21ο ΜΑΘΗΜΑ

25/5/2021

4.4 Αντίστροφη ΜΑΣΧ και αντιστρεψιμότητα

ΟΡΣ (Αντίστροφη ΜΑΣΧ)

Έστω $\{X(t)\}$ ΜΑΣΧ με χ.κ. S, πίνακα ρυθμών μετάβασης $Q=[q_{ij}]_{i,j\in S}$

στάσιμη κατανομή $p=[p_i]_{i\in S}$ και αρχική

κατανομή τη στάσιμη $p(0)=p$. Έστω,

$\hat{X}(t)=X(t_0-t)$ όπου t_0 μια σταθερή χρονική στιγμή. Τότε, η $\{\hat{X}(t)\}$ λέγεται αντίστροφη της $\{X(t)\}$ ως προς την t_0, είναι ΜΑΣΧ με στάσιμη κατανομή

$\hat{p}=[\hat{p}_i]_{i\in S}=[p_i]_{i\in S}$ και π.ρ.μ.

$\hat{Q}=[\hat{q}_{ij}]_{i,j\in S}$ όπου $p_i q_{ij}=p_j\hat{q}_{ji} \Leftrightarrow \hat{q}_{ji}=\dfrac{p_i q_{ij}}{p_j}$

ΟΡΣ (Αντιστρέψιμη ΜΑΣΧ)

Έστω $\{X(t)\}$ ΜΑΣΧ με χ.κ. S, π.ρ.μ. Q

στάσιμη $p=[p_i]$ και $\{\hat{X}(t)\}$ μία αντιστρέψιμη της. Η $\{X(t)\}$ λέγεται αντ/μη αν οι $\{X(t)\}$ και $\{\hat{X}(t)\}$ είναι στοχαστικά ισοδύναμες $\Longleftrightarrow q_{ij}=\hat{q}_{ij} \Longleftrightarrow$

$$p_{ij} = \frac{P_j\, p_{ji}}{P_i} \Leftrightarrow P_i\, p_{ij} = P_j\, p_{ji}\ ,\ \forall i, j \in S$$

βλ. λεπτομέρειες 10.

<u>Θεώρημα</u> (Κριτήριο Αντιστρεψιμότητας Kolmogorov)

Έστω $\{X(t)\}$ ΜΑΣΧ με χ.κ. S και π.ρ.μ. Q

Η $\{X(t)\}$ είναι αντιστρέψιμη ανν $\forall$ κύκλο καταστάσεων $i_0, i_1, \ldots, i_n, i_0$ ισχύει

$$p_{i_0 i_1}\, p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}\, p_{i_n i_0} = p_{i_0 i_n}\, p_{i_n i_{n-1}} \cdots p_{i_2 i_1}\, p_{i_1 i_0}$$

5. Martingales

<u>Υπενθύμιση</u>: <u>Δεσμευμένη Μέση Τιμή - Ιδιότητες</u>

Αν (X,Y) τ.μ. (συνεχής ή διακριτή) τότε

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad \text{για } y: f_Y(y) \neq 0$$

$$m_{X|Y}(y) = E(X|Y=y) = \begin{cases} \sum_x x\, f_{X|Y}(x|y), & X: \text{διακ.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\, dx, & X: \text{συν.} \end{cases}$$

$E(X|Y) = m_{X|Y}(Y)$: τυχαία μεταβλητή, συν. της τ.μ. Y η οποία ελαχ. την $E[(X-g(Y))^2]$ δηλ. είναι η συν. της Y που βρίσκεται "πιο κοντά" στην X.

Ιδιότητες:

1) Διπλή μέση τιμή: $E(X) = E(E(X|Y))$

2) πλήρης εξάρτηση: αν $X = g(Y) \Rightarrow$

$$E(X|Y) = X$$

3) Ιδιότητα ανεξαρτησίας:

Αν X, Y ανεξ. τότε $E(X|Y) = E(X)$

4) Γραμμικότητα: $E(\alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n | Y) =$

$\alpha_1 E(X_1|Y) + \ldots + \alpha_n E(X_n|Y)$

5) Αν $X \geq 0 \Rightarrow E(X|Y) \geq 0$

6) Ιδιότητα πύργου: $E(X|Z) = E[E(X|Y,Z))$

7) Παραγοντική Ιδιότητα: $E[g(Z) \cdot X|Z] =$

$$g(Z) E[X|Z]$$

8) Επεκτεταμένη Ανεξ.

