18η ΜΑΘΗΜΑ

13/5/2021

<u>Θεώρημα</u> (Εξισώσεις για τον $P(t)$)

Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ με πίνακα πιθ. μετάβασης σε χρόνο t, $P(t)$, χώρο καταστάσεων S και π.π.μ. Q. Τότε, ο $P(t)$ είναι παραγωγίσιμος ως προς t και:

$$\frac{d}{dt} P(t) = P'(t) = Q P(t)$$

και

$$P'(t) = P(t) \cdot Q$$

με αρχική συνθήκη $P(0) = I$

<u>Απόδειξη:</u>

ΜΑΔΧ $\quad P(t) \updownarrow P^{(n)} = P^n \quad p_{ij}(n+m) = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$

$$P_{ij}(t+h) = \sum_{k \in S} P_{ik}(t) P_{kj}(h)$$

$$h \to 0$$

Υπολογίζω

$$P_{ij}(h) = P(X(h) = j \mid X(0) = i)$$

$$= P(X_{N(h)} = j \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{n \geq 0} P(X_{N(h)} = j \mid X_0 = i, N(h) = n) \cdot P(N(h) = n \mid X_0 = i)$$

πρέπει να ξεκινήσω από

τον υπολογισμό των $P(N(h)=n \mid X_0=i)$

Αρχικά, υπολογίζουμε τις πιθανότητες

$P(N(h)=n \mid X_0=i)$, $n=0,1,2,\dots$, $i\in S$

$$P(N(h)=0 \mid X_0=i) = P(Y_1>h \mid X_0=i) \underline{\underline{\overset{(Y_1|X_0=i)\sim Exp(q_i)}{}}}$$

$$e^{-q_i h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-q_i h)^k}{k!} = 1 - q_i h + \frac{(q_i h)^2}{2!} - \frac{(q_i h)^3}{3!} + \dots$$

Μία συνάρτηση είναι $o(h)$ όταν $\lim_{h\to 0^+} \frac{o(h)}{h} = 0$

$$= 1 - q_i h + o(h)$$

$$\underline{\underline{q_i = -q_{ii}}}\ 1 + q_{ii} h + o(h)$$

$$P(N(h)=1 \mid X_0=i) = P(Y_1 \le h,\ Y_1+Y_2>h \mid X_0=i)$$

$$= \int_0^{\infty} P(Y_1\le h,\ Y_1+Y_2>h \mid X_0=i,\ Y_1=s)\, f_{(Y_1|X_0=i)}(s)\, ds$$

$$= \int_0^{h} P(Y_2>h-s \mid X_0=i,\ Y_1=s)\, f_{(Y_1|X_0=i)}(s)\, ds$$

Δεσμεύω ως προς την κατάσταση που πήγε η αλυσίδα μετά την i

$$= \sum_{j\ne i} \int_0^h P(\underbrace{Y_2>h-s}_{\sim Exp(q_j)} \mid X_1=j, X_0=i, Y_1=s)\, P(X_1=j \mid X_0=i, Y_1=s)\, f_{(Y_1|X_0=s)}(s)\, ds$$

$$= \sum_{j \neq i} \int_0^h e^{-q_j(h-s)} \frac{d}{dy} P(Y_1 \leq y, X_1 = j \mid X_0 = i) \Big|_{y=s} ds$$

$$\left(P(Y_1 > y, X_1 = j \mid X_0 = i) = p_{ij} e^{-q_i y} \right)$$

$$= \sum_{j \neq i} p_{ij} q_i e^{-q_i h} \int_0^h e^{-(q_i - q_j)s} ds$$

$$= \sum_{j \neq i} p_{ij} q_i e^{-q_i h} \frac{1 - e^{-(q_i - q_j)h}}{q_i - q_j}$$

$$= \sum_{j \neq i} \frac{p_{ij} q_i}{q_i - q_j} \left(e^{-q_j h} - e^{-q_i h} \right)$$

$$= \sum_{j \neq i} \frac{p_{ij} q_i}{q_i - q_j} \left(1 - q_j h + o(h) - 1 + q_i h + o(h) \right)$$

$$= \sum_{j \neq i} \frac{p_{ij} q_i}{p_i q_j} \left[(q_i - q_j) h + o(h) \right]$$

