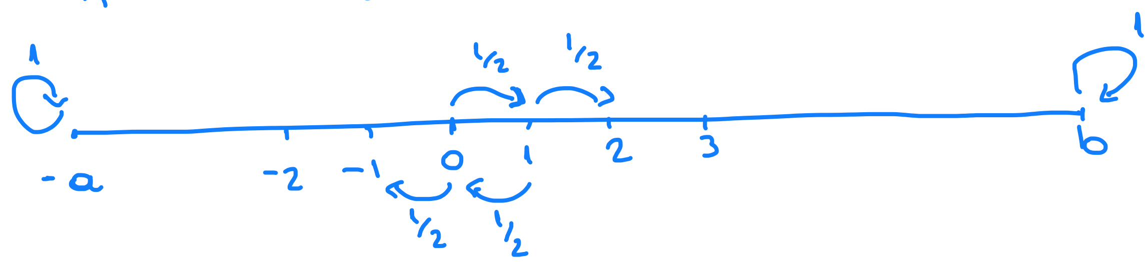
Εφαρμογή 2

Υπολογισμός πιθανοτήτων & μέσων χρόνων απορρόφησης σε απλό τυχαίο περίπατο.

Συμμετρικός απλός τυχαίος περίπατος ξεκινάει από το 0 και έχει φράγματα απορρόφησης $-a$, b.



1) Πιθ. απορρόφησης στο $-a$ και στο b = ?

2) Μέσος # βημάτων ως την απορρόφηση = ?

Λύση

1) $\{Y_1, Y_2, \dots\}$ με

$$P(Y_i = 1) = P(Y_i = -1) = 1/2 \quad , i = 1, 2, 3, \dots$$

$\{X_1, X_2, \cancel{X}_3, \dots\}$ με $\quad X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Η $\{X_n, n \geq 1\}$ είναι martingale ως προς $\{Y_n, n \geq 1\}$.

T : στιγμή απορρόφησης στο $\{-a, b\}$.

Ο T είναι stopping time.

$$E[X_T] = -a\, P(X_T = -a) + b \cdot P(X_T = b) =$$
$$= -a\, P(X_T = -a) + b\,(1 - P(X_T = -a)) .$$

Αν ισχύει το stopping Theorem, τότε

$$E[X_T] = E[X_1] = 0 \Rightarrow$$

$$-a P(X_T=-a) + b - b P(X_T=-a) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(X_T=-a) &= \frac{b}{a+b} \\ P(X_T=b) &= \frac{a}{a+b} \end{aligned}}$$

Ισχύει η συνθήκη (iv) διότι $|X_n| \le \underbrace{\max\{a,b\}}_{\text{σταθερά}} \ \forall n$.

2) Έστω $X_n = \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 - n$.

Θ.δ.ο η $\{X_n, n\ge 1\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n\ge 1\}$.

(i) $E[|X_n|] < \infty \quad \forall n$

(ii) $E[X_{n+1} \mid Y_1, Y_2, \dots, Y_n] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} Y_i\right)^2 - (n+1) \,\middle|\, Y_1, Y_2, \dots, Y_n\right] =$

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i + Y_{n+1}\right)^2 - n - 1 \,\middle|\, Y_1, Y_2, \dots, Y_n\right] =$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) Y_{n+1} + Y_{n+1}^2 \,\middle|\, Y_1, Y_2, \dots, Y_n\right] - n - 1 =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} Y_i \underbrace{E[Y_{n+1} \mid Y_1, Y_2, \dots, Y_n]}_{E[Y_{n+1}] = 0} + \underbrace{E[Y_{n+1}^2 \mid Y_1, Y_2, \dots, Y_n]}_{E[Y_{n+1}^2] = Var[Y_{n+1}] + E^2[Y_{n+1}] = 1 + 0} - n - 1 =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 + 0 + 1 - n - 1 = \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 - n = X_n$$

(iii) X_n εξαρτάται από $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$

Ο T είναι Markov time ως προς $\{X_n, n \geq 0\}$, με $P(T<\infty)=1$.

Αν ισχύει το stopping Theorem, θα πάρουμε

$$X_n = \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 - n, \qquad \sum_{i=1}^{T} Y_i = \begin{cases} -a, & \text{μ.π. } \frac{b}{a+b} \\ b, & \text{μ.π. } \frac{a}{a+b} \end{cases}$$

$$E[X_T] = E[X_1] \Rightarrow$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{T} Y_i = -a\right)\left((-a)^2 - E[T]\right) + P\left(\sum_{i=1}^{T} Y_i = b\right)\left(b^2 - E[T]\right) = E[Y_1^2 - 1] \Rightarrow$$

$$\frac{b}{a+b}\left(a^2 - E[T]\right) + \frac{a}{a+b}\left(b^2 - E[T]\right) = \underbrace{Var[Y_1]}_{=1} + \underbrace{E^2[Y_1]}_{=0} - 1 \Rightarrow$$

$$\frac{a^2 b - bE[T] + ab^2 - aE[T]}{a+b} = 0 \Rightarrow$$

$$E[T] = \frac{ab\cancel{(a+b)}}{\cancel{a+b}} \Rightarrow$$

$$E[T] = a \cdot b.$$

Θ.δ.ο ισχύει η συνθήκη (ii) του stopping Theorem.

$$E[|X_T|] = E\left[\left|\left(\sum_{i=1}^{T} Y_i\right)^2 - T\right|\right] \leq \max\{a^2, b^2\} + E[T] < \infty$$

$$|X_n| I_{\{T>n\}} = \begin{cases} 0, & T \leq n \\ |X_n|, & T>n \end{cases} \leq \max\{a,b\} 1_{\{T>n\}}$$

$$E[|X_n| I_{\{T>n\}}] \leq \max\{a,b\} P(T>n) \to 0 \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$