$= \lambda E(X(t)) + \lambda$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} E[X(t)] = \cancel{\lambda E[X(t)]} + \lambda - \cancel{\lambda E[X(t)]} \Rightarrow$

$E[X(t)] = \lambda t + c$

για $t=0$: $E[X(0)] = \lambda \cdot 0 + c \Rightarrow$

$$\boxed{0 = c}$$

$E[X(t)] = \lambda t$

18/5/2021 <u>19º ΜΑΘΗΜΑ</u>

<u>4.2 Προσπελασιμότητα / Επικοινωνία Καταστάσεων</u>

<u>ΟΡΣ</u> (προσπελασιμότητα)

Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ χ.κ. S. Η $j \in S$ λέγεται <u>προσπελάσιμη</u> από την i αν

$P_{ij}(t) > 0$ για κάποιο $t > 0$

$\Updownarrow$

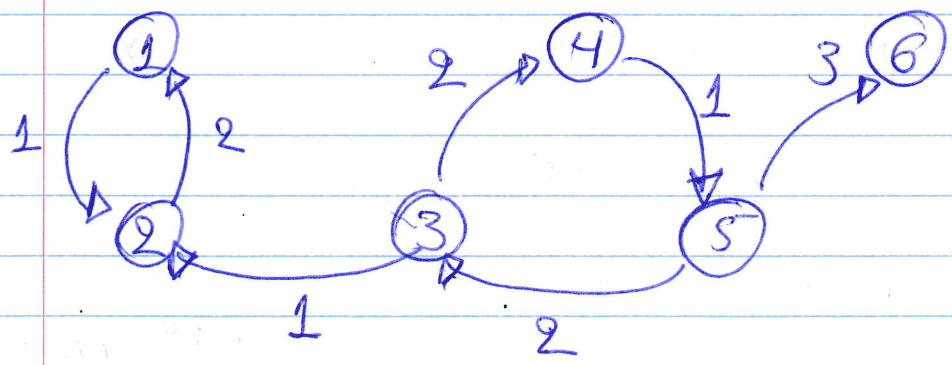
$\exists$ καταστάσεις $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1} \in S$:

$$q_{ii_0} \, q_{i_0 i_1} \, q_{i_1 i_2} \cdots q_{i_{n-1} j} > 0$$

Τότε γράφουμε $i \to j$

παράδειγμα

$\{X(t), t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ



$i \rightarrow 1,\ i \neq 6$

ΟΡΣ (Επικοινωνία)

Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ με χ.κ. S. Οι $i, j \in S$ επικοινωνούν αν $i \rightarrow j$ και $j \rightarrow i$.

Τότε γράφουμε $i \leftrightarrow j$

παράδειγμα (συνέχεια)

$1 \leftrightarrow 2$

$3 \leftrightarrow 4,\ 3 \leftrightarrow 5,\ 4 \leftrightarrow 5$

Θεώρημα

Η επικοινωνία είναι σχέση ισοδυναμίας. Ο χ.κ. S χωρίζεται σε κλάσεις επικοινωνίας.

παράδειγμα

κλάσεις επικοινωνίας: $\{1,2\}, \{3,4,5\}, \{6\}$

Ορισμοί:

Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ με χ.κ. S

- Μια κλάση επικοινωνίας $C \subseteq S$ λέγεται κλειστή αν $\forall i \in C, j \in S \setminus C$, $q_{ij} = 0$
- Μία κλάση επικοινωνίας που δεν είναι κλειστή καλείται ανοιχτή
- Μία ΜΑΣΧ λέγεται αδιαχώριστη αν το S αποτελεί μία κλάση επικοινωνίας.
- Μία κατάσταση $j \in S$ καλείται απορροφητική αν $\{j\}$ αποτελεί κλειστή κλάση επικοινωνίας

παράδειγμα

$\{1,2\}$ κλειστή
$\{3,4,5\}$ ανοιχτή
$\{6\}$ κλειστή $\Rightarrow$ απορροφητική κατάσταση

4.3 Πιθανότητες και μέσος χρόνος $1^{ης}$ εισόδου

Ορισμοί:

Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ με χ.κ. S και π.π.μ. Q. Αν $C \subseteq S$ ορίζουμε τα ακόλουθα

$T_C = \inf\{t \geq 0 : X(t) \in C\}$

: χρόνος $1^{ης}$ εισόδου της ΜΑΣΧ στο C

$h_i(C) = P_r(T_C < \infty / X(0) = i)$

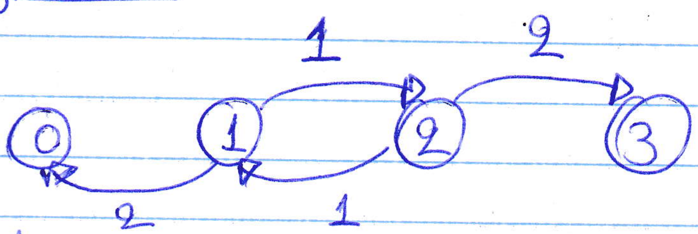
↳ πιθανότητα εισόδου στο C, ξεκινώντας από την i