$$= \sum_{j \neq i} p_{ij} q_i h + o(h)$$

$$= q_i h \underbrace{\sum_{j \neq i} p_{ij}}_{1} + o(h) = q_i h + o(h)$$

$$P(N(h)=0|X_0=i)=1-q_i h+o(h)$$

$$\left.\begin{aligned}P(N(h)=0|X_0=i)&=1-q_i h+o(h)\\P(N(h)=1|X_0=i)&=q_i h+o(h)\end{aligned}\right\}\Longrightarrow$$

$$P(N(h)\geq 2|X_0=i)=o(h)$$

Τώρα υπολογίζω τις $P_{ij}(h)$

$$\begin{aligned}P_{ii}(h)&=P(X(h)=i|X(0)=i)\\&=P(X_{N(h)}=i|X(0)=i)\\&=\sum_{n\geq 0}P(X_{N(h)}=i|N(h)=n,X(0)=i)\\&\qquad P(N(h)=n|X(0)=i)\\&=P(X_0=i|N(h)=0,X(0)=i)P(N(h)=0|X(0)=i)\\&+P(X_1=i|N(h)=1,X(0)=i)P(N(h)=1|X(0)=i)\\&+o(h)\\&=1(1+q_{ii}h+o(h))+0+o(h)\\&=1+q_{ii}h+o(h)\end{aligned}$$

Για $j\neq i$: $$\begin{aligned}P_{ij}(h)&=P(X_{N(h)}=j|X(0)=i)\\&=P(X_{N(h)}=j|X_0=i)\\&=\sum_{n\geq 0}P(X_{N(h)}=j|N(h)=n,X_0=i)P(N(h)=n|X_0=i)\end{aligned}$$

$$= P(X_0 = j \mid N(h)=0, X_0 = i)\, P(N(h)=0 \mid X_0 = i)$$

$$+ P(X_1 = j \mid N(h)=1, X_0 = i)\, P(N(h)=1 \mid X_0 = i)$$

$$+ o(h)$$

$$= 0 + P_{ij}(q_i h + o(h)) + o(h)$$

$$= \underbrace{P_{ij}\, q_i}\, h + o(h)$$

$$= q_{ij} h + o(h)$$

$$\boxed{P_{ij} = \frac{q_{ij}}{\underbrace{\sum_{j \neq i} q_{ij}}_{\shortparallel \atop q_i}} \qquad q_i P_{ij} = q_{ij}}$$

$$P_{ij}(h) = \delta_{ij} + q_{ij} h + o(h)$$

Από τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov έχουμε:

$$P_{ij}(t+h) = \sum_{k \in S} P_{ik}(h) P_{kj}(t)$$

$$= \sum_{k \in S} \left(\delta_{ik} + q_{ik} h + o(h) \right) P_{kj}(t) \Rightarrow$$

$$P_{ij}(t+h) = \sum_{k \in S} \delta_{ik} P_{kj}(t) + \sum_{k \in S} q_{ik} P_{kj}(t) h + o(h)$$

$$\Rightarrow \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = \sum_{k \in S} q_{ik} P_{kj}(t) + \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h \to 0}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ 1, & j = i \end{cases}$$

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} q_{ik} P_{kj}(t) + 0 \Rightarrow$$

$$P'(t) = Q \cdot P(t)$$

Ομοίως, αν γράψαμε $P_{ij}(t+h) = \sum_{k \in S} P_{ik}(t) P_{kj}(h)$ προκύπτει η $P'(t) = P(t)Q$

Σημείωση: εφόσον $\left.\begin{matrix} P'(t) = P(t) \cdot Q \\ p(t) = p(0) P(t) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$\boxed{p'(t) = p(t) Q}$$

παράδειγμα (μηχανή με 2 καταστάσεις)

$M/M/1/1$ ή αρχ

Μια μηχανή μπορεί να λειτουργεί (κατάσταση 1) ή να είναι χαλασμένη (κατάσταση 0)

Αν λειτουργεί χαλάει με χρόνο εκθετικό με παράμετρο μ. Ο χρόνος επιδιόρθωσης είναι Exp(λ). Οι χρόνοι λειτουργίας και επιδιόρθωσης είναι ανεξ.

$$X(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν δεν λειτουργεί} \\ 1, & \text{αν λειτουργεί.} \end{cases}$$

i) Ν.δ.ο. $X(t)$ ΜΑΣΧ
ii) Να βρεθεί ο Q
iii) Να βρεθεί ο $P(t)$

i) Για ν.δ.ο. είναι ΜΑΣΧ αρκεί

Κατ.	Επομ. Κατ.	Χρόνος
0	1	$Exp(\lambda)$
1	0	$Exp(\mu)$

} Μ/Μ/1/1 είναι ΜΑΣΧ

ii)
$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} \end{array}$$

iii) Υπολογισμός $P(t)$

$$P'(t) = P(t)\cdot Q \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} P_{00}'(t) & P_{01}'(t) \\ P_{10}'(t) & P_{11}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

