Άσκηση: Να γίνει το ίδιο για τον υπολ. χρόνο ζωής. (Y_n)

15ο ΜΑΘΗΜΑ

15/4/2021

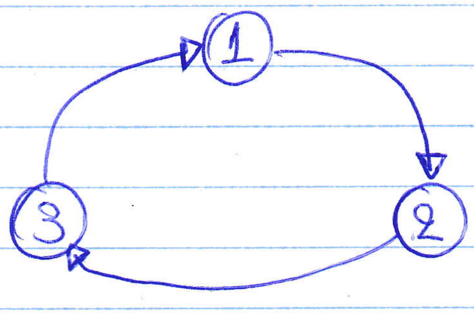
ΟΡΣ (Περιοδική / Απεριοδική)

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ. S και $j \in S$
Η j ονομάζεται περιοδική με περίοδο d αν $\text{ΜΚΔ}\{n: p_{jj}^{(n)} > 0\} = d > 1$

Η j ονομάζεται απεριοδική αν

$\text{ΜΚΔ}\{n: p_{jj}^{(n)} > 0\} = 1$

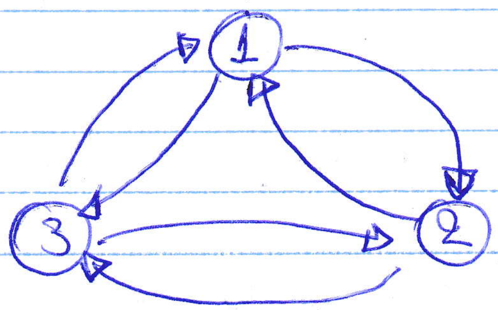
Παράδειγμα

1) 

περιοδική

όλες οι καταστάσεις είναι περιοδικές με $d=3$, αφού $p_{jj}^{(n)} > 0$

$\Rightarrow n = 3, 6, 9, \ldots$

2) 

όλες είναι απεριοδικές καθώς μπορώ να επιστρέψω σε 2 ή 3 ... βήματα

Θεώρημα:

i) Η απεριοδικότητα και η περιοδικότητα είναι ιδιότητα κλάσης επικοινωνίας

ii) Αν $P_{ii}>0 \Rightarrow i$-απεριοδική

iii) i-απεριοδική αν $\exists\, n_0 : P_{ii}^{(n)}>0,\ \forall n \geq n_0$

Θεώρημα (Βασικό Θεώρημα Οριακής Συμπεριφοράς Αδιαχώριστων ΜΑΔΧ)

Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ ΜΑΔΧ αδιαχώριστη με χ.κ. S και π.π.μ. $P=[P_{ij}]$. Τότε, η $\{X_n, n\geq 0\}$ είναι θετικά επαναληπτική αν έχει στάσιμη κατανομή $\pi=[\pi_i]_{i\in S}$

Ακόμη, αν έχει στάσιμη κατανομή $\pi=[\pi_i]_{i\in S}$ αυτή θα είναι μοναδική, όλες οι συνιστώσες θα είναι $\pi_i>0$, $i\in S$ και αν $\lambda=[\lambda_i]_{i\in S}$ στάσιμο μέτρο με $\sum_i \lambda_i<\infty$ τότε $\lambda=c\pi$

Επιπλέον,

i) $\pi_i = \dfrac{1}{m_i}$ $\quad N(n)$ # επισκ. στην j στα πρώτα n-βήματα $\qquad \lim_t \frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\tau}$

ii) $$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} 1\{X_k=j\}}{n}}_{\text{μακροπρ. ποσοστό χρόνου που η αλυσίδα βρίσκεται στην κατ. } j} = \frac{1}{m_j} = \pi_j \qquad \lim_t \frac{E(N(t))}{t}=\frac{1}{\tau}$$

μέσο # επισκέψεων στην j στα n βήματα

iii) $$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{E\left[\sum_{k=0}^{n-1} 1\{X_k=j\}\right]}{n}} = \frac{1}{m_j} = \pi_j$$