$m_i(C) = E[T_C / X(0) = i]$

↳ μέσος χρόνος $1^{ης}$ εισόδου στο C ξεκινώντας από την i

παράδειγμα 2

ΜΑΣΧ



$P_1(0) = 1$

α) πιθ. να απορροφηθεί στην $3 = ;$ $h_1(\{3\})$
β) μέσος χρόνος απορ. στην 3 ή 0 $= ;$

Λύση $\underbrace{1^{ης} \text{ μετάβασης}}$

α) Κάνοντας ανάλυση $1^{ου}$ βήματος θα προκύψει σύστημα για τις $h_i(\{3\})$, $i=0,1,2,\dots$

$$h_0(\{3\})=0$$

$$h_1(\{3\})=P_{12}\,h_2(\{3\})+P_{10}\,h_0(\{3\}) \Rightarrow$$

$$h_1(\{3\})=\frac{q_{12}}{q_1}h_2(\{3\})+\frac{q_{10}}{q_1}h_0(\{3\}) \Rightarrow$$

$$h_1(\{3\})=\frac{1}{3}h_2(\{3\})+\frac{2}{3}\cdot 0 \Rightarrow$$

$$h_1(\{3\})=\frac{1}{3}h_2(\{3\}) \quad (2)$$

$$h_2(\{3\})=\frac{1}{3}h_1(\{3\})+\frac{2}{3}h_3(\{3\}) \quad (3)$$

$$h_3(\{3\})=1 \quad (4)$$

$$(3)\xRightarrow{(2),(4)} h_2(\{3\})=\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}h_2(\{3\})+\frac{2}{3}\cdot 1 \rightarrow$$

$$\frac{8}{9}h_2(\{3\})=\frac{2}{3} \rightarrow h_2(\{3\})=\frac{3}{4}$$

και $(2) \Rightarrow h_1(\{3\})=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

β) Θα κάνω ανάλυση 1ου βήματος και θα προκύψει σύστημα για τις $m_i(\{0,3\})$, $i=0,1,2,3$

$m_0(\{3\})=0$ (5)

$m_3(\{0,3\})=0$ (6)

$m_1(\{0,3\})=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}m_2(\{0,3\})+\frac{2}{3}m_0(\{0,3\})$

$\xRightarrow{(5)} m_1(\{0,3\})=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}m_2(\{0,3\})$

$m_2(\{0,3\})=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cancel{m_3(\{0,3\})}^{\to 0}+\frac{1}{3}m_1(\{0,3\})$

$\Rightarrow m_2(\{0,3\})=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}m_1(\{0,3\})$ (8)

$(8)\xRightarrow{(7)} m_2(\{0,3\})=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}m_2(\{0,3\})\right)$

$\Rightarrow m_2(\{0,3\})-\frac{1}{9}m_2(\{0,3\})=\frac{4}{9}\Rightarrow$

$m_2(\{0,3\})=\frac{1}{2}$

(7) $m_1(\{0,3\})=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Θεώρημα

Τα $\{h_i(C) : i \in S\}$ είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του συστήματος.

$$x_i = 1 \ , i \in C$$

$$x_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_{ij}}{q_i} x_j \ , \ i \notin C$$

Τα $\{m_i(C) : i \in S\}$ είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του συστήματος.

$$y_i = 0 \ , \ i \in C$$

$$y_i = \frac{1}{q_i} + \sum_{j \neq i} \frac{q_{ij}}{q_i} \ , \ i \notin C$$

4.4 Επαναληπτικότητα και παροδικότητα καταστάσεων

ΟΡΣ (Χρόνοι και πιθ. $1^{ης}$ επανόδου)

Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ με χ.κ. S έστω $i \in S$ και $X(0) = i$ τότε,

