12º ΜΑΘΗΜΑ

6/4/2021

Θεώρημα

$\{X_n, n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ

S χ.κ.

$$m_{ij}^{(n)} = E\left[\begin{matrix}\#\text{ επισκέψεων στην } j \\ \text{στα πρώτα } n \text{ βήματα}\end{matrix} \,\middle|\, X_0 = i\right]$$

$$\Rightarrow M^{(n)} = \left[m_{ij}^{(n)}\right] = \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)} = \sum_{k=0}^{n-1} P^k$$

Απόδειξη:

$$m_{ij}^{(n)} = E\left[\begin{matrix}\#\text{ επισκέψεων στην} \\ j \text{ στα πρώτα } n \\ \text{βήματα}\end{matrix} \,\middle|\, X_0 = i\right]$$

$$= E\left[\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\begin{matrix}\#\text{ επισκέψεων} \\ \text{στην } j \text{ στο} \\ k\text{-βήμα}\end{matrix}}_{\begin{cases}1, & X_k = j \\ 0, & X_k \neq j\end{cases}} \,\middle|\, X_0 = i\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E\left[1_{\{X_k = j\}} \,\middle|\, X_0 = i\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \underline{P(X_k = j \mid X_0 = i)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{ij}^{(k)}$$

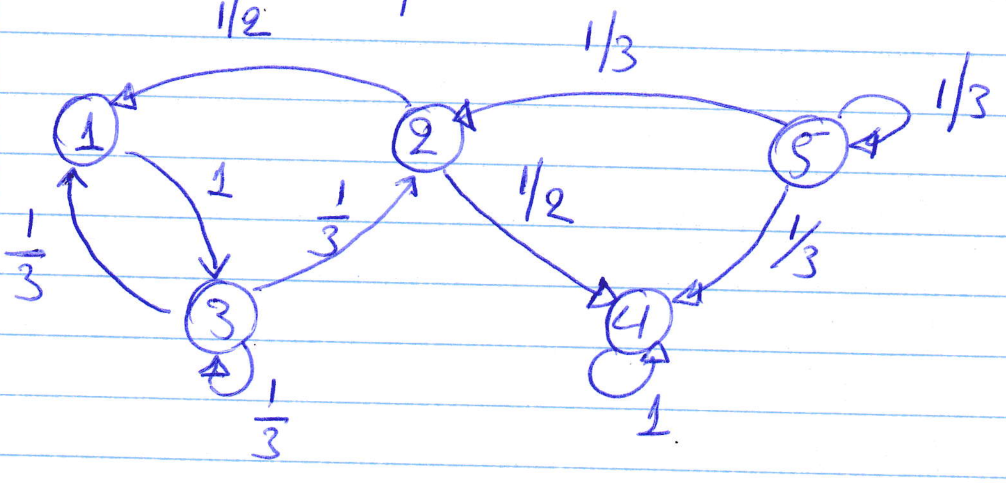
$$\text{Τελικά, } m_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{ij}^{(k)} \Rightarrow M^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} P^k$$

3.3 Προσπελασιμότητα/Επικοινωνία

Παράδειγμα

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ με διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης



ΟΡΣ (προσπελασιμότητα)

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ. S. Η κατάσταση $j \in S$ λέγεται <u>προσπελάσιμη</u> από την $i \in S$ αν $P(X_n = j \text{ για κάποιο } n \mid X_0 = i) > 0$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_n p_{ij}^{(n)} > 0$$

Τότε, γράφουμε $i \to j$ (j προσπελ. από την i)

<u>π.χ.</u>

$2 \to 1$
$3 \to 1$
$4 \not\to 1$
$5 \to 1$
$1 \to 2$ $(P_{13}P_{12} > 0 \Rightarrow P_{12}^{(2)} > 0)$

<u>ΟΡΣ</u> (επικοινωνία)

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ. S

Οι $i, j \in S$ <u>επικοινωνούν</u> αν $i \to j$ και $j \to i$

Τότε γράφουμε $i \leftrightarrow j$

<u>παράδειγμα</u>

$1 \leftrightarrow 3$
$2 \leftrightarrow 3$
$1 \leftrightarrow 2$

<u>Θεώρημα</u>

Η επικοινωνία είναι σχέση ισοδυναμίας. Άρα ο χώρος καταστάσεων χωρίζεται σε κλάσεις επικοινωνίας.