Z ανεξ. $X, Y \Rightarrow E(X|Y,Z) = E(X|Y)$

Ορισμοί (Martingales, Submartingales, Supermartingales)

Έστω $\{Y_1, Y_2, \dots\}$ ακ. τ. μ.

Η ακ. $\{X_1, X_2, \dots\}$ είναι <u>martingale</u> ως προς την $\{X_n, n \geq 1\}$ αν

i) $E|X_n| < \infty, \forall n \geq 1$
ii) $E(X_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n) = X_n, \forall n$
iii) Το X_n είναι συνάρτηση των $Y_1, \dots, Y_n, \forall n$

Η ακολουθία $\{X_1, X_2, \dots\}$ είναι <u>submartingale</u> ως προς την $\{Y_n, n \geq 1\}$ αν

i) $E|X_n| < \infty, \forall n$
ii) $E(X_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n) \geq X_n \quad \forall n \geq 1$
iii) Το X_n είναι συνάρτηση των $Y_1, \dots, Y_n, \forall n$

Η ακολουθία $\{X_1, X_2, \dots\}$ είναι <u>supermartingale</u> ως προς την $\{Y_n, n \geq 1\}$ αν

i) $E|X_n| < \infty \quad \forall n$
ii) $E(X_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n) \leq X_n, \quad \forall n \geq 1$
iii) Το X_n συνάρτηση των $Y_1, \dots, Y_n, \forall n$

Ιδιότητες Martingales

Έστω $\{X_n, n\geq 1\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n\geq 1\}$. Ισχύουν:

1) $E(X_1)=E(X_2)=\dots$

2) Αν ϕ κυρτή με $E|\phi(X_n)|<\infty$, $\forall n$ τότε η $\{\phi(X_n), n\geq 1\}$ είναι submartingale ως προς $\{Y_n, n\geq 1\}$

3) $E[X_{n+k}|Y_1,\dots,Y_n]=X_n$

4) Αν g συνάρτηση $E[g(Y_1,\dots,Y_n)X_{n+k}|Y_1,\dots,Y_n]$
$$=g(Y_1,\dots,Y_n)\cdot X_n$$

Απόδειξη

1) αρκεί νδο $E(X_{n+1})=E(X_n)$, $\forall n\geq 1$

$$E(X_{n+1})=E\left[E[X_{n+1}|Y_1,\dots,Y_n]\right]\xrightarrow[\text{martingale}]{\{X_n\}}$$
$$E(X_n)$$

2) ϕ κυρτή $\Longrightarrow E[\phi(X)]\geq\phi(E(X))$, $\forall X$ τ.μ.

Για νδο η $\{\phi(X_n)\}$ είναι submartingale

αρκεί νδο

i) $E[|\phi(X_n)|]<\infty, \forall n$

ισχύει από την υπόθεση

ii) $E[\phi(X_{n+1})|Y_1,\dots,Y_n]=\phi(X_n), \forall n$

Πράγματι, $E[\phi(X_{n+1})|Y_1,\dots,Y_n] \overset{\text{Jensen}}{\geq}$

$$\phi(E(X_{n+1})|Y_1,\dots,Y_n) \xrightarrow[]{\{X_n\}\text{ martingale}} \phi(X_n)$$

iii) $\phi(X_n)$ είναι συνάρτηση των $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \forall n$

Πράγματι, $\{X_n\}$ martingale ως προς $\{Y_n\}$

$\Rightarrow X_n$ είναι συνάρτηση των $Y_1,\dots,Y_n$

$\Rightarrow \phi(X_n)$ συνάρτηση των $Y_1,\dots,Y_n$

3) Θ.δ. με επαγωγή

$k=1$: $E(X_{n+1}|Y_1,\dots,Y_n)=X_n$ ισχύει

Έστω ότι ισχύει για k θδο ισχύει για $k+1$
δηλ. θδο $E(X_{n+k+1}|Y_1,\dots,Y_n)=X_n$

$$E(X_{n+k+1}|Y_1,\dots,Y_n)=$$

$$E(\underbrace{E(X_{n+k+1}|Y_1,\dots,Y_{n+k})}_{X_{n+k}}|Y_1,\dots,Y_n)=$$

$E(X_{n+k}|Y_1,\dots,Y_n)=X_n$ από επαγωγική υπόθ.

