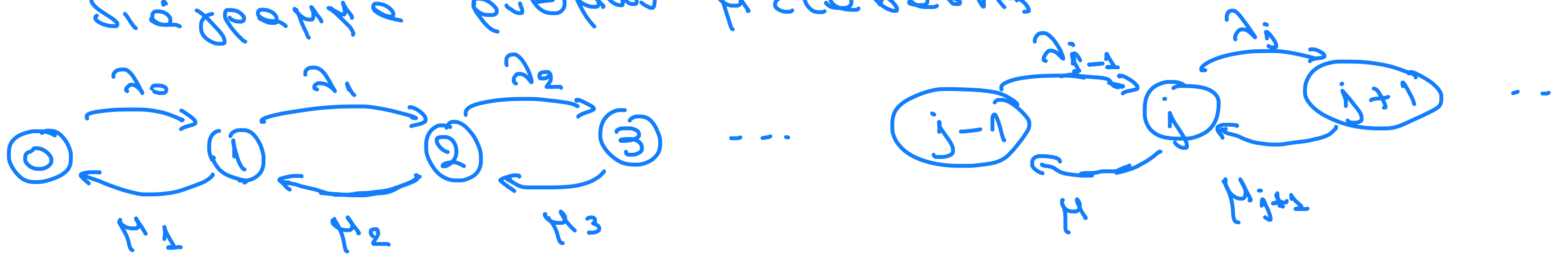
Παράδειγμα

Θεωρούμε ΜΑΣΧ $\{X(t), t \geq 0\}$ με χ.κ. $S = \{0,1,2,3,\dots\}$

και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



όπου $\lambda_j > 0$, $j \geq 0$

$\mu_j > 0$, $j \geq 1$

Η $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι αλυσίδα γέννησης-θανάτου.

Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή.

Λύση

Έστω $j \in \{1,2,3,4,\dots\}$,

οι εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας για $A = \{0,1,2,\dots,j-1\}$ είναι

$$p_{j-1} \cdot \lambda_{j-1} = p_j \mu_j \quad , \quad j = 1,2,\dots$$

Άρα

$$p_j = p_{j-1} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} = p_{j-2} \frac{\lambda_{j-2}\lambda_{j-1}}{\mu_{j-1}\mu_j} = \dots = p_0 \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j} \Rightarrow$$

$$p_j = p_0 \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j} \quad , \quad j = 1,2,3,\dots$$

Εξίσωση κανονικοποίησης:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1 \Rightarrow p_0 + \sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1 \Rightarrow p_0 + \sum_{j=1}^{\infty} p_0 \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j} = 1 \Rightarrow$$

$$p_0 \underbrace{\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j}\right)}_{B^{-1}} = 1$$

Η $\{X(t), t \geq 0\}$ έχει στάσιμη κατανομή

$\Updownarrow$

Είναι θετικά επαναληπτική

αν $B^{-1} < \infty$.

Τότε,

$$p_j = \begin{cases} B & , j = 0 \\ B \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j} & , j = 1, 2, \ldots \end{cases}$$