παράδειγμα

Οι κλάσεις επικοινωνίας είναι
$\{1,2,3\}$
$\{4\}$
$\{5\}$

ΟΡΣ (κλειστή/ανοιχτή κλάση επικοινωνίας)

Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ με χ.κ. S. Μία κλάση επικοινωνίας C καλείται κλειστή αν

$$P_{ij}=0 \ , \forall i\in C \ , j\in S \setminus C$$

Μία κλάση επικοινωνίας που δεν είναι κλειστή λέγεται ανοιχτή.

παράδειγμα

$\{1,2,3\}$ ανοιχτή $P_{24}>0$

$\{4\}$ κλειστή $P_{44}=1$

$\{5\}$ ανοιχτή $P_{52}>0$

ΟΡΣ (απορροφητική κατάσταση)

Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ. S. Μία κατάσταση j λέγεται απορροφητική αν η $\{j\}$ αποτελεί κλειστή κλάση επικοινωνίας.

παράδειγμα

Η $\{4\}$ είναι απορροφητική

Η $\{5\}$ όχι απορροφητική γιατί δεν είναι κλειστή.

ΟΡΣ (αδιαχώριστη ΜΑΔΧ)

Μια ΜΑΔΧ $\{X_n, n\geq 0\}$ με χ.κ. S λέγεται αδιαχώριστη αν όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν.

3.4 Χρόνοι 1ης εισόδου

ΟΡΣ:

Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ. S, αρχική κατανομή $\underline{\Pi}^{(0)}$ και πίνακα πιθ. μετάβασης 1ης τάξης P. Αν $C \subset S$ ορίζουμε τα ακόλουθα:

$T_C = \inf\{n\geq 0 : X_n \in C\}$: χρόνος 1ης εισόδου στο C

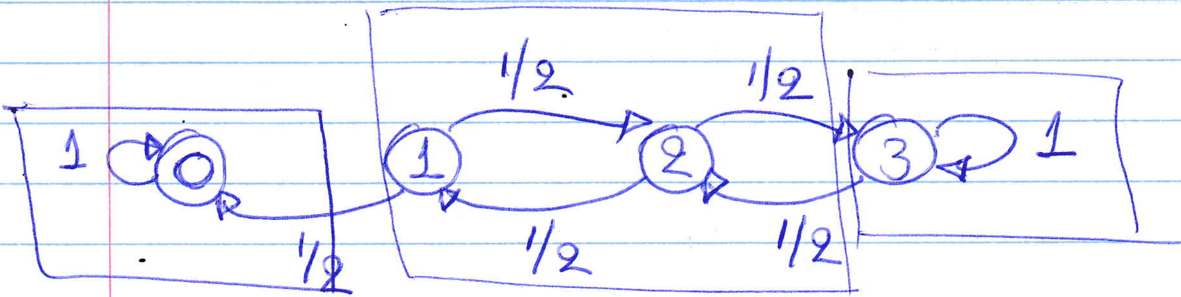
$h_i(C) = P(T_C < \infty \mid X_0 = i)$: πιθ. εισόδου στο C ξεκινώντας από την i

$P\left(\begin{array}{c}\text{χρόνος εισόδου στο} \\ C \text{ πεπ. ξεκινώντας} \\ \text{από την } i\end{array}\right)$

$m_i(C) = E[T_C | X_0 = i]$: μέσος χρόνος εισόδου στο C ξεκινώντας από την i

Όταν το C είναι κλειστό, ο T_C λέγεται χρόνος απορρόφησης.

