Ορισμός (αντιστρέψιμες στοχαστικές ανελίξεις)

Αν $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ στοχαστική ανέλιξη και $\{\hat{X}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ η αντίστροφή της, τότε η $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ αντιστρέψιμη $\Longleftrightarrow$ $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ και $\{\hat{X}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ στοχαστικά ισοδύναμες.

Θεώρημα (Αντιστρέψιμες Μ.Α.Δ.Χ)

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ αδιαχώριστη, θετικά επαναληπτική με στάσιμη κατανομή π, πίνακα π.ψ. μετάβασης P και $\pi^{(0)} = \pi$.

Τότε η $\{X_n\}$ αντιστρέψιμη $\Longleftrightarrow$ $P = \hat{P}$ $\Longleftrightarrow$

$$p_{ij} = \hat{p}_{ij}, \ \forall i,j \in S \Longleftrightarrow$$

$$p_{ij} = \frac{\pi_j}{\pi_i} p_{ji} \ \forall i,j \in S \Longleftrightarrow$$

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}, \ \forall i,j \in S$$ (εξισώσεις λεπτομερούς ισορροπίας)

Σημειώσεις:

- εξισώσεις λεπτομερούς ισορροπίας $\Longrightarrow$ εξισώσεις (πλήρους) ισορροπίας

  $\not\Longleftarrow$

- Αν μια ΜΑΔΧ είναι αντιστρέψιμη μπορώ να υπολογίσω εύκολα την στάσιμη κατανομή από τις εξισώσεις λεπτομερούς ισορροπίας.

Θεώρημα (Κριτήριο αντιστρεψιμότητας Kolmogorov)

$\{X_n\}$ αδιαχώριστη, θετικά επαναληπτική Μ.Α.Δ.Χ.

$\{X_n\}$ αντιστρέψιμη $\Longleftrightarrow$ $\forall\ i_0 \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_n \to i_0$ ισχύει

$$p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} p_{i_2 i_3} \cdots p_{i_{n-1} i_n} p_{i_n i_0} = p_{i_0 i_n} p_{i_n i_{n-1}} \cdots p_{i_2 i_1} p_{i_1 i_0}$$

Απόδειξη

(⇒) $\{X_n\}$ αντιστρέψιμη $\Rightarrow$ $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \quad \forall i,j \in S$.

Τότε, αν $i_0 \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_n \to i_0$ ένας κύκλος,

$$p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} p_{i_n i_0} = \frac{\pi_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} p_{i_n i_0}}{\pi_{i_0}}$$

$$= \frac{p_{i_1 i_0} \cdot \pi_{i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} \cdot p_{i_n i_0}}{\pi_{i_0}}$$

$$= \frac{p_{i_1 i_0} \cdot p_{i_2 i_1} \cdot \pi_{i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} p_{i_n i_0}}{\pi_{i_0}}$$

$$= \cdots = \frac{p_{i_1 i_0} \cdot p_{i_2 i_1} \cdots \pi_{i_{n-1}} p_{i_{n-1} i_n} p_{i_n i_0}}{\pi_{i_0}}$$

$$= \frac{p_{i_1 i_0} p_{i_2 i_1} \cdots p_{i_n i_{n-1}} \pi_{i_n} p_{i_n i_0}}{\pi_{i_0}}$$

$$= \frac{p_{i_1 i_0} p_{i_2 i_1} \cdots p_{i_n i_{n-1}} \cdot p_{i_0 i_n} \cdot \cancel{\pi_{i_0}}}{\cancel{\pi_{i_0}}}$$

$$= p_{i_0 i_n} \cdot p_{i_n i_{n-1}} \cdots p_{i_2 i_1} \cdot p_{i_1 i_0}$$

(⇐) Για κάθε κύκλο $i_0 \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_n \to i_0$ ισχύει

$$p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_n i_0} = p_{i_0 i_n} p_{i_n i_{n-1}} \cdots p_{i_2 i_1} \cdot p_{i_1 i_0}$$

αθροίζοντας για όλα τα $i_2, i_3, \ldots, i_n$ παίρνουμε

$$p_{i_0 i_1} \cdot p^{(n)}_{i_1 i_0} = p^{(n)}_{i_0 i_1} p_{i_1 i_0}$$

Επίσης,

$$p_{i_0 i_1} \cdot \underbrace{\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{k-1} p_{i_1 i_0}^{(n)}}{k}}_{\pi_{i_0}} = p_{i_0 i_1} \cdot \pi_{i_0}$$

και

$$p_{i_1 i_0} \cdot \underbrace{\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{k-1} p_{i_0 i_1}^{(n)}}{k}}_{\pi_{i_1}} = p_{i_1 i_0} \cdot \pi_{i_1}$$

Οπότε, προκύπτει $\quad \pi_{i_0} \cdot p_{i_0 i_1} = \pi_{i_1} \cdot p_{i_1 i_0} \quad \forall\ i_0, i_1 \in S$