μακροπρ. μέσο ποσοστό χρόνου που η αλυσίδα βρίσκεται στην κατ. j

iv) $$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} P(X_k=j)}{n}} = \frac{1}{m_j} = \pi_j$$

$$c-\lim_{n\to\infty} P(X_n=j) = \pi_j$$

v) Αν $\pi^{(0)}=\pi$ τότε $\pi^{(n)}=\pi$ δηλ. $P(X_n=j)=\pi_j$ $\forall j\in S$

vi) Αν επιπλέον η αλυσίδα είναι και απεριοδική έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} P(X_n=j)=\pi_j$, $j\in S$ για κάθε αρχική κατανομή και $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$, $i,j\in S$

<u>Θεώρημα</u>

Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ αδιαχώριστη, απεριοδική και θετικά επαναληπτική ΜΑΔΧ με χ.κ. S, αρχική κατανομή $\pi^{(0)} = [\pi_j^{(0)}]_{j\in S}$, στάσιμη κατανομή $\pi = [\pi_j]_{j\in S}$ και π.π.μ. P.

Τότε, $\lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)} = \pi_j$ και $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$, $\forall i,j\in S$

Απόδειξη:

Θεωρώ δύο ανεξάρτητες ΜΑΔΧ. Η πρώτη είναι η $\{X_n, n\geq 0\}$ και η άλλη είναι η $\{Y_n, n\geq 0\}$ με αρχική κατανομή την στάσιμη κατανομή π και π.π.μ. P.

Είναι και οι δύο αδιαχώριστες, απεριοδικές και θετικά επαναληπτικές.

Έστω T η στιγμή που θα συναντηθούν για πρώτη φορά, δηλ. $T=\inf\{n\geq 0: X_n=Y_n\}$

Βήμα 1: ΝΔΟ $P(T<\infty)=1$

Η $\{(X_n, Y_n), n\geq 0\}$ είναι ΜΑΔΧ με αρχική κατανομή $\pi^{(0)}_{X,Y}(i,j)=P(X_0=i, Y_0=j)=$ $P(X_0=i)P(Y_0=j)=\pi^{(0)}_i\pi^{(0)}_j$, π.π.μ.

$P_{X,Y}=\left[P_{(i,j),(k,l)}\right]_{(i,j),(k,l)\in S^2}$ με

$P_{(i,j),(k,l)}=P_{ik}P_{jl}$,

στάσιμη κατανομή $\pi_{X,Y}=\left[\pi_{X,Y}(i,j)\right]_{(i,j)\in S^2}$,

με $\pi_{X,Y}(i,j)=\pi_i\pi_j$ (πράγματι $\sum\limits_{i\in S}\sum\limits_{j\in S}\pi_i\pi_j P_{ik}P_{jl}$ $=\pi_k\pi_l$)

Η $\{(X_n, Y_n) ; n \geq 0\}$ είναι αδιαχώριστη

Πράγματι, εφόσον η $\{X_n, n \geq 0\}$ είναι απεριοδική και αδιαχώριστη $\exists n_0$: $P_{ik}^{(n_0)} > 0$, $\forall n \geq n_0$

Επίσης, εφόσον η $\{Y_n, n \geq 0\}$ είναι απεριοδική και αδιαχώριστη $\exists n_1$: $P_{jk}^{(n)} > 0$, $\forall n \geq n_1$

Άρα για $\forall n \geq \max\{n_0, n_1\}$ ισχύει:

$P_{(i,j),(k,\ell)}^{(n)} = P_{ik}^{(n)} P_{j\ell}^{(n)} > 0$ άρα

$\{(X_n, Y_n) ; n \geq 0\}$ αδιαχώριστη

Εφόσον η $\{(X_n, Y_n) ; n \geq 0\}$ είναι αδιαχώριστη και έχει στάσιμη κατανομή, θα είναι θετικά επαναληπτική.

