3º ΜΑΘΗΜΑ

2/3/2021

Ορισμός 3 ⇒ Ορισμός 1

$P(N(0)=0) = P(X_1>0) = 1-P(X_1\le 0) = 1-F_{X_1}(0) =$

το 1º γεγ να μην γίνει την στιγμή 0

$= 1-(1-e^{-\lambda\cdot 0})$

$= 1$

$N(t)\geq n \Leftrightarrow S_n \le t$

$P(N(t)=n) = P(n\le N(t)<n+1) =$
$= P(N(t)\geq n) - P(N(t)\geq n+1)$
$= P(S_n\le t) - P(S_{n+1}\le t) \Rightarrow (*)$

$X_i \sim Exp(\lambda)$, $i=1,2,\dots \Rightarrow S_n \sim Erlang(n,\lambda)$, $n\geq 1$

$(*) \Rightarrow P(N(t)=n) = P(S_n\le t) - P(S_{n+1}\le t)$

$$= F_{S_n}(t) - F_{S_{n+1}}(t)$$

$$= \left(1-\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) - \left(1-\sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right)$$

$$= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Άρα $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$

Λόγω της αμνήμονης έχω ανεξ. προσ. κ' ομοιογ.

Παρατήρηση:

$Z \sim Erlang(n, \lambda)$

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \int_0^z f_Z(u)\,du = \int_0^z \frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-\lambda u}\,du$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda z)^k}{k!}$$

Ιδέα

$$F_Z(z) = \int_0^z \frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-\lambda u}\,du = P(Z \leq z) \quad \text{θεωρώ } \underline{PP(\lambda)}$$

$$P(S_n \leq z) = P(N(z) \geq n) = 1 - P(\underbrace{N(z)}_{\sim Poisson(\lambda z)} \leq n-1)$$

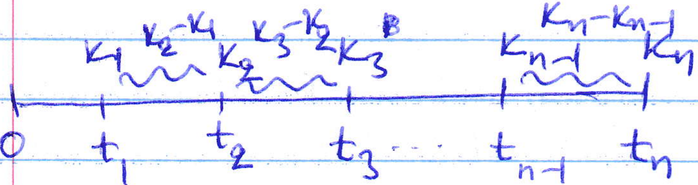
$$= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda z} \frac{(\lambda z)^k}{k!}$$

Από κοινού κατανομή

$\{N(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda)$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$

$0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$

$$P(N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_2, \dots, N(t_n) = k_n) =$$



Ανεξαρτησία μη-επικαλ. διαστ.

$$= P(N(t_1)=k_1,\ N(t_2)-N(t_1)=k_2-k_1,$$

$$N(t_3)-N(t_2)=k_3-k_2,\cdots,$$

$$N(t_n)-N(t_{n-1})=k_n-k_{n-1})$$

Τεχνική

$$\underset{\text{ανεξ. πρ.}}{=} P(N(t_1)=k_1)P(N(t_2)-N(t_1)=k_2-k_1)\cdots$$

$$P(N(t_n)-N(t_{n-1})=k_n-k_{n-1})$$

$$\underset{\text{ομ. πρ.}}{=} P(N(t_1)=k_1)P(N(t_2-t_1)=k_2-k_1)\cdots$$

$$P(N(t_n-t_{n-1})=k_n-k_{n-1})$$

$$= e^{-\lambda t_1}\frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!}\ e^{-\lambda(t_2-t_1)}\frac{(\lambda(t_2-t_1))^{k_2-k_1}}{(k_2-k_1)!}\cdots$$

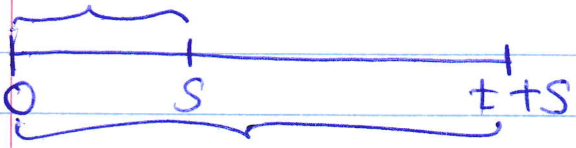
$$e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})}\frac{(\lambda(t_n-t_{n-1}))^{k_n-k_{n-1}}}{(k_n-k_{n-1})!}$$

$$= e^{-\lambda t_n}\frac{(\lambda t_1)^{k_1}(\lambda(t_2-t_1))^{k_2-k_1}\cdots(\lambda(t_n-t_{n-1}))^{k_n-k_{n-1}}}{k_1!(k_2-k_1)!\cdots(k_n-k_{n-1})!}$$

! Υπολογίζαμε τη μεταβατική κατανομή της Poisson εύκολα λόγω της αμνήμονης ιδ. των ενδ. χρόνων.
Ο χρόνος μεταβ. στην επόμενη κατ. είναι Exp(λ). Από 1 κατ. μεταβ. στην επόμενη.

