ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

23/2/2021

Ενότητες

Διαδικασίες Poisson (2w)

Ανανεωτικές Διαδ. (3w)

ΜΑΔΧ (3w)

ΜΑΣΧ (2w-3w)

Martingales (2w)

Βιβλιογραφία

1) Modelling and Analysis of Stochastic Systems, Kulkarni

2) Stochastic Processes, Ross

<u>Στοχαστικές Διαδικασίες - Μονοπάτια</u>

Στοχ. Διαδ. ή στοχ. ανέλιξη ονομάζεται ένα σύνολο τ.μ. $\{X(\alpha) : \alpha \in T\}$

Η σ.δ. προκύπτει από την παρατήρηση ενός φαινομένου που εξελίσσεται τυχαία.

<u>Σημ.</u> Ανάλογα με τις στιγμές του T διακρίνεται σε συνεχές ή διακριτό σύνολο.

Οι τυχαίες μεταβλητές παίρνουν τιμές στο S που ονομάζεται <u>χώρος καταστάσεων</u>.

Το T ονομάζεται <u>παραμετρικός χώρος</u>

<u>Συνήθεις περιπτώσεις</u>

<table>
<tr><th>S \ T</th><th>διακρ.</th><th>συνεχής</th></tr>
<tr><td>Αριθμ.</td><td rowspan="2">Σ.Δ. Διακριτού χρόνου</td><td rowspan="2">Σ.Δ. Συνεχούς χρόνου</td></tr>
<tr><td>Μη Αριθμ.</td></tr>
</table>

Σ.Δ. Αριθμ. Σύνολο - Διακριτού Χρόνου
(Απόθεμα Αποθήκης)

Σ.Δ. Μη Αριθμ. Συν. - Διακριτού Χρόνου.
(Χρωμοσειρά - in Quartiles Obs).

Σ.Δ. Αριθ. Σύνολο - Συνεχούς Χρόνου
(Σ.Δ. Poisson στο Χρόνο)

Σ.Δ. Μη-Αριθ. Σύνολο - Συνεχούς Χρ.

(Κίνηση Brown).

Τι θέλουμε να βρούμε σε μία Σ.Δ.?

Για κάθε στιγμή που παρατ. θέλω να ξέρω την κατανομή της τ.μ. (μεταβατική συμπ.)

- μεταβατική συμπεριφορά $\Leftrightarrow$ κατανομή X_n ή $X(t)$
- οριακή συμπεριφορά $\Leftrightarrow$ $X_n \xrightarrow{n} ?$ $n \to \infty$
  $X(t) \to ?$, $t \to \infty$
- Χρόνοι πρώτης μετάβασης $\Leftrightarrow$ $T = \min\{n : X_n \in B\}$
  (κατανομή?)
  $T = \min\{t \geq 0 : X(t) \in B\}$
- Κόστη σ.δ.

Ενότητα 1η: Διαδικασία Poisson

1.1 Εκθετική Κατανομή

$X \sim Exp(\lambda) \quad \lambda > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes

$$\tilde{F}_X(s) = E\left[e^{-sX}\right] = \int_0^\infty e^{-sx} f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx} \lambda x\, e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)x}\,dx$$

$$= \lambda \left. \frac{e^{-(\lambda+s)x}}{-(\lambda+s)} \right|_0^\infty \quad \frac{\lambda+s>0}{s>-\lambda}$$

$$\lambda\left[0 - \frac{1}{-(\lambda+s)}\right] = \frac{\lambda}{\lambda+s}, \quad s > -\lambda$$

r-τάξης ροπής

$$E[X^r] = (-1)^r \left[\frac{d^r\tilde{F}_x(s)}{ds^r}\right]_{s=0} = \frac{r!}{\lambda^r}$$

$$\frac{d\tilde{F}_x(s)}{ds} = \int_0^\infty x e^{-sx} f_x(x)dx \Big|_{s=0} = \int_0^\infty -x f_x(x)dx = -EX$$

$$\Rightarrow E(X) = -\frac{d\tilde{F}_x(s)}{ds}\Big|_{s=0}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$EX^2 = \frac{2!}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Ιδιότητες

Αμνήμονη Ιδιότητα (Memoryless Property)

