Y_n, n\geq 0\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ. S και $A\subseteq S$. Ο $T=\inf\{n\geq 0: Y_n \in A\}$ είναι χρόνος Markov ως προς $\{Y_n, n\geq 0\}$

διότι

$$\{T=n\}=\{Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}\notin A, Y_n \in A\}$$

<u>Ιδιότητες χρόνων Markov</u>

Έστω $\{Y_n, n\geq 0\}$ ακολουθία τ.μ. ισχύουν τα παρακάτω:

1) T χρόνος Markov για $\{Y_n, n\geq 0\} \Leftrightarrow$

$\{T\leq n\}$ εξαρτάται από τις $Y_0, \dots, Y_n \Leftrightarrow$

$\{T>n\}$ εξαρτάται από τις $Y_0, \dots, Y_n$

2) T χρόνος Markov για $\{Y_n, n\geq 0\} \Longleftrightarrow$

$\{T<n\}$ εξαρτάται από $Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1} \Longleftrightarrow$

$\{T\geq n\}$ εξαρτάται από $Y_0, \dots, Y_{n-1}$

3) Εάν S, T χρόνοι Markov ως προς $\{Y_n, n\}$

$\Longrightarrow$ • $S+T$ χρόνος Markov ως προς $\{Y_n\}$

• $\min\{S, T\} = S \wedge T$ χρόνος Markov ως προς $\{Y_n\}$

• $\max\{S, T\} = S \vee T$ χρόνος Markov ως προς $\{Y_n, n\geq 0\}$

<u>Απόδειξη</u>

1) ($\Longrightarrow$) Έστω T χρόνος Markov ως προς $\{Y_n, n\geq 0\} \Longrightarrow$

$I_{\{T=n\}}$ συνάρτηση των $Y_0, \dots, Y_n$

$I_{\{T\leq n\}} = \sum_{i=0}^{n} I_{\{T=i\}}$ συνάρτηση των $Y_0, \dots, Y_n$

($\Longleftarrow$) Έστω $I_{\{T\leq n\}}$ συνάρτηση των $Y_0, \dots, Y_n$

$I_{\{T=n\}} = I_{\{T\leq n\}} - I_{\{T\leq n-1\}}$ $\left(\{T=n\} = \{T\leq n\} \setminus \{T\leq n-1\}\right)$

συνάρτηση των $Y_0, \dots, Y_n$

$\Longrightarrow T$ χρόνος Markov

2) ✓

3) $I_{\{S+T=n\}} = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\underbrace{I_{\{S=i\}}}_{\text{συνάρτηση των } Y_0,\dots,Y_i} \; \underbrace{I_{\{T=n-i\}}}_{\text{συνάρτηση των } Y_0,\dots,Y_{n-i}}}_{\text{συνάρτηση των } Y_0,\dots,Y_n}$

$\Longrightarrow S+T$ χρόνος Markov ως προς $\{Y_n\}$

$I_{\{S\wedge T>n\}} = \underbrace{\underbrace{I_{\{S>n\}}}_{\text{συνάρτηση των } Y_0,\dots,Y_n} \; \underbrace{I_{\{T>n\}}}_{\text{συνάρτηση των } Y_0,\dots,Y_n}}_{\text{συνάρτηση των } Y_0,\dots,Y_n}$

$\Longrightarrow S\wedge T$ χρόνος Markov ως προς $\{Y_n, n\geq 0\}$

• $I_{\{S\vee T\leq n\}} = \underbrace{I_{\{S\leq n\}} \, I_{\{T\leq n\}}}_{\text{συνάρτηση των } Y_0,\dots,Y_n}$

$\Longrightarrow S\vee T$ χρόνος Markov ως προς $\{Y_n\}$

Ερώτημα

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ martingale ως προς $\{Y_n\}$ δηλαδή $EX_0 = EX_1 = EX_2 = \dots$ Αν T Markov time ως προς $\{X_n, n \geq 0\}$ τότε $E(X_T) \overset{?}{=} E(X_0)$

Απάντηση: Όχι πάντα!

Λήμμα 1

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ martingale ως προς $\{Y_n\}$ και T χρόνος Markov ως προς $\{X_n, n \geq 0\}$

Τότε, $E[X_n I_{\{T=k\}}] = E[X_k I_{\{T=k\}}], n \geq k$

Απόδειξη:

$$E[X_n I_{\{T=k\}}] \underset{\substack{\text{T Markov} \\ \text{time} \\ \text{ΘΔΜΤ}}}{\overset{\substack{\{X_n\} \\ \text{martingale}}}{=}} E\left[E[\underbrace{X_n I_{\{T=k\}}}_{\substack{\text{συνάρτηση} \\ \text{των } Y_0, \dots, Y_k}} | Y_0, \dots, Y_k]\right]$$

$$= E\left[I_{\{T=k\}} \underbrace{E[X_n | Y_0, \dots, Y_k]}\right]$$

$$= E[I_{\{T=k\}} X_k]$$

$$E(X_{n+k} | Y_0, \dots, Y_n) = X_n$$