Θεώρημα (Αναδρομικές και προδρομικές εξισώσεις για $P(t)$)

Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ Μ.Α.Σ.Χ. με $P(t)$ πίνακα πιθ. μετάβασης σε χρόνο t, χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ και πίνακα ρυθμών μετάβασης Q. Τότε ο $P(t)$ είναι παραγωγίσιμος ως προς t και ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\frac{d}{dt} P(t) = P'(t) = Q \cdot P(t)$$

και

$$\frac{d}{dt} P(t) = P'(t) = P(t) \cdot Q$$

με αρχική συνθήκη $P(0) = I$

Απόδειξη Αρχικά, θ.δ.ο $p_{ij}(h) = \delta_{ij} + q_{ij} h + o(h)$,

όπου $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & αν\ i = j \\ 0, & αν\ i \neq j \end{cases}$ και $\lim\limits_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Έχουμε,

$$P(N(h) = 0 \mid X_0 = i) = P(Y_1 > h \mid X_0 = i)$$

$$\underset{(Y_1 \mid X_0 = i) \sim Exp(q_i)}{=\!=} e^{-q_i h}$$

$$= 1 - q_i h + o(h)$$

$$\underset{q_{ii} = -q_i}{=\!=} 1 + q_{ii} h + o(h)$$

Ακόμη,

$$P(N(h) = 1 \mid X_0 = i) = P(Y_1 \leq h, Y_1 + Y_2 > h \mid X_0 = i)$$

$$= \int_0^\infty P(Y_1 \leq h, Y_1 + Y_2 > h \mid X_0 = i, Y_1 = s) \cdot f_{(Y_1 \mid X_0 = i)}(s)\, ds$$

$$= \int_0^h P(Y_2 > h - s \mid X_0 = i, Y_1 = s)\, q_i e^{-q_i s}\, ds$$

$$= \sum_{j \neq i} \int_0^h \underbrace{P(Y_2 > h - s \mid Y_1 = s, X_0 = i, X_1 = j)} \cdot \underbrace{P(X_1 = j \mid Y_1 = s, X_0 = i)}_{p_{ij}}\, q_i e^{-q_i s}\, ds$$

$$= \sum_{j \neq i} \int_0^h e^{-q_j (h - s)}\, p_{ij}\, q_i e^{-q_i s}\, ds$$

$$= \sum_{j\neq i} p_{ij}\, q_i\, e^{-q_j h} \int_0^h e^{-(q_i-q_j)s}\, ds$$

$$= \sum_{j\neq i} p_{ij}\, q_i\, e^{-q_j h}\, \frac{1-e^{-(q_i-q_j)h}}{q_i-q_j}$$

$$= \sum_{j\neq i} \frac{p_{ij}\cdot q_i}{q_i-q_j}\left(e^{-q_j h} - e^{-q_i h}\right)$$

$$= \sum_{j\neq i} \frac{p_{ij}\, q_i}{q_i-q_j}\left(\cancel{1} - q_j h - \cancel{1} + q_i h + o(h)\right)$$

$$= \sum_{j\neq i} \frac{p_{ij}\, q_i}{\cancel{q_i-q_j}}\left(\cancel{q_i-q_j}\right)h + o(h)$$

$$= \sum_{j\neq i} p_{ij}\, \underbrace{q_i\, h} + o(h)$$

$$= q_i h \underbrace{\sum_{j\neq i} p_{ij}}_{1} + o(h)$$

$$= q_i \cdot h + o(h)$$

Ομοίως $P(N(h) \geq 2 \mid X_0 = i) = o(h)$

Άρα, παίρνουμε

$$p_{ii}(h) = P(X(h) = i \mid X(0) = i)$$

$$= P(X_{N(h)} = i \mid X_0 = i)$$

$$= P(X_{N(h)} = i \mid X_0 = i, N(h)=0)\cdot P(N(h)=0 \mid X_0 = i)$$

$$+ P(X_{N(h)} = i \mid X_0 = i, N(h)=1)\, P(N(h)=1 \mid X_0=i)$$

$$+ P(X_{N(h)} = i \mid X_0 = i, N(h)\geq 2)\, P(N(h)\geq 2 \mid X_0 = i)$$

$$= P(X_0 = i \mid X_0 = i, N(h)=0)\cdot(1 + q_{ii} h + o(h))$$

$$+ P(X_1 = i \mid X_0 = i, N(h)=1)\,(q_i h + o(h))$$

$$+ P(X_{N(h)} = i \mid X_0 = i, N(h)\geq 2)\; o(h)$$

$$= 1\cdot(1+q_{ii}h+o(h)) + 0\,(q_i h + o(h)) + o(h)$$

$$= 1 + q_{ii}h + o(h) \Rightarrow$$

$$p_{ii}(h) = 1 + q_{ii}h + o(h)$$

Για $i \neq j$,

$$p_{ij}(h) = P(X(h)=j \mid X(0)=i)$$

$$= P(X_{N(h)}=j \mid X_0=i)$$

$$= P(X_{N(h)}=j \mid X_0=i, N(h)=0)\cdot P(N(h)=0 \mid X_0=i)$$

$$+ P(X_{N(h)}=j \mid X_0=i, N(h)=1)\, P(N(h)=1 \mid X_0=i)$$

$$+ P(X_{N(h)}=j \mid X_0=i, N(h)\geq 2)\ P(N(h)\geq 2 \mid X_0=i)$$

$$= 0\,(1+q_{ii}h+o(h)) + p_{ij}\cdot(q_i h + o(h)) + o(h)$$

$$= p_{ij}\cdot q_i h + o(h)$$

$$\underline{\underline{p_{ij}=\frac{q_{ij}}{q_i}}}\quad q_{ij}\cdot h + o(h)$$

Άρα, δείξαμε ότι $p_{ij}(h) = \delta_{ij} + q_{ij}h + o(h)$.

Από τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov παίρνουμε

$$p_{ij}(t+h) = \sum_{k\in S} p_{ik}(h)\cdot p_{kj}(t)$$

$$= \sum_{k\in S} (\delta_{ik} + q_{ik}h + o(h))\, p_{kj}(t) \Rightarrow$$

$$p_{ij}(t+h) = p_{ij}(t) + \sum_{k\in S} q_{ik}\cdot h\, p_{kj}(t) + o(h) \Rightarrow$$

$$p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) = \sum_{k \in S} q_{ik} \cdot h \cdot p_{kj}(t) + o(h) \Rightarrow$$

$$\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = \sum_{k \in S} q_{ik} p_{kj}(t) + \frac{o(h)}{h} \Rightarrow$$

$$p_{ij}'(t) = \sum_{k \in S} q_{ik} p_{kj}(t) \Rightarrow$$

$$P'(t) = Q \cdot P(t)$$

Ομοίως προκύπτει ότι $P'(t) = P(t) \cdot Q$ αν γράψουμε $p_{ij}(t+h) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) p_{kj}(h)$

Σημείωση: Εφόσον $P'(t) = P(t) \cdot Q$ και $p(t) = p(0) \cdot P(t)$, έχουμε $\boxed{p'(t) = p(t) \cdot Q}$