<u>παράδειγμα 1</u>

$\{N(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda)$ $t \geq 0$, $s \geq 0$



$Cov[N(s), N(t+s)] = ;$

<u>Λύση:</u>

$$Cov[N(s), N(t+s)] = E[N(s)N(t+s)] - E[N(s)]E[N(t+s)]$$

$$= E\left[N(s)\left[\underbrace{N(t+s)-N(s)} + \underbrace{N(s)}\right]\right] - \lambda s \lambda(t+s)$$

$$= E\left[N(s)\left[N(t+s)-N(s)\right]\right] + E[N(s)N(s)] - \lambda^2 s(t+s)$$

$$= E[N(s)]E[N(t+s)-N(s)] + E[N^2(s)] - \lambda^2 s(t+s)$$

$$= \lambda s \cdot \lambda t + Var[N(s)] + E^2(N(s)) - \lambda^2 s(t+s)$$

$$= \lambda^2 st + \lambda s + (\lambda s)^2 - \lambda^2 st - \lambda^2 s^2$$

$$= \lambda s$$

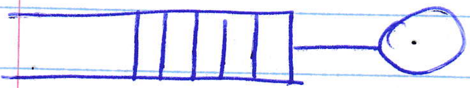
παράδειγμα 2

Συσ. εξυπ. με έναν υπηρέτη

Διαδ. Αφίξεων PP(λ)

Χρ. Εξυπ. ~ Exp(μ)

Τη στιγμή 0, στο σύστημα υπάρχει 1 πελ.



$p = P\Big(\underbrace{\text{ο δεύτερος πελ. που θα εξυπ. να αφήσει κενό το συσ. φεύγοντας}}_{A}\Big)$

Λύση:

X_1 = χρόνος εξυπ. $1^{ου}$ πελάτη ~ Exp(μ)
X_2 = " $2^{ου}$ πελ. ~ Exp(μ)
Y_2 = ενδ. χρ. άφιξης $2^{ου}$ πελ. ~ Exp(λ)
Y_3 = — " — $3^{ου}$ πελ. ~ Exp(λ)

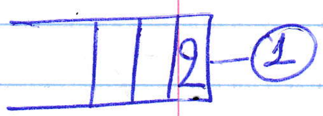
Το Α πρέπει να εκφρ. συναρτήσει των χρόνων.

Επόμενα Γεγ.: i) να εξυπ. ο πελάτης
ii) να γίνει άφιξη

$$p = P(A) \underset{\Theta.\text{Ο}.\Pi.}{\overset{\substack{\text{πρέπει να}\\ \text{ξέρω το}\\ \text{επόμ. γεγ.}}}{=}} P\left(A \,\middle|\, \begin{matrix}\text{ο 2ος πελ. έφτασε}\\ \text{πριν εξυπ. ο 1ος}\end{matrix}\right) \times P\begin{pmatrix}\text{ο 2ος πελ. να}\\ \text{φτάσει πριν εξυπ.}\\ \text{ο 1ος}\end{pmatrix} +$$

$$P\left(A \,\middle|\, \begin{matrix}\text{ο 2ος έφτασε}\\ \text{αφού εξυπ. ο}\\ \text{1ος}\end{matrix}\right) P\begin{pmatrix}\text{ο 2ος να}\\ \text{φτάσει μετά}\\ \text{την εξυπ. του 1ου}\end{pmatrix}$$

$$= P(A \mid Y_2 \le X_1)\, P(Y_2 \le X_1) + P(A \mid Y_2 > X_1)\, P(Y_2 > X_1)$$



$$= P(Y_3 > X_1 + X_2 \mid Y_2 \le X_1)\, P(Y_2 \le X_1) + P(Y_3 > X_2 \mid Y_2 > X_1)\, P(Y_2 > X_1)$$

$$= P(Y_3 > X_1 + X_2)\, \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

Τεχνική (Exp > T.M. + T.M.)

$$P(Y_3 > X_1 + X_2) \overset{\text{θοπ}}{=} P(Y_3 > X_1 + X_2 \mid Y_3 > X_1)\, P(Y_3 > X_1) + \underbrace{P(Y_3 > X_1 + X_2 \mid Y_3 \le X_1)}_{0}\, P(Y_3 \le X_1)$$

(Exp > Exp + Exp)

Ισχυρή Αμν.

$$\left.\begin{matrix} X \sim Exp(\lambda) \\ T \geq 0 \\ X, T \text{ ανεξ.} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (X - T \mid X > T) \sim Exp(\mu)$$

$$= P(Y_3 - X_2 > X_1 \mid Y_3 > X_1)\, \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$\underline{(Y_3 - X_1 \mid Y_3 > X_1) = Z \sim Exp(\lambda)} \quad P(Z > X_2)\, \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$= \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

Άρα, $p = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2$

1.3 Δεσμευμένη Κατανομή

$(S_1, S_2, \ldots, S_n \mid N(t) = n)$

n-ομοιομ. καταν. τ.μ. στο $(0,t]$

είναι σαν να παίρνω τις διατετ. $S_{(1)}, \ldots, S_{(n)}$

Διατεταγμένες ομοιόμορφα καταν. τ.μ.