<u>παράδειγμα</u>



Αρχικά βρίσκομαι στην 1: $\pi_1^{(0)} = 1$

α) πιθανότητα να απορροφηθεί στην 3 $= h_1(\{3\}) = ;$

β) μέσος χρόνος μέχρι να απορροφηθεί στην 0 ή 3 $= m_1(\{0,3\}) = ;$

<u>Λύση</u>

α) Για να υπολογίσω την $h_1(\{3\})$, γράφω (Δημ. συσ. εξισ. για τις $h_i(\{3\})$) εξισώσεις $h_i(\{3\}), i \in S$ κάνοντας ανάλυση 1ου βήματος και λύνω το σύστημα:

$$h_0(\{3\}) = 0$$

$$h_3(\{3\}) = 1$$

$$h_1(\{3\}) = P(T_{\{3\}} < \infty \mid X_0 = 1) \overset{\text{θοπ}}{=}$$

$$P(T_{\{3\}} < \infty \mid X_0 = 1, X_1 = 0)\, P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1)$$

$$+ P(T_{\{3\}} < \infty \mid X_0 = 1, X_1 = 2)\, P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1)$$

$$= \cancel{h_0(\{3\})}^{\,0} \frac{1}{2} + h_2(\{3\}) \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$h_1(\{3\}) = \frac{1}{2} h_2(\{3\})$$

$$h_2(\{3\}) = \frac{1}{2} h_1(\{3\}) + \frac{1}{2} \underbrace{h_3(\{3\})}_{=1} \rightarrow$$

$$h_2(\{3\}) = \frac{1}{2} h_1(\{3\}) + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$h_2(\{3\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} h_2(\{3\}) + \frac{1}{2} \longrightarrow$$

$$\frac{3}{4} h_2(\{3\}) = \frac{1}{2} \Rightarrow h_2(\{3\}) = \frac{2}{3}$$

Άρα, $h_1(\{3\}) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} = \frac{1}{3}$

β) Για να υπολογίσω το $m_1(\{0,3\})$ θα γράψω εξισώσεις για τα $m_i(\{0,3\})$ κάνοντας ανάλυση πρώτου βήματος και θα λύσω το σύστημα.

$$\left.\begin{aligned} m_0(\{0,3\}) &= 0 \\ m_3(\{0,3\}) &= 0 \\ m_1(\{0,3\}) &= 1 + \frac{1}{2}\cancelto{0}{m_0(\{0,3\})} + \frac{1}{2} m_2(\{0,3\}) \\ m_2(\{0,3\}) &= 1 + \frac{1}{2} m_1(\{0,3\}) + \frac{1}{2}\cancelto{0}{m_3(\{0,3\})} \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow m_0(\{0,3\}) = 0,\ m_1(\{0,3\}) = 2,\ m_2(\{0,3\}) = 2$

$m_3(\{0,3\}) = 0$

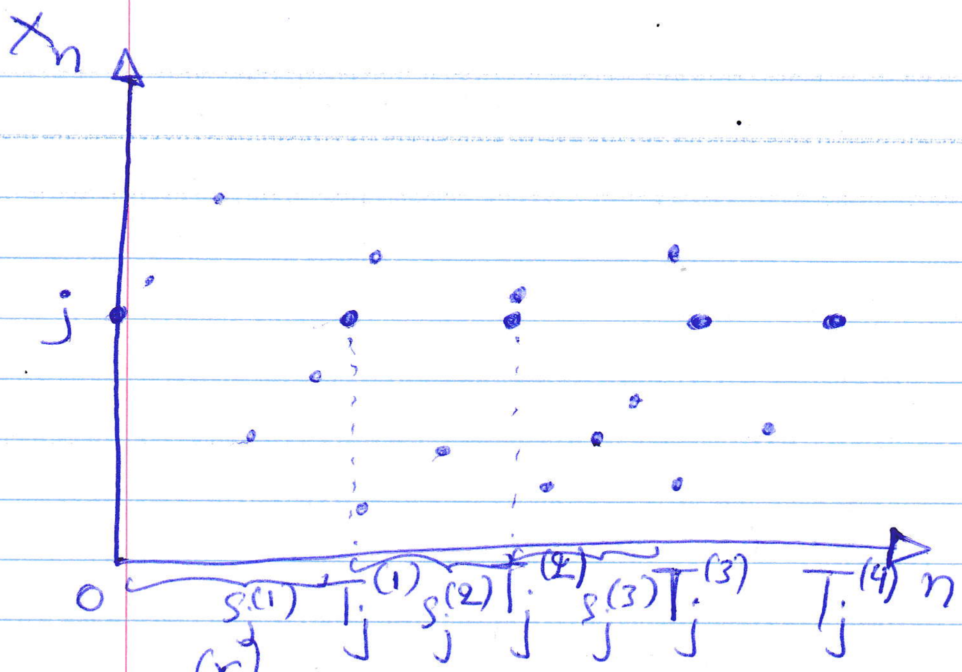
<u>3.5 Επαναληπτικότητα/Παροδικότητα Κατ.</u>