4) $E[g(Y_1,\dots,Y_n)X_{n+1}|Y_1,\dots,Y_n]=$
$g(Y_1,\dots,Y_n)E[X_{n+k}|Y_1,\dots,Y_n]=g(Y_1,\dots,Y_n)X_n$

<u>Θεώρημα</u> (Ιδιότητες Submartingales)

Έστω $\{X_n, n\geq 1\}$ είναι submartingale ως προς $\{Y_n, n\geq 1\}$. Τότε, ισχύουν:

1) $EX_1\leq EX_2\leq\dots$

2) Αν ϕ κυρτή και αύξουσα και $E|\phi(X_n)|<\infty$ $\forall n$ τότε $\{\phi(X_n), n\geq 1\}$ είναι submartingale ως προς $\{Y_n, n\geq 1\}$

3) $E[X_{n+k}|Y_1,\dots,Y_n]\geq X_n$

4) Αν g μη αρνητική συνάρτηση τότε

$$E[g(Y_1,\dots,Y_n)X_{n+k}|Y_1,\dots,Y_n]\geq g(Y_1,\dots,Y_n)X_n$$

παράδειγμα 1

$\{Y_1, Y_2, \dots\}$ ακ. ανεξάρτητων τ.μ. με $EY_i = 0$, $\forall i$ και $E|Y_i| < \infty$, $\forall i \geq 1$. Αν $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, $n = 1, \dots$ τότε νδο $\{X_n, n \geq 1\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n \geq 1\}$

Λύση

έχουμε $E|X_n| = E\left|\sum_{i=1}^{n} Y_i\right| \leq E\left[\sum_{i=1}^{n} |Y_i|\right] = \sum_{i=1}^{n} E|Y_i| < \infty$, $\forall n \geq 1$

Επίσης, $E[X_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n] =$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n+1} Y_i \middle| Y_1, \dots, Y_n\right] =$$

$$\underbrace{E[Y_1 + \dots + Y_n | Y_1, \dots, Y_n]}_{\substack{\Downarrow \text{ ιδ. πλήρους εξάρτησης} \\ Y_1 + \dots + Y_n \\ \| \\ X_n}} + \underbrace{E[Y_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n]}_{\substack{\Downarrow\ Y_1, \dots \text{ ανεξ.} \\ E(Y_{n+1}) = 0}}$$

$$\Rightarrow E[X_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n] = X_n$$

Τέλος, $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ είναι συνάρτηση των $Y_1, \dots, Y_n$

Άρα, $\{X_n, n \geq 1\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n \geq 1\}$

παράδειγμα 2

Έστω $Y_1, Y_2, \ldots$ ακ. τ.μ. με $E|Y_n| < \infty, \forall n$

Αν $X_n = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - E(Y_i | Y_1, \ldots, Y_n) \right)$ τότε νδο

η $\{X_n, n \geq 1\}$ είναι martingale ως προς

$\{Y_n, n \geq 1\}$

Λύση

Έχουμε $E|X_n| = E\left[\left| \sum_{i=1}^{n} (Y_i - E(Y_i | Y_1, \ldots, Y_{i-1}) \right| \right]$

$$\leq E\left[\sum_{i=1}^{n} \left| Y_i - E[Y_i | Y_1, \ldots, Y_{i-1}] \right| \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E\left[\left| Y_i - E[Y_i | Y_1, \ldots, Y_{i-1}] \right| \right]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left(E|Y_i| + \underbrace{E\left(E(|Y_i| | Y_1, \ldots, Y_{i-1})\right)}_{E(|Y_i|)} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2E|Y_i| < \infty, \forall n$$