Μία $X \geq 0$ έχει την αμνήμονη ιδιότητα

αν $P(X > s+t \mid X > t) = P(X > s)$, $s,t \geq 0$

$$\| $$

$$P(\underbrace{X-t}_{\text{υπολ. χρόνος}} > s \mid X > t)$$

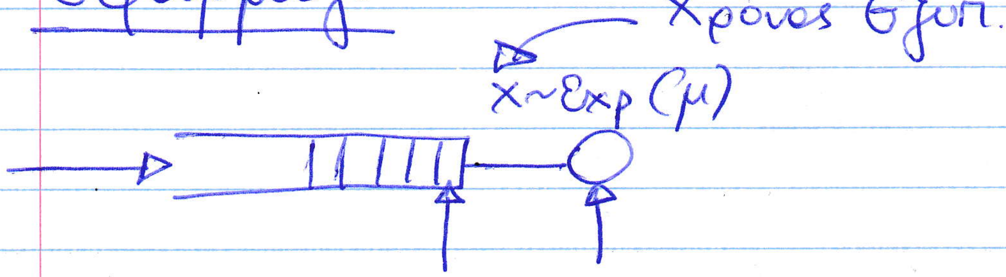
! Δεδ. ότι το γεγονός δεν έχει γίνει έως τη στιγμή t η πιθ. ο υπολ. χρόνος $(X-t)$ να είναι $> s$ είναι ίδια με την πιθ. $X > s$

Αν ένα γεγονός δεν έχει γίνει έως τη στιγμή t τότε περιμένω το γεγ. σαν να ξεκινάει από την αρχή.

Θεώρημα

Μία συνεχής μη αρνητική τ.μ. έχει την αμνήμονη ιδιότητα αν ακολουθεί την εκθετική κατανομή.

Εφαρμογή



Ο δεύτερος πελ. μπαίνει μετά από 3' δεδομένου ότι ο πρώτος δεν είχε ολοκλ. την εξυπ. του λόγω αμνήμονης ιδ. η εξυπ. ξεκινά από την αρχή

$$E\begin{bmatrix}\text{Χρόνος αναμονής} \\ \text{2ου πελάτη}\end{bmatrix} = E\begin{bmatrix}\text{υπολειπ. χρόνος} \\ \text{εξυπ. του} \\ \text{1ου πελάτη}\end{bmatrix} \overset{\text{αμνημ.}}{=}$$

$$E\begin{bmatrix}\text{Χρόνος} \\ \text{εξυπ.}\end{bmatrix} = \frac{1}{\mu}$$

Ρυθμός βλάβης (Hazard-Failure Rate)

Έστω $X \geq 0$ συνεχής τ.μ. με σππ $f(x)$

σ.κ. $F(x)$ και συν. επιβίωσης $F^c(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$

$x \in \mathbb{R}$

Ο ρυθμός βλάβης ορίζεται ως

$$r(x) = \frac{f(x)}{F^c(x)}, \quad x \geq 0$$

Τι είναι ο ρυθμός βλάβης αν X χρόνος ζωής;

$$P(X \in (x, x+h] \mid X > x) = \frac{P(X \in (x, x+h], X > x)}{P(X > x)}$$

πιθ. να πεθάνει στο διαστ. μήκους h δεδ. ότι έχει ζήσει x

$$= \frac{P(X \in (x, x+h])}{P(X > x)}$$

$$= \frac{f(x) \cdot h + o(h)}{F^c(x)}, \quad \frac{o(h)}{h} \xrightarrow[h \to 0^+]{} 0$$

$$= \frac{f(x)}{F^c(x)} \cdot h + \tilde{o}(h), \quad \frac{\tilde{o}(h)}{h} \xrightarrow[h \to 0^+]{} 0$$

$$= r(x) h + \tilde{o}(h)$$

Άρα, $P(X \in (x, x+h] \mid X > x) = r(x) \cdot h + \tilde{o}(h)$

Άρα, για $h \to 0^+$, $r(x) \cdot h$ είναι η δεσμ. πιθ. μία μηχανή με χρόνο ζωής X να χαλάσει στο διάστημα $(x, x+h]$ δεδομ. ότι δεν έχει χαλάσει εώς τη χρ. στιγμή x.

<u>Θεώρημα</u>

Μία συνεχής μη-αρνητική τ.μ. έχει σταθερό ρυθμό βλάβης, $r(x) = \lambda > 0, \forall x \geq 0$ ανν ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.

(Η μόνη κατ. με σταθ. $r(x)$ είναι η εκθ.)

<u>Πιθανότητα 1ης βλάβης</u>.

$$P(X_1 < X_2) = P(X_1 = \min\{X_1, X_2\})$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \sim Exp(\lambda_1) \\ X_2 \sim Exp(\lambda_2) \end{array}\right\} \text{ανεξ}$$

Τεχνική!!