$U_1, U_2, \ldots, U_n \sim U[0,t]$

$U_1, U_2, \ldots, U_n$ ανεξ.

$\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \ldots, \tilde{U}_n$ αντίστ. διατεταγμένες τ.μ

Τότε $f_{\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \ldots, \tilde{U}_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & 0<t_1<t_2<\cdots<t_n \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$

$\Downarrow$

$E[\tilde{U}_k] = k\frac{t}{n+1}$

Θεώρημα Campbell.

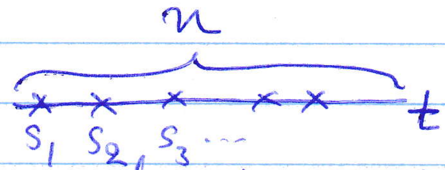
$$(S_1, S_2, \dots, S_n \mid N(t)=n) \overset{d}{=} (\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \dots, \tilde{U}_n)$$

όπου $U_1, U_2, \dots, U_n \sim U[0,t]$

$U_1, U_2, \dots, U_n$ ανεξ.

$\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \dots, \tilde{U}_n$ διατ. τ.μ.

Ερμηνεία:

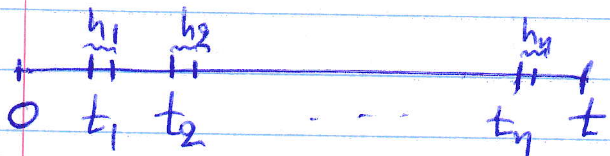


Αν γνωρίζω ότι μέχρι τη στιγμή t έχουν γίνει n-γεγονότα, μπορώ να θεωρήσω n-ανεξ. ομοιομ. τ.μ. στο $[0,t]$. Τότε, το S_1 είναι η μικρότερη από αυτές, το S_2 η $2^{η}$ μικρότερη, ... το S_n η μεγαλύτερη

- Η κατανομή $(S_1, S_2, \dots, S_n \mid N(t)=n)$ είναι ανεξ. του λ

Απ:

Έστω $0<t_1<t_2<\dots<t_n<t$ και $h_1,h_2,\dots,h_n>0$



τόσο μικρά ώστε $t_i+h_i<t_{i+1}$ $\forall i=1,\dots,n-1$

και $t_n+h_n<t$

$$f_{(S_1,S_2,\dots,S_n|N(t)=n)}(t_1,t_2,\dots,t_n)h_1h_2\cdots h_n=$$

$$\left[f_X(x)\cdot h=P(X\in(x,x+h))\right]$$

$$\frac{P[t_1<S_1\le t_1+h_1,\ t_2<S_2\le t_2+h_2,\dots,t_n<S_n\le t_n+h_n \mid N(t)=n]}{P(N(t)=n)}=$$

$$=\frac{P(N(t_1)=0,\ N(t_1+h_1)-N(t_1)=1,\ N(t_2)-N(t_1+h_1)=0,\dots,\ N(t_n+h_n)-N(t_n)=1,\ N(t)-N(t_n+h_n)=0)}{P(N(t)=n)}\ \text{ανεξ. πρ.}$$

$$=\frac{e^{-\lambda t_1}\frac{(\lambda t_1)^0}{0!}(\lambda h_1+o(h_1))e^{-\lambda(t_2-t_1-h_1)}(\lambda h_2+o(h_2))\cdots(\lambda h_n+o(h_n))e^{-\lambda(t-t_n-h_n)}}{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

Διαμερώ με $h_1, h_2, \dots, h_n$ και $h_i \longrightarrow 0^+, i=1,\dots,n$

$$f_{(S_1, S_2, \dots, S_n | N(t)=n)}(t_1, \dots, t_n) =$$

$$= \frac{e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda(t_2-t_1)} \cdots e^{-\lambda(t-t_n)} \cancel{\lambda^n}}{e^{-\lambda t} \frac{\cancel{\lambda^n} t^n}{n!}} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t} \frac{t^n}{n!}} = \frac{n!}{t^n}.$$

Γνωρίζοντας τον αριθμό γεγ. έως τη στιγμή t ξέρουμε την κατανομή των χρόνων που έγιναν τα γεγονότα.