<u>Σύνδεση ΜΑΔΧ με ανανεωτική θεωρία</u>

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ. S, πίνακα πιθ. μετάβασης $1^{ης}$ τάξης P.

Έστω μία κατάσταση $j \in S$

Υποθέτουμε ότι το σύστημα αρχικά βρίσκεται στην κατάσταση j



$T_j^{(r)}$: χρόνος r-οστής επίσκεψης στην j-κατ.

$S_j^{(r)}$: χρόνος μεταξύ (r−1) επίσκεψης και r επίσκεψης στην j

$S_j^{(1)}, S_j^{(2)}, S_j^{(3)}, \dots$ λόγω της Μαρκοβ. ιδ. θα είναι ανεξ.-ισον. τ.μ.

$N_j(n)$ = # επισκέψεων στην j κατάσταση μέσα στις χρονικές στιγμές $1, 2, \dots, n$

Η $\{N_j(n), n \geq 0\}$ είναι ανανεωτική διαδικασία

$N_j(\infty)$ = συνολικός αριθμός επισκέψεων στην j

Αναν. Διαδ. → Επαναλ. / Παροδική / Μεταβ.

h_j = πιθανότητα επανόδου στην κατάσταση j

$= P(T_j^{(1)} < \infty \mid X_0 = j) = P(S_j^{(1)} < \infty \mid X_0 = j)$

$= h_j(\{j\})$ (πιθ. εισόδου στην j ξεκινώντας από την j)

Σχετίζεται με το αν η διαδ. είναι επαναληπτική ή όχι.

m_j = μέσος χρόνος επανόδου στην j

$= E[T_j^{(1)} \mid X_0 = j] = m_j(\{j\})$

από την ανανεωτική θεωρία γνωρίζουμε

ότι $h_j = 1 \iff P(S_j^{(1)} < \infty \mid X_0 = j) = 1 \Rightarrow$

$P(N_j(\infty) = \infty) = 1$ και η $\{N_j(n), n \geq 0\}$ λέγεται

επαναληπτική

$h_j < 1 \iff P(S_j^{(1)} < \infty \mid X_0 = j) = 1 \Longrightarrow$

$$P(N_j(\infty) = \infty) = 0$$

$$P(N_j(\infty) = k) = h_j^k (1 - h_j), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Τότε, η $\{N_j(n), n \geq 0\}$ λέγεται παροδική ή μεταβατική.

ΟΡΣ

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ. S και κατάσταση $j \in S$.

Η j λέγεται <u>επαναληπτική</u> (έμμονη, επανερχόμενη) αν $h_j = 1$

επιπλέον, αν $m_j < \infty$ η j ονομάζεται <u>θετικά επαναληπτική</u> ενώ αν $m_j = \infty$ η j ονομάζεται <u>μηδενικά επαναληπτική</u>

Η j ονομάζεται <u>παροδική</u> (μεταβατική) $h_j < 1$

<u>Θεώρημα</u> (Χαρακτηρισμός Επαναληπτικότητας Παροδικότητας)