Δεσμεύω ως προς X_1

$$P(X_1<X_2)=\int_0^{\infty} P(X_2>X_1 \mid X_1=x)\, f_{X_1}(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\infty} P(X_2>x \mid X_1=x)\, \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\,dx$$

$$\overset{X_1, X_2 \text{ ανεξ.}}{=\!=}\int_0^{\infty} P(X_2>x)\, \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\,dx$$

$$=\int_0^{\infty} \left(1-F_{X_2}(x)\right) \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\,dx$$

$$=\int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 x}\, \underbrace{\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}}_{f_{X_1}(x)}\,dx$$

$$=\tilde{F}_{X_1}(\lambda_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

Άρα, $P(X_1<X_2)=P(X_1=\min(X_1, X_2))$

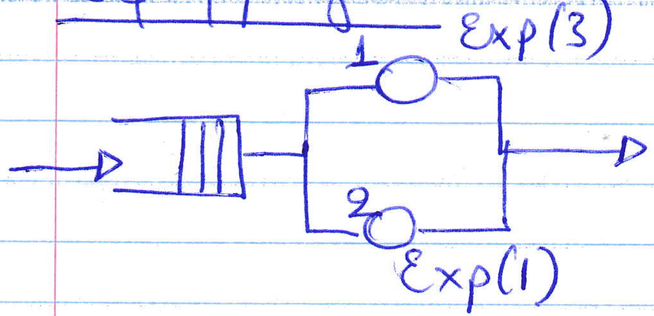
$$=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

Το αποτέλεσμα γενικεύεται για περισσότερες από 2 εκθετικές τ.μ., X_1, X_2, X_3 ανεξ.

$$P(X_1=\min\{X_1, X_2, X_3\})=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$$

Εφαρμογή

Ο πελ. 2 έχει ήδη 5' εξυπ.



$P\left(\text{πελ. 1 να εξυπ. πρώτος}\right)$

$\parallel \leftarrow$ αμνήμονη ιδιοτ.

$$\frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

Minimum Εκθετικών Χρόνων

$X_1 \sim Exp(\lambda_1)$

$X_2 \sim Exp(\lambda_2)$

X_1, X_2 ανεξ.

$Z = \min(X_1, X_2) \sim ?$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) \underset{\substack{\text{εφόσον} \\ \text{έχω min} \\ \{Z>z\}}}{=\!=\!=} 1 - P(Z>z) = 1 - P(\min(X_1, X_2) > z)$$

$$= 1 - P(X_1 > z, X_2 > z)$$

$$\overset{\text{αν.}}{=} 1 - P(X_1 > z)P(X_2 > z)$$

$$= 1 - (1 - P(X_1 \le z))(1 - P(X_2 \le z$$

$$= 1 - (1 - F_{X_1}(z))(1 - F_{X_2}(z))$$

$$= 1 - e^{-\lambda_1 z} e^{-\lambda_2 z} = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}$$

$$\Rightarrow F_Z(z) = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z} \Rightarrow Z \sim \mathcal{E}xp(\lambda_1+\lambda_2)$$

Άσκηση

Σύστημα αποτελ. από n-συσκ. συνδεδ. παρ/λα

Το σύστημα λειτουργεί αν τουλ. 1 από

αυτές τις συσκ. λειτουργεί.

X_i: χρόνος ζωής της i-συσκ.

$X_i \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$, $i=1,\dots,n$ και

$X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ. να βρεθεί ο μέσος

χρόνος ζωής του συστήματος.

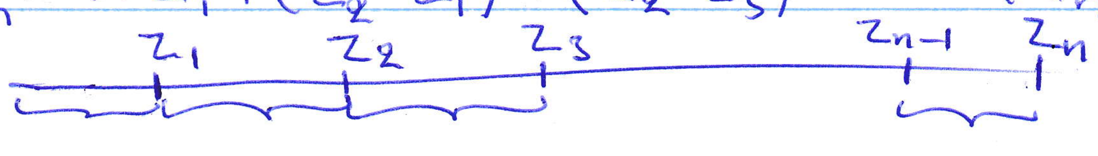
Ιδέα

Z_1 = Ο χρόνος μέχρι να χαλάσει $1^{η}$ μηχανή

$= \min(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{E}xp(n\lambda)$

Z_i = χρόνος μέχρι να χαλάσει i-μηχανή

(1) $Z_n = Z_1 + (Z_2 - Z_1) + (Z_2 - Z_3) + \dots + (Z_n - Z_{n-1})$



$$Z_2 - Z_1 = \min\{\underbrace{X_1, \dots, X_n}_{n-1 \text{ χρόνοι}}\} \sim \mathcal{E}xp((n-1)\lambda)$$

$$Z_3 - Z_2 = \min\{X_2, \dots, X_n\} \sim \mathcal{E}xp((n-2)\lambda)$$

$$Z_{i+1} - Z_i \sim \mathcal{E}xp((n-i)\lambda)$$

$$E(Z_n) \overset{(1)}{=} E(Z_1) + E(Z_2 - Z_1) + \dots + E(Z_n - Z_{n-1})$$

$$= \frac{1}{n\lambda} + \frac{1}{(n-1)\lambda} + \dots + \frac{1}{\lambda}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\lambda}$$