Άρα $P(T < \infty) = P($η (X_n, Y_n) να εισέλθει στο $\{(i,i), i \in S\}$ σε πεπ. χρόνο$)$

$= 1$

Βήμα 2ο:

Ορίζουμε μία νέα στοχαστική διαδικασία

$$Z_n = \begin{cases} X_n, & n<T \\ Y_n, & n \geq T \end{cases}$$

Η $\{Z_n, n\geq 0\}$ ΜΑΔΧ με αρχική κατανομή την $\pi^{(0)}$ και π.π.μ. P. Άρα ταυτίζεται με την $\{X_n, n\geq 0\}$.

Βήμα 3ο:

$$|\pi_j^{(n)} - \pi_j| = |P(X_n=j) - P(Y_n=j)|$$

$$= |P(Z_n=j) - P(Y_n=j)|$$

$$= |\cancel{P(Z_n=j, T\leq n)} + P(Z_n=j, T>n) - \cancel{P(Y_n=j, T\leq n)} - P(Y_n=j, T>n)|$$

$$= |P(Z_n=j, T>n) - P(Y_n=j, T>n)|$$

$$\leq P(Z_n=j, T>n) + P(Y_n=j, T>n)$$

$$\leq P(T>n) + P(T>n) = 2P(T>n)$$

Άρα, $\lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)} = \pi_j, \ \forall j \in S$.

Για να δω $\lim_n p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ αρκεί να ξεκινήσω από την κατάσταση i, δηλ. $\pi^{(0)} = [0, \dots, 0, \underset{\uparrow}{1}, 0, \dots, 0]$
i-θέση

Τότε, $\pi_j^{(n)} = \sum_{k \in S} \pi_k^{(0)} p_{kj}^{(n)} = \underbrace{\pi_i^{(0)}}_{= 1} p_{ij}^{(n)}$

άρα $\lim_{n \to \infty} \pi_j^{(n)} = \pi_j \Rightarrow \lim_n p_{ij}^{(n)} = \pi_j$

<u>Σημείωση</u> (Ερμηνεία για $\pi_i p_{ij}$ και εξ. ισ.)

<u>Ερμηνεία για το $\pi_i p_{ij}$</u>

π_i = μακροπρ. ποσοστό χρόνου στην κατ. i

p_{ij} = ποσοστό μεταβ. $i \to j$ ως προς όλες τις μεταβάσεις που φεύγαν από την i

$$= \frac{\#\text{μεταβ. } i \to j}{\#\text{μεταβ. } i \to}$$

$\pi_i p_{ij}$ = μακροπρ. ποσοστό μεταβ. τύπου $i \to j$

$$= \frac{\#\text{μεταβ. } i \to j}{\#\text{μεταβάσεων}}$$

Ερμηνεία εξισώσεων πλήρους ισορροπίας

Για $j \in S$: $\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} \Leftrightarrow \pi_j \underbrace{\sum_{j \in S} p_{ji}}_{1} = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{i \in S} \pi_j p_{ji}}_{} = \underbrace{\sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}}_{}$$

μακροπρ. ποσοστό μεταβάσεων που φεύγουν από την j

$j \rightarrow$

μακροπρ. ποσοστό μεταβ. που οδηγούν στην j

$\rightarrow j$

Άσκηση 1

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ. S

Νδο οι εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας

Μακροπρ. ποσοστό μεταβ. που οδηγούν από το A εκτός του A

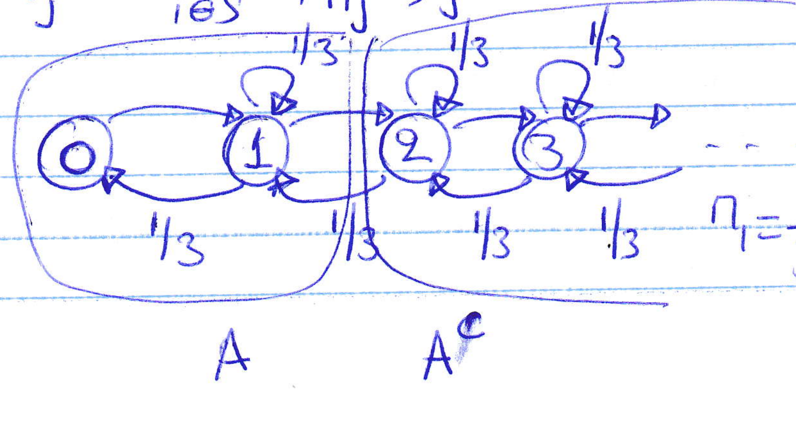
$$\sum_{j \in A} \sum_{i \in A^c} \pi_j p_{ji} = \sum_{i \in A^c} \sum_{j \in A} \pi_i p_{ij}, \quad A \subset S$$