α) j επαναληπτική $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$

β) j παροδική $\Leftrightarrow \sum_{n} p_{jj}^{(n)} < \infty$

Απόδειξη

α) $(\Rightarrow)$ j-επαναληπτική $\Rightarrow P(N_j(\infty)=\infty)=1$

$$\Rightarrow E[N_j(\infty) \mid X_0=j]=\infty \Rightarrow E\left[\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n=j\}} \mid X_0=j\right]$$

$$\sum_{n\geq 1} E\left(1_{\{X_n=j\}} \mid X_0=j\right)=\infty \Rightarrow$$

$$\sum_{n\geq 1} P(X_n=j \mid X_0=j)=\infty \Rightarrow$$

$$\sum_{n\geq 1} p_{jj}^{(n)}=\infty \Rightarrow \sum_{n\geq 0} p_{jj}^{(n)}=\infty$$

β) $(\Rightarrow)$ j-παροδική $\Rightarrow P(N_j(\infty)=k)=h_j^{k}(1-h_j)$

$$\Rightarrow E[N_j(\infty) \mid X_0=j]<\infty \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}<\infty \Rightarrow \sum_{n\geq 0} p_{jj}^{(n)}<\infty$$

Ασκήσεις (από φυλλάδιο)

3) $\{N(t), t \geq 0\}$ RP

$\{N_p(t), t \geq 0\}$ μετρά κάθε γεγονός της $N(t)$ μ.π. p και μ.π. $1-p$ αγνοεί

$\{N_p(t), t \geq 0\}$ RP;

$M_p(t) = E[N_p(t)]$, $\tilde{M}_p(s) = ;$ συναρτήσει $\tilde{G}(s)$ και p (όπως στην Poisson)

<u>α'-τρόπος</u>

$X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ ενδ. χρόνοι γεγονότων της $\{N(t), t \geq 0\}$ με σ.κ. $G(t)$

$X_{1p}, X_{2p}, \ldots, X_{np}, \ldots$ ενδ. χρ. γεγ. στην $\{N_p(t), t \geq 0\}$

$X_{i,p}$ = χρόνος μέχρι να καταγραφεί ένα γεγονός $= \sum_{n=1}^{N} X_n$

όπου $N \sim Geom(p)$

$$M_p(t) = E[N_p(t)]$$

$$\tilde{M}_p(s) = \frac{\tilde{G}_p(s)}{1-\tilde{G}_p(s)} \quad \text{(έχει δειχθεί)}$$

(από Θεώρημα) $\quad P_N(t) = \dfrac{tp}{1-(1-p)t}$

Αν έχω ακολουθία $X_1, \dots, X_n, \dots$ αν.ισ. με LST της σ.κ. $\tilde{G}(s)$ και $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ τ.μ. ανεξ. των $X_1, \dots, X_n, \dots$ με πιθανογεννήτρια $P_N(s)$ τότε ο LST του $\sum_{n=1}^{N} X_n$ δίνεται από

$$\tilde{G}_p(s) = P_N(\tilde{G}(s))$$

Εδώ $\quad \tilde{G}_p(s) = \dfrac{p \cdot \tilde{G}(s)}{1-(1-p)\tilde{G}(s)}$

$$\tilde{M}_p(s) = \frac{\dfrac{p\tilde{G}(s)}{1-(1-p)\tilde{G}(s)}}{1-\dfrac{p\tilde{G}(s)}{1-(1-p)\tilde{G}(s)}} \Rightarrow$$

$$\tilde{M}_p(s) = \frac{p\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} \Rightarrow \tilde{M}_p(s) = p\tilde{M}(s) \Rightarrow$$

$$E(N_p(t)) = pE(N(t))$$

β'-τρόπος

$$E(M_p(t)) = \sum_{n\geq 0} \underbrace{E(M_p(t) \mid N(t)=n)}_{\sim Bin(n,p)} P(N(t)=n)$$

$$= \sum_{n\geq 0} np P(N(t)=n) = p \sum_{n\geq 0} n P(N(t)=n)$$

$$= pE(N(t)) \Rightarrow$$

$$M_p(t) = p\, M(t) \xrightarrow{LST} \tilde{M}_p(s) = p\tilde{M}(s)$$

$$\Rightarrow \tilde{M}_p(s) = p \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$$

Οι ενδ. χρόνοι καταγραφής γεγ. είναι ανεξ μεταξύ τους.