11/5/21

4. Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου

4.1 Ορισμοί και Ιδιότητες

Έστω μία στοχαστική διαδικασία με αριθμήσιμο χ.κ. S που μπορεί να αλλάξει η κατάσταση οποιαδήποτε στιγμή.

Συμβολίζουμε

S_n: στιγμή n-οστής μετάβασης

$S_n=0$

$Y_n=S_n-S_{n-1}$

Y_n: χρόνος μεταξύ $n-1$ και n-οστής μεταβ. $n\geq 1$

X_n: κατάσταση του συστήματος μετά την n-οστή μετάβαση, $n\geq 1$

$N(t)$: # μεταβ. έως τη στιγμή t

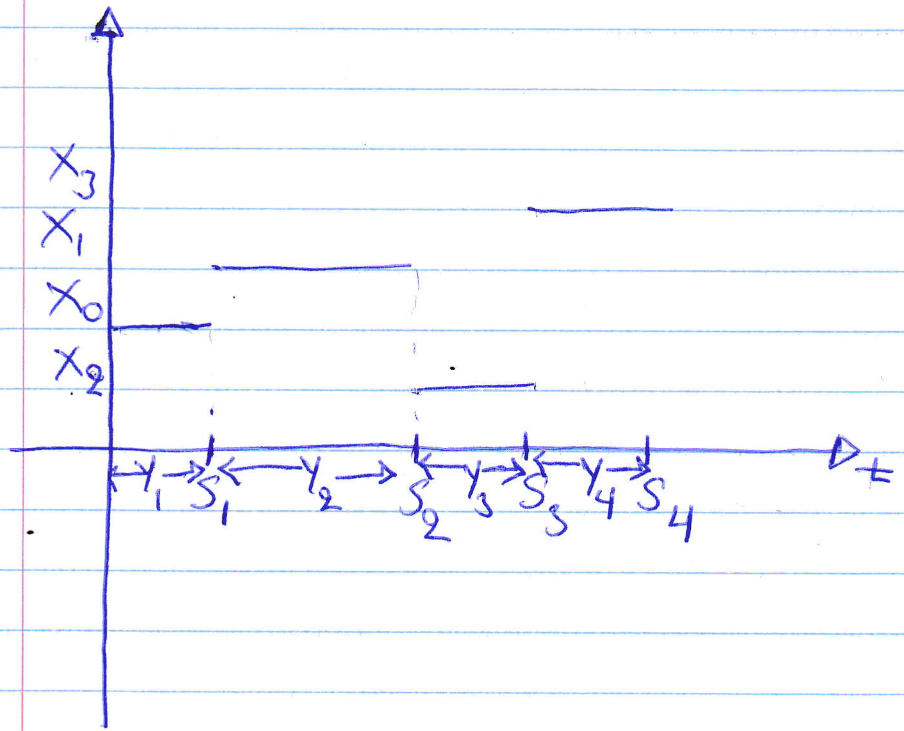
$N(t)=\sup\{n\geq 0: S_n\leq t\}, t>0$

Η $\{N(t), t\geq 0\}$ είναι απαριθμήτρια διαδ. με ενδιάμεσους χρόνους $\{Y_n, n\geq 1\}$

Υποθέτουμε ότι $P(N(t)<\infty)=1,\ \forall t<\infty$

$X(t)$: κατάσταση του συσ. τη στιγμή t

$X(t) = X_{N(t)}$



<u>ΟΡΣ</u> (Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου)

Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t); t\geq 0\}$ καλείται Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου αν η ακολουθία

$\{X_0, (X_n, Y_n), n\geq 1\}$ ικανοποιεί την

$$P(X_{n+1}=j,\ Y_{n+1}>y \mid X_n=i, Y_n, X_{n-1}, Y_{n-1}, \dots, X_1, Y_1, X_0) =$$

$$P(X_{n+1}=j,\ Y_{n+1}>y \mid X_n=i) =$$

$$P(X_1=j,\ Y_1>y \mid X_0=i) = P_{ij}\, e^{-q_i y},\quad i,j\in S,\ y>0,\ n\geq 0$$

όπου $P=[P_{ij}]_{i,j\in S}$ είναι στοχαστικός

με $P_{ii}=0, \forall i$ και $0\leq q_i<\infty \forall i$

Σημείωση:

Μία ΜΑΣΧ εξελίσσεται ως εξής: Ξεκινάει από μία κατάσταση, έστω i_0

Ερ. 1 Για πόσο χρόνο μένει στην i_0?

