3.7. Αντιστρεψιμότητα Μ.Α.Δ.Χ

<u>Ορισμός</u> (αντίστροφη στοχαστικής ανέλιξης)

Έστω $\{X_n, n\in\mathbb{Z}\}$ στοχαστική ανέλιξη και $n_0\in\mathbb{Z}$.

Τότε η $\{Y_n, n\in\mathbb{Z}\}$ με $Y_n = X_{n_0-n}$, $n\in\mathbb{Z}$ λέγεται <u>αντίστροφη</u> της $\{X_n, n\in\mathbb{Z}\}$ ως προς τη χρονική στιγμή n_0.

Όταν, $n_0=0$, η $\{Y_n, n\in\mathbb{Z}\}$ λέγεται <u>τυπική αντίστροφη</u> της $\{X_n, n\in\mathbb{Z}\}$.

<u>Θεώρημα</u>

Αν η $\{X_n\}$ είναι Μ.Α.Δ.Χ., αδιαχώριστη, θετικά επαναληπτική με στάσιμη κατανομή π και αρχική κατανομή την π, τότε η αντίστροφή της, $\{\hat{X}_n\}$, είναι αδιαχώριστη, θετικά επαναληπτική ΜΑΔΧ με την ίδια στάσιμη κατανομή π.

Ακόμη, αν $P=[p_{ij}]$ ο πίνακας πιθ. μετάβασης της $\{X_n\}$

και $\hat{P} = [\hat{p}_{ij}]$ ο πίνακας πιθ. μετάβασης της $\{\hat{X}_n\}$

τότε $$\pi_i \hat{p}_{ij} = \pi_j p_{ji}, \quad \forall i,j\in S$$

<u>Απόδειξη</u>

$$P(\hat{X}_0=i_0, \hat{X}_1=i_1, \hat{X}_2=i_2, \dots, \hat{X}_{n-1}=i_{n-1}, \hat{X}_n=i_n) =$$

$$P(X_{n_0-0}=i_0, X_{n_0-1}=i_1, X_{n_0-2}=i_2, \dots, X_{n_0-(n-1)}=i_{n-1}, X_{n_0-n}=i_n) =$$

$$P(X_{n_0-n}=i_n, X_{n_0-n+1}=i_{n-1}, \dots, X_{n_0-2}=i_2, X_{n_0-1}=i_1, X_{n_0}=i_0) =$$

$$\pi_{i_n} p_{i_n i_{n-1}} \cdot p_{i_{n-1} i_{n-2}} \cdot \dots \cdot p_{i_2 i_1} \cdot p_{i_1 i_0} =$$

$$\underbrace{\frac{\pi_{i_n}}{\pi_{i_{n-1}}} \cdot p_{i_n i_{n-1}}} \cdot \underbrace{\frac{\pi_{i_{n-1}}}{\pi_{i_{n-2}}} p_{i_{n-1} i_{n-2}}} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{\pi_{i_2}}{\pi_{i_1}} p_{i_2 i_1}} \cdot \underbrace{\frac{\pi_{i_1}}{\pi_{i_0}} p_{i_1 i_0}} \cdot \pi_{i_0}$$

$\hat{p}_{ij} = \frac{\pi_j}{\pi_i} p_{ji}, i,j \in S$ $\quad \hat{p}_{i_{n-1} i_n} \hat{p}_{i_{n-2} i_{n-1}} \cdots \hat{p}_{i_1 i_2} \hat{p}_{i_0 i_1} \cdot \pi_{i_0}$

$$= \pi_{i_0} \cdot \hat{p}_{i_0 i_1} \cdot \hat{p}_{i_1 i_2} \cdots \hat{p}_{i_{n-2} i_{n-1}} \cdot \hat{p}_{i_{n-1} i_n}$$

Άρα η $\{\hat{X}_n\}$ είναι Μ.Α.Δ.Χ με αρχική κατανομή π και π.π.μ. $\hat{P} = [\hat{p}_{ij}]$ όπου $\hat{p}_{ij} = \frac{\pi_j}{\pi_i} p_{ji}$, $i,j \in S$.

Η $\{\hat{X}_n\}$ εξισορροπημένη και

$$\sum_{i \in S} \pi_i \hat{p}_{ij} = \sum_{i \in S} \cancel{\pi_i} \frac{\pi_j}{\cancel{\pi_i}} p_{ji} = \pi_j \underbrace{\sum_{i \in S} p_{ji}}_{1} = \pi_j \quad , \forall j \in S$$

άρα η π είναι στάσιμη κατανομή και για την αντίστροφη.