χρόνος $1^{ης}$ επανόδου στην i είναι ο

$$T_i = \inf\{t \geq Y_1 : X(t) = i\}$$

πιθανότητα επανόδου στην i είναι η

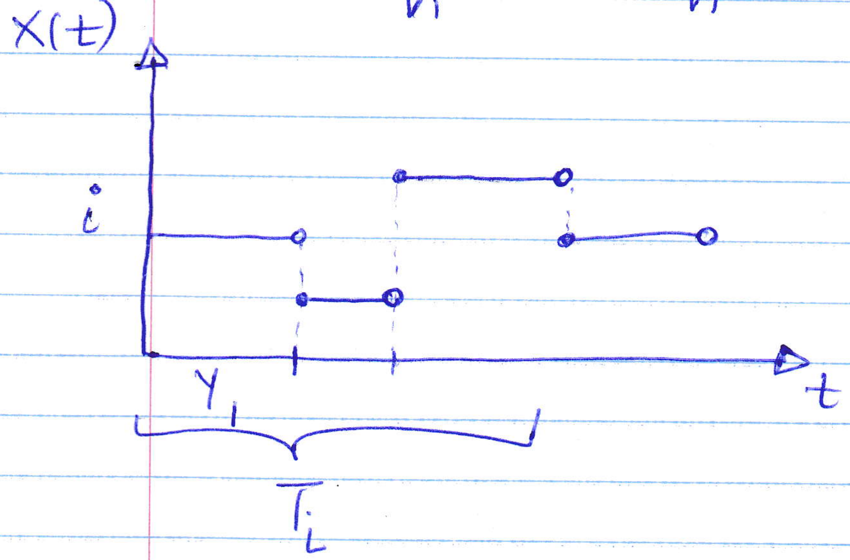
$$h_i = Pr(T_i < \infty \mid X_0 = i) \Rightarrow$$

$$h_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_{ij}}{q_i} h_j(\{i\})$$

και μέσος χρόνος επανόδου στην i είναι ο

$$m_i = E[T_i \mid X(0) = i] \Rightarrow$$

$$m_i = \frac{1}{q_i} + \sum_{j \neq i} \frac{q_{ij}}{q_i} m_j(\{i\})$$



ΟΡΣ (Επαναληπτική/Παροδική Κατάσταση)

Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ ΜΑΕΧ με χ.κ. S και $j \in S$

- Η j ονομάζεται επαναληπτική αν $h_j = 1$

επιπλέον αν $m_j < \infty$, η j ονομάζεται θετικά επαναληπτική ενώ αν $m_j = \infty$, η j ονομάζεται μηδενικά επαναληπτική

- Η j ονομάζεται παροδική αν $h_j < 1$

Ιδιότητες επαναληπτικότητας και παροδικότητας

1) Η επαναληπτικότητα (θετική, μηδενική) και η παροδικότητα είναι ιδιότητες κλάσης επικοινωνίας

2) Κάθε ανοιχτή κλάση είναι παροδική
3) Κάθε πεπερασμένη και κλειστή κλάση είναι θετικά επαναληπτική.

Άσκηση 1 (ΜΑΔΧ).

Λύση

Έστω ότι ισχύουν οι εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας. Για $A=\{j\}$ και $A \subseteq S \setminus \{j\}$

παίρνουμε $\sum_{i \neq j} \pi_j P_{ji} = \sum_{i \neq j} \pi_i P_{ij} \xrightarrow{+\pi_j P_{jj}}$

$$\sum_{i \in S} \pi_j P_{ji} = \sum_{i \in S} \pi_i P_{ij} \Rightarrow$$

$$\pi_j \underbrace{\sum_{j \in S} P_{ji}}_{=1} = \sum_{i \in S} \pi_i P_{ij} \Longrightarrow$$

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i P_{ij}, \forall j \in S$$

άρα προκύπτουν οι εξ. πλήρους ισορροπίας

Έστω ότι ισχύουν οι εξ. πλήρους ισορροπίας

Δηλ. $\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i P_{ij}$, $\forall j \in S$

Για $A \subseteq S$

$$\sum_{j \in A} \pi_j = \sum_{j \in A} \sum_{i \in S} \pi_i P_{ij}$$

$$\sum_{j\in A} \pi_j \sum_{i\in S} P_{ji} = \sum_{j\in A} \cdot \sum_{i\in S} \pi_i P_{ij} \Rightarrow$$

$$\sum_{j\in A} \sum_{i\in S} \pi_j P_{ji} = \sum_{j\in A} \sum_{i\in S} \pi_i P_{ij} \Rightarrow$$

$$\sum_{j\in A}\left(\sum_{i\in A} \pi_j P_{ji} + \sum_{i\in A^c} \pi_j P_{ji}\right) = \sum_{j\in A}\left(\sum_{i\in A} \pi_i P_{ij} + \sum_{i\in A^c} \pi_i P_{ij}\right)$$

$$\cancel{\sum_{j\in A} \sum_{i\in A} \pi_j P_{ji}} + \sum_{j\in A} \sum_{i\in A^c} \pi_j P_{ji} = \cancel{\sum_{j\in A} \sum_{i\in A} \pi_i P_{ij}} + \sum_{j\in A} \sum_{i\in A^c} \pi_i P_{ij}$$

$$\sum_{j\in A} \sum_{i\in A^c} \pi_j P_{ji} = \sum_{i\in A^c} \sum_{j\in A} \pi_i P_{ij} \, , \quad \forall A \subseteq S$$

άρα προκύπτουν οι εξ. γενικευμένης ισορροπίας.