$P_{00}'(t) = -\lambda P_{00}(t) + \mu P_{01}(t)$ (1) $\quad P_{00}(0) = 1$ (5)

$P_{01}'(t) = -\lambda P_{00}(t) + \mu P_{01}(t)$ (2) $\quad P_{01}(0) = 0$ (6)

$P_{10}'(t) = -\lambda P_{10}(t) + \mu P_{11}(t)$ (3) $\quad P_{10}(0) = 0$ (7)

$P_{11}'(t) = \lambda P_{10}(t) - \mu P_{11}(t)$ (4) $\quad P_{11}(0) = 1$ (8)

$P_{00}(t)+P_{01}(t)=1$

$P_{10}(t)+P_{11}(t)=1$

$$(1) \overset{(9)}{\Longrightarrow} P_{00}'(t)=-\lambda P_{00}(t)+\mu(1-P_{00}(t))$$

$$P_{00}'(t)=-(\lambda+\mu)P_{00}(t)+\mu$$

$$P_{00}'(t)+(\lambda+\mu)P_{00}(t)=\mu$$

$$e^{(\lambda+\mu)}P_{00}'(t)+(\lambda+\mu)e^{(\lambda+\mu)t}P_{00}(t)=\mu e^{(\lambda+\mu)t}$$

$$e^{(\lambda+\mu)t}P_{00}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{(\lambda+\mu)t}+c \Longrightarrow$$

$$P_{00}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+ce^{-(\lambda+\mu)t}$$

Για $t=0$: $P_{00}(0)=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}+c \overset{(5)}{\Longrightarrow} 1=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}+c$

$$c=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

$$\boxed{P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}}$$

$$(9) \Longrightarrow P_{01}(t) = 1 - P_{00}(t) = 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$\Rightarrow P_{01}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Ομοίως, από (3), (7), (10) προκύπτει ότι

$$P_{10}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$P_{11}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

<u>Παράδειγμα 2</u> (Διαδικασία Poisson)
Διαδ. Γέννησης

$$0 \xrightarrow{\lambda} 1 \xrightarrow{\lambda} 2 \xrightarrow{\lambda} 3$$

Κάθε διαδ. μετρά τα γεγονότα με χρόνο $Exp(\lambda)$

$X(t)$: # γεγ. έως τη στιγμή t

Πίνακας Ρυθμών Μετάβασης

$$Q = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} & \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$E[X(t)] = \sum_{j=0}^{\infty} j P(X(t)=j) = \sum_{j=0}^{\infty} j P_j(t) = ;$$

<u>Λύση</u>:

$$p'(t) = p(t) Q$$

$$\left.\begin{aligned} P_0'(t) &= -\lambda P_0(t) \\ P_j'(t) &= \lambda P_{j-1}(t) - \lambda P_j(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Για να βρω εύκολα το $\sum_{j\geq 0} j P_j(t)$ με τις εξ. παραπάνω

$$\sum_{j\geq 0} j P_j'(t) = \underbrace{\sum_{j\geq 0} \lambda j\, P_{j-1}(t)}_{\lambda \sum_{j\geq 1} (j-1+1) P_{j-1}(t)} - \underbrace{\sum_{j\geq 1} \lambda j\, P_j(t)}_{\lambda \sum_{j\geq 0} j P_j(t) = \lambda E(X(t))} \Rightarrow$$

$$\lambda \sum_{j=1}^{\infty} (j-1) P_{j-1}(t) + \lambda \underbrace{\sum_{j\geq 1} P_{j-1}(t)}$$

$$= \lambda \sum_{j'\geq 0} j' P_{j'}(t) + \lambda \cdot 1$$

$= \lambda E(X(t)) + \lambda$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} E[X(t)] = \cancel{\lambda E[X(t)]} + \lambda - \cancel{\lambda E[X(t)]} \Rightarrow$

$E[X(t)] = \lambda t + c$

για $t=0$: $E[X(0)] = \lambda \cdot 0 + c \Rightarrow$

$$\boxed{0 = c}$$

$E[X(t)] = \lambda t$