$(Y_1|X_0=i_0)\sim ;$

$P(X_1=j, Y>y|X_0=i_0)=P_{i_0j}e^{-q_{i_0}y}, \forall j\in S$

$$P(Y_1>y|X_0=i_0)\overset{\text{ΘΟΠ}}{=}\sum_{j\in S}P(X_1=j, Y_1>y|X_0=i_0)$$

$$=\sum_{j\in S}P_{i_0j}e^{-q_{i_0}y}=e^{-q_{i_0}y}\underbrace{\sum_{j\in S}P_{i_0j}}_{1}$$

$$\Rightarrow P(Y_1>y|X_0=i_0)=e^{-q_{i_0}y}\Rightarrow$$

$$P(Y_1\leq y|X_0=i_0)=1-e^{-q_{i_0}y}\Rightarrow$$

$$(Y_1|X_0=i_0)\sim \mathcal{E}xp(q_{i_0})$$

Απ: Η διαδ. παραμένει για εκθετικό χρόνο με παράμετρο q_{i_0} στην i_0

Ερ 2 | Με τι πιθανότητα πάει σε άλλες καταστάσεις

$P(X_1=j \mid X_0=i_0)=;$

$P(X_1=j, Y_1>y \mid X_0=i_0)=P_{i_0 j}\cdot e^{-q_{i_0} y}$

$P(X_1=j \mid X_0=i_0)=P(X_1=j, Y_1>0 \mid X_0=i_0)=$

$P_{i_0 j}\cdot e^{-q_{i_0}\cdot 0}=P_{i_0 j}$

Απάντηση: $P(X_1=j \mid X_0=i_0)=P_{i_0 j}$

<u>Θεώρημα</u> (Μαρκοβιανή Ιδιότητα Χρονικά Ομογενής)

Μία ΜΑΣΧ $\{X(t), t\geq 0\}$ με χ.κ. S έχει την Μαρκοβιανή Ιδιότητα, δηλαδή

$P(X(t+s)=j \mid X(s)=i, X(u), 0\leq u<s)=$

$P(X(t+s)=j \mid X(s)=i), \forall s,t\geq 0, i,j\in S$

Επιπλέον είναι χρονικά ομογενής δηλ.

$P(X(t+s)=j \mid X(s)=i)=P(X(t)=j \mid X(0)=i)$
$\forall s,t\geq 0$
$i,j\in S$

$2^{ος}$ τρόπος περιγραφής μίας ΜΑΕΧ

Έστω μία ΜΑΕΧ που βρίσκεται στην κατάσταση i. Έστω γεγονός E_{ij} που αν συμβεί ενώ η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση i αυτή θα πάει στην j. Ο χρόνος μέχρι να συμβεί το γεγονός είναι

$T_{ij} \sim \mathcal{E}xp(a_{ij})$ με $q_{ij} \geq 0$. Το σύστημα θα μεταβεί από την i στην j, αν το E_{ij} συμβεί πρώτο από τα υπόλοιπα. Έστω T_{ij} ανεξ. $\forall j$

$$\underset{\substack{\| \\ \text{χρόνος παραμονής στην } i}}{T_i} = \min\{T_{ik}, k \in S, k \neq i\} \sim \mathcal{E}xp(\underset{\substack{\| \\ \sum_{j\neq i} q_{ij}}}{q_i})$$

Η πιθανότητα να πάει στην j είναι η πιθανότητα T_{ij} να είναι ο ελάχιστος, άρα είναι

$$\frac{q_{ij}}{\sum_{k\neq i} q_{ik}} = \frac{q_{ij}}{q_i} \Leftrightarrow p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$$

πιθ. χρόνος της j να λήξει πρώτος

Οπότε, μπορούμε να περιγράψουμε τη ΜΑΕΧ χρησιμοποιώντας τις ποσότητες q_{ij}, $i,j \in S$ που λέγονται <u>ρυθμοί μετάβασης</u>.

Αν, επίσης, $q_{ii} = -\sum_{k \neq i} q_{ik} = -q_i$, $i \in S$ τότε ο πίνακας $Q = [q_{ij}]_{i,j \in S}$ ονομάζεται <u>γεννήτορας πίνακας</u>.

<u>π.χ.</u> (M/M/∞)

Συσ. εξυπ. ∞ υπηρέτες

PP(λ) διαδ. αφιξ.

Exp(μ) χρόνος εξυπ.

$X(t)$: # πελατών στο συσ. τη στιγμή t

ΜΑΕΧ?

Q?