μακρ. ποσοστό μεταβ. που $A^c \rightarrow A$

είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις πλήρους ισορροπίας

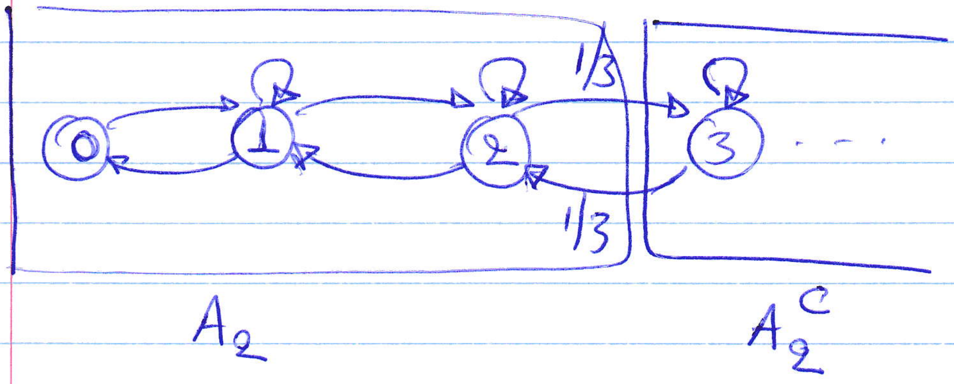
$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}, \quad j \in S$$

π.χ.



$\pi_1 = \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2$

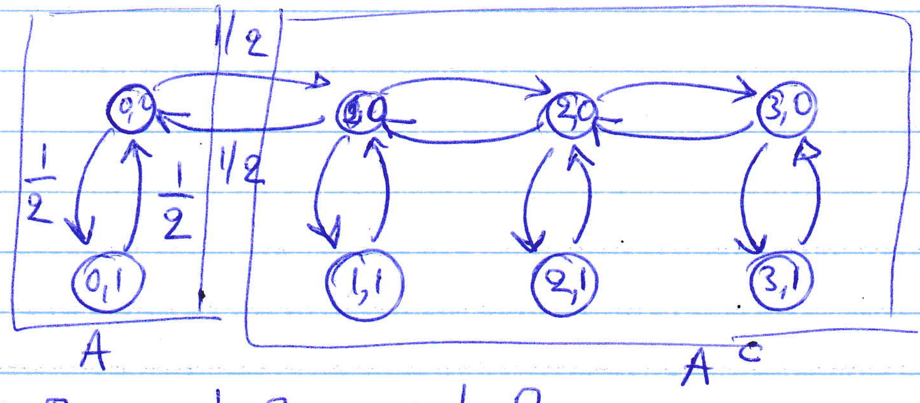
$\frac{1}{3}\pi_1 = \frac{1}{3}\pi_2$



Χωρίζω διαφορετικά τον χώρο καταστάσεων για να πάρω έκφραση για την

π_2 : $\frac{1}{3}\pi_2 = \frac{1}{3}\pi_3$

<u>Σημ</u>: Θεωρώ διαφορετικά σύνολα κάθε φορά για να πάρω διαφ. π_i



εξ. πλήρους $\pi_{0,0} = \frac{1}{2}\pi_{1,0} + \frac{1}{2}\pi_{0,1}$

εξ. γενικ. $\cancel{\frac{1}{2}}\pi_{0,0} = \cancel{\frac{1}{2}}\pi_{1,0}$ πιο απλή η γενικ. ισορ.

Κρίνω με βάση το διάγραμμα τι θα χρησιμ.