14ο ΜΑΘΗΜΑ

13/4/2021

ΟΡΣ (Μέσος # επισκέψεων στην i μεταξύ 2 διαδοχικών επισκέψεων στην κ)

Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ. S
Έστω $\kappa \in S$ και $T_\kappa = \inf\{n\geq 1 : X_n = \kappa\}$ (ελ. αριθμός βημάτων εως όταν η αλυσίδα μεταβεί στην κατ. κ

ο χρόνος 1ης επίσκεψης στην κ. Τότε για $\forall i \in S\setminus\{\kappa\}$

$$m_i^{(\kappa)} = E\left[\sum_{n=0}^{T_\kappa - 1} 1_{\{X_n = i\}} \middle| X_0 = \kappa\right]$$

είναι ο μέσος # επισκ. στην κατ. i μεταξύ δύο διαδ. επισκ. στην κ

Θεώρημα

Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ ΜΑΔΧ αδιαχ. και επαναληπτική. Έστω $\kappa\in S$ και $m^{(\kappa)} = [m_i^{(\kappa)}]_{i\in S}$

Τότε,

α) $m_\kappa^{(\kappa)} = 1$

β) $m^{(\kappa)}$ στάσιμο μέτρο για τον P

γ) $m_i^{(\kappa)} > 0$ και $m_i^{(\kappa)} < \infty$, $\forall i \in S$

Απόδειξη:

α) $m_k^{(k)} = E\left[\sum_{n=0}^{T_k-1} 1_{\{X_n=k\}} \middle| X_0=k\right] = 1$

μετρά μόνο την επισκ. τη στιγμή 0

β) πρέπει νδο επαληθεύει το σύσ. εξισ. πλήρους ισορροπίας

$m^{(k)} = m^{(k)} P$.

$\{X_n, n\geq 1\}$ επαναληπτική $\Rightarrow h_k = 1 \Rightarrow$

$P[T_k < \infty | X_0 = k] = 1$

Οπότε, $m_i^{(k)} = E\left[\sum_{n=0}^{T_k-1} 1_{\{X_n=i\}} \middle| X_0=k\right]$

$= E\left[\sum_{n=1}^{T_k} 1_{\{X_n=i\}} \middle| X_0=k\right]$

$= E\left[\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n=i,\ \underbrace{n\leq T_k}_{\text{για πόσα βήματα επισκ. την } i}\}} \middle| X_0=i\right]$

πόσες φορές επισκ. την i

$= \sum_{n\geq 1} E\left[1_{\{X_n=i,\ n\leq T_k\}} \middle| X_0=i\right]$

$$m_i^{(k)} = \sum_{j\in S} m_j^{(k)} p_{ji}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = i, n \le T_k \mid X_0 = k)$$

Δεσμεύω ως προς X_{n-1}

$$\underset{\text{ΘΟΠ}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j\in S} P(X_n = i, X_{n-1} = j, T_k \geq n \mid X_0 = k)$$

$$= \sum_{j\in S} \sum_{n\geq 1} \underbrace{P(X_n = i \mid X_{n-1} = j, T_k \geq n, X_0 = k)} \, P(X_{n-1} = j, T_k \geq n \mid X_0 = k)$$

$$= \sum_{j\in S} \sum_{n\geq 1} p_{ji} \, P(X_{n-1} = j, T_k \geq n \mid X_0 = k)$$

$$= \sum_{j\in S} p_{ji} \sum_{n\geq 1} E\left[\mathbb{1}\{X_{n-1} = j, T_k \geq n\} \mid X_0 = k\right]$$

$$= \sum_{j\in S} p_{ji} \, E\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\{X_{n-1} = j, T_k \geq n\} \,\Big|\, X_0 = k\right]$$

$$\underset{m=n-1}{=} \sum_{j\in S} p_{ji} \, E\left[\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{1}\{X_m = j, T_k \geq m+1\} \,\Big|\, X_0 = k\right]$$

$$= \sum_{j\in S} p_{ji} \underbrace{E\left[\sum_{m=0}^{T_k - 1} \mathbb{1}\{X_m = j\} \,\Big|\, X_0 = k\right]}_{m_j^{(k)}}$$

$$= \sum_{j\in S} p_{ji} m_j^{(k)}$$

Άρα, $m_i^{(k)} = \sum_{j\in S} m_j^{(k)} p_{ji}, \ \forall i \in S \Rightarrow m^{(k)} = m^{(k)} P$

$\Rightarrow m^{(k)}$ στάσιμο μέτρο

γ) εφόσον $\{X_n\}$ αδιαχώριστη, $k \leftrightarrow i$, $\forall i \in S$

δηλ. $\exists\ n_1, n_2 : P_{ik}^{(n_1)} > 0$, $P_{ki}^{(n_2)} > 0$

εφόσον $m^{(k)}$ στάσιμο μέτρο $\Rightarrow m^{(k)} = m^{(k)} P$

$$m^{(k)} = m^{(k)} \cdot P^n$$

$$m^{(k)} = m^{(k)} P^{(n)}$$

$$\forall n = 0, 1, \ldots$$

έχουμε $1 = m_k^{(k)} = \sum_{j \in S} m_j^{(k)} P_{jk}^{(n_1)} \geq$

$$m_i^{(k)} P_{ik}^{(n_1)} \Rightarrow$$

$$1 \geq m_i^{(k)} \underbrace{P_{ik}^{(n_1)}}_{>0} \Rightarrow m_i^{(k)} \leq \frac{1}{P_{ik}^{(n_1)}} < \infty$$