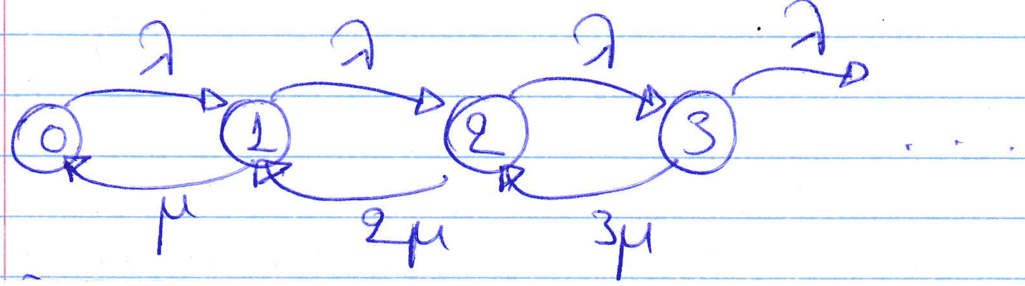
Λύση

Έστω	Κατ.	Επομ. Κατ.	Χρόνος
	$i>0$	$i+1$ (άφιξη) $i-1$ (αναχ.)	$Exp(\lambda)$ $Exp(i\mu)$
	$i=0$	1 (άφιξη)	$Exp(\lambda)$

Η $\{X(t), t\geq 0\}$ είναι ΜΑΕΧ με

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & & \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 & \cdots & \\ 0 & 2\mu & -(2\mu+\lambda) & \lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \end{bmatrix} \end{array}$$

Διάγραμμα Ρυθμών Μετάβασης



Βασικοί Ορισμοί

Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ με αριθμ. χ.κ. S

$p_{ij}(t) = P(X(t)=j \mid X(0)=i), \; i,j \in S, \; t \geq 0$

$p_{ij}(t)$: πιθ. μετ. $i \to j$ σε χρόνο t

$P(t) = [p_{ij}(t)]_{i,j \in S}$

$P(t)$: πιν. πιθ. μετάβασης σε χρόνο t

$p_i(0) = P(X(0)=i), \; i \in S$

$p(0) = [p_i(0)], \; i \in S$

$p(0)$: αρχική κατανομή

$p_i(t) = P(X(t)=i), \; i \in S$

$p(t) = [p_i(t)]_{i \in S}$ $\quad$ $p(t)$: μεταβατική κατανομή

Θεώρημα

Μία ΜΑΣΧ $\{X(t), t \geq 0\}$ χαρακτηρίζεται πλήρως από την αρχική κατανομή και τον π.π.μ. $P(t)$

Απ:

$$P(X(0)=i_0, X(t_1)=i_1, X(t_2)=i_2, \dots, X(t_n)=i_n) =$$

$$P(X(0)=i_0) P(X(t_1)=i_1 | X(0)=i_0) P(X(t_2)=i_2 | X(t_1)=i_1, X(0)=i_0) \cdots P(X(t_n)=i_n / X(0)=i_0, \dots, X(t_{n-1})=i_{n-1})$$

Μαρκ.

$$P(X(0)=i_0) P(X(t_1)=i_1 | X(0)=i_0) P(X(t_2)=i_2 | X(t_1)=i_1) \cdots P(X(t_n)=i_n | X(t_{n-1})=i_{n-1}) \overset{\text{Χρον. Ομ.}}{=}$$

$$p_{i_0}(0) p_{i_0 i_1}(t_1) \cdots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})$$

Σχέση $p(t)$ με $p(0)$ RP

Έστω $j \in S$, $p_j(t) = P(X(t)=j)$

$$= \sum_{i \in S} \underbrace{P(X(t)=j | X(0)=i)}_{p_{ij}(t)} \underbrace{P(X(0)=i)}_{p_i(0)}$$

$$= \sum_{i \in S} p_i(0) p_{ij}(t)$$

= γινόμενο $p(0)$ με j-στήλη του P

$$\Rightarrow p(t) = p(0) P(t)$$

Θεώρημα

Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ με π.π.μ. $P(t)$

Τότε

α) $P_{ij}(t) \geq 0, \; i,j \in S, \; t \geq 0$

β) $\sum_{j \in S} P_{ij}(t) = 1, \; i \in S, \; t \geq 0$

γ) Εξισώσεις C-K

$$P_{ij}(s+t) = \sum_{k \in S} P_{ik}(s) P_{kj}(t), \quad i,j \in S, \; s,t \geq 0$$

$$\iff P(s+t) = P(t) \cdot P(s) \quad s,t \geq 0 \iff$$

$$P(s+t) = P(t) P(s), \quad s,t \geq 0 \iff$$

$$P(s+t) = P(s) P(t), \quad s,t \geq 0$$