Εφαρμογή 1:

Ισότητα Wald

Έστω $\{Y_n, n=1,2,\dots\}$ ακολουθία ανεξάρτητων & ισόνομων τ.μ. με $E[Y_n]=\mu$, $Var[Y_n]=\sigma^2<\infty$. Έστω T χρόνος Markov για $\{Y_n, n\geq 1\}$ με $E[T]<\infty$ & $P(T<\infty)=1$. Τότε

$$E\Big[\sum_{i=1}^{T} Y_i\Big] = E[T]\cdot\mu$$

Απόδειξη

Θέτουμε $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i - n\cdot\mu$. Τότε $\{X_n, n\geq 1\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n\geq 1\}$ (δες παρ 2 μαθ 21).

Θα δείξουμε ότι ισχύει η συνθήκη (ν):

$P(T<\infty)=1$

$E[T]<\infty$

$$E\big[|X_{n+1}-X_n| \,\big|\, Y_1, Y_2,\dots,Y_n\big] = E\Big[\Big|\sum_{i=1}^{n+1} Y_i -(n+1)\mu - \sum_{i=1}^{n} Y_i + n\mu\Big| \,\Big|\, Y_1, Y_2,\dots,Y_n\Big]$$

$$= E\big[|Y_{n+1}-\mu|\big] \overset{CS}{\leq} \sigma$$

Άρα $E[X_T]=E[X_1] \Rightarrow$

$$E\Big[\sum_{i=1}^{T} Y_i - T\cdot\mu\Big] = E[Y_1-\mu] \Rightarrow$$

$$E\Big[\sum_{i=1}^{T} Y_i\Big] - \mu E[T] = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{E\Big[\sum_{i=1}^{T} Y_i\Big] = E[T]\cdot\mu.}$$