Επίσης, $m_i^{(k)} = \sum_{j \in S} m_j^{(k)} P_{ji}^{(n_2)} \geq \underbrace{m_k^{(k)}}_{=1} \underbrace{P_{ki}^{(n_2)}}_{>0}$

$$> 0$$

Θεώρημα (Χαρακτηρισμός για το $m^{(k)}$)

$\{X_n, n\geq 0\}$ αδιαχώριστη ΜΑΔΧ με στάσιμο μέτρο $\lambda=[\lambda_i]_{i\in S}$ με $\lambda_k=1$. Τότε $\lambda\geq m^{(k)}$. Επίσης, αν η $\{X_n, n\geq 0\}$ επαναληπτική τότε $\lambda=m^{(k)}$, δηλ. αν έχω αδιαχ. και επαναληπτική ΜΑΔΧ το μοναδικό στάσιμο μέτρο με $\lambda_k=1$ είναι το $m^{(k)}$.

Απόδειξη:

Έστω $\lambda=[\lambda_i]_{i\in S}$ στάσιμο μέτρο

Έχω
$$\lambda_j=\sum_{i_1\in S}\lambda_{i_1}P_{i_1 j}=\underbrace{\lambda_k}_{1}P_{kj}+\sum_{i_1\in S\setminus\{k\}}\lambda_{i_1}P_{i_1 j}$$

$$=P_{kj}+\sum_{i_1\neq k}\sum_{i_2\in S}\lambda_{i_2}P_{i_2 i_1}P_{i_1 j}$$

$$=P_{kj}+\sum_{i_1\neq k}\lambda_k P_{k i_1}P_{i_1 j}+\sum_{i_1\neq k}\sum_{i_2\neq k}\lambda_{i_2}P_{i_2 i_1}P_{i_1 j}$$

$$=P_{kj}+\sum_{i_1\neq k}P_{k i_1}P_{i_1 j}+\sum_{i_1\neq k}\sum_{i_2\neq k}\sum_{i_3\in S}\lambda_{i_3}P_{i_3 i_2}P_{i_2 i_1}P_{i_1 j}$$

$$P(X_1=j, T_k\geq n \mid X_0=k).$$

$$= \overset{\parallel}{P_{kj}} + \underbrace{\sum_{i_1\neq k} P_{ki_1}P_{i_1 j}}_{\overset{\parallel}{P(X_2=j,\, T_k\geq 2 \mid X_0=k)}} + \underbrace{\sum_{i_1\neq k}\ \sum_{i_2\neq k} \lambda_k P_{ki_2}P_{i_2 i_1}P_{i_1 j}}_{\overset{\parallel}{P(X_3=j,\, T_k\geq 3 \mid X_0=k)}}$$

$$+ \underbrace{\sum_{i_1\neq k}\ \sum_{i_2\neq k}\ \sum_{i_3\neq k} \lambda_{i_3} P_{i_3 i_2}P_{i_2 i_1}P_{i_1 j}}_{\geq 0}$$

Επαγωγικά, $\lambda_j \geq \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n=j, T_k\geq n \mid X_0=k)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E\left(1_{\{X_n=j,\, T_k\geq n\}} \mid X_0=k\right)$$

$$m_j^{(k)} = E\left[\sum_{n=0}^{T_k-1} 1_{\{X_n=j\}} \,\middle|\, X_0=k\right]$$

$$= E\left[\sum_{n=1}^{T_k} 1_{\{X_n=j\}} \,\middle|\, X_0=k\right]$$

$$= E\left[\sum_{n=0}^{T_k-1} 1_{\{X_n=j\}} \,\middle|\, X_0=k\right] = m_j^{(k)}$$

άρα $\lambda_j \geq m_j^{(k)}$, $\forall j\in S \Rightarrow \lambda \geq m^{(k)}$

$\{X_n, n\geq 1\}$ αδιαχ. και επαναληπτική, τότε

$m^{(k)}$ στάσιμο μέτρο.

έχουμε $m^{(k)} = m^{(k)}P$ και $\lambda = \lambda P$

Οπότε, $\lambda - m^{(k)} = (\lambda - m^{(k)})P \Rightarrow \lambda - m^{(k)}$ στάσιμο

Ακόμη, $\lambda_k - m_k^{(k)} = 1 - 1 = 0$

Άρα, $0 = \lambda_k - m_k^{(k)} = \sum_{j \in S} (\lambda_j - m_j^{(k)}) P_{jk}^{(n)}, \forall n$

Όμως, $\forall j \in S$, $j \leftrightarrow k$ άρα $\exists n_1 : P_{jk}^{(n_1)} > 0$

Οπότε, $\lambda_j - m_j^{(k)} = 0$

Θεώρημα:

Αν η $\{X_n, n \geq 0\}$ είναι αδιαχώριστη ΜΑΔΧ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i) Κάθε κατάσταση της είναι θετικά επαν.

ii) Μία κατάσταση είναι θετ. επαν.

iii) Υπάρχει στάσιμη κατανομή $\pi = [\pi_i]_{i \in S}$

Απ:

(i) $\Rightarrow$ (ii) προφ.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Έστω $i \in S$ θετικά επαν. $\Rightarrow$ i επαναληπτ.

