Παράδειγμα 1

$\{Y_1, Y_2, \dots\}$ ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με $E[Y_i]=0$ και $E[|Y_i|]<\infty$ $\forall\, i=1,2,\dots$. Αν $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, $n=1,2,3,\dots$, τότε ν.δ.ο $\{X_n, n\geq 1\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n\geq 1\}$.

Λύση

Έχουμε $E[|X_n|] = E[|\sum_{i=1}^{n} Y_i|] \leq E[\sum_{i=1}^{n}|Y_i|] = \sum_{i=1}^{n} E[|Y_i|] < \infty$, $\forall n=1,2,\dots$

Επίσης, $E[X_{n+1} \mid Y_1, Y_2, \dots, Y_n] = E[\sum_{i=1}^{n+1} Y_i \mid Y_1, Y_2, \dots, Y_n] =$

$$\underbrace{E[\sum_{i=1}^{n} Y_i \mid Y_1, Y_2, \dots, Y_n]}_{=\sum_{i=1}^{n} Y_i} + \underbrace{E[Y_{n+1} \mid Y_1, Y_2, \dots, Y_n]}_{=E[Y_{n+1}]=0} = \sum_{i=1}^{n} Y_i = X_n$$

Τέλος, η X_n είναι συνάρτηση των $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ αφού $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Παράδειγμα 2

Έστω $\{Y_1, Y_2, \dots\}$ ακολουθία τ.μ. με $E[|Y_n|]<\infty$, $\forall n=1,2,\dots$,

Αν $X_n = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - E[Y_i \mid Y_1, Y_2, \dots, Y_{i-1}]\right)$, τότε ν.δ.ο η $\{X_n, n\geq 1\}$ είναι martingale ως προς την $\{Y_n, n\geq 1\}$.

Λύση

Έχουμε $E[|X_n|] = E[|\sum_{i=1}^{n}(Y_i - E[Y_i \mid Y_1, Y_2, \dots, Y_{i-1}])|] \leq$

$$E[\sum_{i=1}^{n} |Y_i - E[Y_i \mid Y_1, Y_2, \dots, Y_{i-1}]|] \leq$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(|Y_i| + \left|E[Y_i \mid Y_1, Y_2, \ldots, Y_{i-1}]\right|\right)\right] =$$

$$\sum_{i=1}^{n} E[|Y_i|] + \sum_{i=1}^{n} E\left[\left|E[Y_i \mid Y_1, Y_2, \ldots, Y_{i-1}]\right|\right] \underset{\text{Jensen}}{\overset{\text{ανισ.}}{\leq}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} E[|Y_i|] + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E\left[E[|Y_i| \mid Y_1, Y_2, \ldots, Y_{i-1}]\right]}_{E[|Y_i|]} \underset{\text{Μ.Τ}}{\overset{\text{ιδ. διπλής}}{=}}$$

$$2\sum_{i=1}^{n} E[|Y_i|] < \infty$$

Επίσης, $E[X_{n+1} \mid Y_1, Y_2, \ldots, Y_n] =$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n+1}\left(Y_i - E[Y_i \mid Y_1, \ldots, Y_{i-1}]\right) \,\Big|\, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\right]$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - E[Y_i \mid Y_1, \ldots, Y_{i-1}]\right) \,\Big|\, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\right]$$

$$+ E\left[Y_{n+1} - E[Y_{n+1} \mid Y_1, Y_2, \ldots, Y_n] \mid Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - E[Y_i \mid Y_1, \ldots, Y_{i-1}]\right)$$

$$+ E[Y_{n+1} \mid Y_1, Y_2, \ldots, Y_n] - \underbrace{E\Big[\underbrace{E[Y_{n+1} \mid Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]}_{\text{συνάρτηση των } Y_1, Y_2, \ldots, Y_n} \,\Big|\, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\Big]}_{= E[Y_{n+1} \mid Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]}$$

$$= X_n$$

Τέλος, η $X_n = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - E[Y_i \mid Y_1, Y_2, \ldots, Y_{i-1}]\right)$ είναι συνάρτηση των $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.

Παράδειγμα 3 (Doob's martingale)

Αν X τ.μ. με $E[|X|] < \infty$ και $\{Y_1, Y_2, \ldots\}$ ακολουθία τ.μ..

Τότε αν $X_n = E[X \mid Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]$ ν.δ.ο η $\{X_n, n \geq 1\}$ είναι martingale ως προς $\{Y_n, n \geq 1\}$.

Λύση

Έχουμε $E[|X_n|] = E[|E[X \mid Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]|] \overset{\text{ανισ.}}{\underset{\text{Jensen}}{\leq}}$

$$= E[E[|X| \mid Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]] \overset{\text{ιδ. διπλής}}{\underset{\text{μ.τ.}}{=}}$$

$$= E[|X|] < \infty$$

Επίσης, $E[X_{n+1} \mid Y_1, Y_2, \ldots, Y_n] =$

$$E[E[X \mid Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n+1}] \mid Y_1, Y_2, \ldots, Y_n] \overset{\text{ιδ. πύργου}}{=\!=}$$

$$E[X \mid Y_1, Y_2, \ldots, Y_n] = X_n$$

Τέλος, $X_n = E[X \mid Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n]$ είναι συνάρτηση των $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.