$\Longrightarrow \forall j \in S$ επαναλ. $\Rightarrow$ αδιαχ. κ' επαν. ΜΑΣΧ

εφόσον ΜΑΔΧ αδιαχ. κάθε κατ. είναι επαναλ. διότι όλες οι κατ. επικοινωνούν

$\exists m^{(i)}$ με $m_i^{(i)} = 1$

$m^{(i)}$ στάσιμο μέτρο

$0 < m_j^{(i)} < \infty, \forall j \in S$

και $\sum_{k \in S} m_k^{(i)}$ = μέσος χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών επισκ. στην i $< \infty$, αφού i θετ. επ.

Οπότε, $\pi = [\pi_j]_{j \in S}$ με $\pi_j = \dfrac{m_j^{(i)}}{\sum_{k \in S} m_k^{(i)}}$

είναι στάσιμη κατανομή αφού $\sum_{j \in S} \pi_j = \dfrac{\sum_{j \in S} m_j^{(i)}}{\sum_{k \in S} m_k^{(i)}} = 1$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Έστω ότι $\exists$ στάσιμη κατανομή $\pi = [\pi_i]_{i \in S}$. Έστω $k \in S$ θδο είναι θετ. επαν.

<u>Βήμα 1°</u>: Θα φτιάξω στάσιμο μέτρο με 1 στο k-οστό στοιχείο

$\exists$ κατάσταση i με $\pi_i > 0$ διότι $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$ και $\pi_j \geq 0$

Επίσης, $\exists n : p_{ik}^{(n)} > 0$ διότι $\{X_n\}$ αδιαχ.

Ακόμη, $\pi = \pi P \Rightarrow \pi = \pi P^n \Rightarrow \pi_k = \sum_{j \in S} \pi_j p_{jk}^{(n)}$
$= \pi_i p_{ik}^{(n)} > 0$

Οπότε, αν $\lambda_i = \frac{\pi_i}{\pi_k}$, $i \in S$ το $\lambda = [\lambda_i]_{i \in S}$

είναι στάσιμο μέτρο

με $\lambda_k = \frac{\pi_k}{\pi_k} = 1$

Βήμα 2: Φτιάχνω φράγμα για το $m_i^{(k)}$. Γνωρίζουμε ότι αν $\{X_n, n \geq 0\}$ είναι αδιαχώριστη με στάσιμο μέτρο $\lambda = [\lambda_i]_{i \in S}$ με $\lambda_k = 1$ τότε $m^{(k)} \leq \lambda$

Άρα, $m_i^{(k)} \leq \lambda_i$, $i \in S \Rightarrow \sum_{i \in S} m_i^{(k)} \leq \sum_{i \in S} \lambda_i =$

m_k = Μέσος Χρόνος Μεταξύ 2 επισκ. στην k

$= \sum_{i \in S} \frac{\pi_i}{\pi_k} = \frac{1}{\pi_k} < \infty$

$\Rightarrow k$ θετικά επαν.

Πόρισμα: Αν $\{X_n, n \geq 0\}$ αδιαχ. και θετ. επαν. τότε $\exists$ στάσιμη $\pi = [\pi_i]_{i \in S}$ με

$\pi_i = \frac{1}{m_i}$, $m_i = E[T_i \mid X_0 = i]$

Απόδειξη

εφόσον $\{X_n, n\geq 0\}$ αδιαχ. και επαναλη-
πτική με στάσιμη $\pi = [\pi_i]_{i\in S}$

$\Rightarrow \forall k \in S$ το λ με $\lambda_i = \dfrac{\pi_i}{\pi_k}, i \in S$

είναι στάσιμο μέτρο με $\lambda_k = 1 \Rightarrow m^{(k)} = \lambda$

$$\Rightarrow \sum_{i\in S} m_i^{(k)} = \sum_{i \in S} \lambda_i = \frac{\sum_{i\in S} \pi_i}{\pi_k} = \frac{1}{\pi_k}$$

Σημείωση:

Αν έχω αδιαχώριστη ΜΑΔΧ και λύνεται το σύστημα της εξ. 10. προκύψει ύπαρξη στάσιμης κατανομής, τότε

i) η αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική

ii) $\exists$ μοναδική στάσιμη κατανομή

iii) $\pi_i > 0$, $\forall i$ αφού όλες είναι θετικά επαναληπτικές

iv) Αν λ στάσιμο μέτρο με $\sum_{i\in S} \lambda_i < \infty$ τότε θα είναι πολλαπλάσιο της στάσιμης κατανομής.